<u>Introduction sur les points singuliers réguliers et irréguliers des équations différentielles du n-ième degré et la théorie de Fröbenius pour les développements en série infinie autour des points réguliers. Forme Normale de Thomé autour des points irréguliers. Éléments de Théorie Fuchsienne pour les équations différentielles du second degré et du n-ième degré</u>

Auteur : Henri Lévêque, 62 rue de la Liberté, Carcassonne, henrilevequehanoi@gmail.com

Mon but ici est juste d'introduire quelques résultats de la théorie des équations différentielles présentant des points singuliers et de la façon de les résoudre en général. Dans ce cadre on parle de construction des solutions autour des points singuliers réguliers, de Théorie Fuchsienne des équations différentielles, de l'irrégularité des points singuliers, de forme normale. La théorie des équations différentielles fut initiée dans son ensemble lors de la deuxième moitié du 19ème siècle par les travaux des Mathématiciens Lazarus Immanuel Fuchs, Ferdinand Georg Fröbenius, Ludwig Wilhlem Thomé. Dans ce document je me réfère essentiellement au cours de E.L.Ince dans son ouvrage « Ordinary Differential Equation », pages 356 et suivantes, page 396 et suivantes « Solution of linear differential equations in series », « Equations with Irregular Singular Point », dédiés aux équations différentielles ordinaires d'ordre n. De plus je tire beaucoup d'exemples concrets ainsi que des éléments théoriques de l'ouvrage de A.R.Forsyth « Vol 4 Theory Of Differential Equations ».

J'utilise également les notations introduites dans l'ouvrage « Field Theory Handbook » des auteurs P.Moon et E.Spencer dont un chapitre est dédié à la théorie de Fröbenius.

Équations différentielles du second degré

Une équation différentielle linéaire du second degré peut le plus généralement s'écrire sous la forme :

$$p_0(z)y''(z)+p_1(z)y'(z)+p_2(z)y(z)=0$$

Où les fonctions $p_0(z), p_1(z), p_2(z)$ *sont a priori quelconque.*

<u>Les points « non-singuliers »</u>

Les points singuliers se définissent en quelque sorte par opposition aux points ordinaires ou encore « non-singuliers ». Le point « non-singulier » est un point autour duquel la solution y(z) de l'équation différentielle peut être développée en série de Taylor, à partir de la seule connaissance de la fonction et de sa dérivée première en ce point :

$$\begin{cases} y(z_0), y'(z_0) \\ y(z)=y(z_0)+(z-z_0)y'(z_0)+\ldots \end{cases}$$

Autour de ce point, on peut alors construire deux solutions indépendantes, comme suit :

$$\begin{cases} y_1(z_0)=0, y'_1(z_0)=1 \\ y_1(z)=y_1(z_0)+(z-z_0)y'_1(z_0)+\ldots \end{cases} \qquad \begin{cases} y_2(z_0)=1, y'_2(z_0)=0 \\ y_2(z)=y_2(z_0)+(z-z_0)y'_2(z_0)+\ldots \end{cases}$$

Autrement formulé c'est également le point autour duquel la solution du problème de Cauchy pour l'équation différentielle existe (problème aux valeurs initiales connues) :

$$\begin{cases} y(z_0) = y_0 \\ y'(z_0) = y'_0 \end{cases}$$

<u>Les points « singuliers »</u>

Par opposition les points « singuliers » sont ceux autour duquel on ne peut construire de série de Taylor pour la fonction y(z) (ou que l'on ne peut résoudre le problème de Cauchy). Pour caractériser ces derniers on peut supposer le plus généralement qu'il existe un développement autour du point singulier d'une forme particulière. On parle également d'une fonction solution de l'ED d'ordre fini autour du point singulier lorsque qu'il existe une valeur ρ finie telle que la limite suivante (pris dans le plan complexe) est nulle : $\underset{z \to z_0}{Lim} \quad (z - z_0)^\rho y(z) = 0$*. Pour le point à l'infini, cette dernière est définie ainsi :* $\underset{z \to \infty}{Lim} \quad z^{-\rho} y(z) = 0$*. Si les deux solutions indépendantes sont réputées d'ordre fini autour du point singulier, alors le point singulier est dit régulier et irrégulier si ce n'est pas le cas.*

Voyons comme cela se concrétise avec l'équation différentielle définie plus haut : les seuls points singuliers sont ceux pour lesquels $p_0(z)$ *s'annule dans le plan complexe, à l'exception du point à l'infini. Pour simplifier le propos, il est d'usage de placer un de ces points singuliers en z=0, sans pour cela réduire la généralité du propos. Le développement est donc supposé de la forme :* $y(z) = z^r (C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + ...)$*. Dans ce cas il suffit de prendre ρ=1-r pour que la limite précédente s'annule et que la fonction soit réputée d'ordre finie.*

Les fonctions $p_0(z), p_1(z), p_2(z)$ *sont également supposées être des fonctions analytiques dans tout le plan complexe, y compris aux abords du point singuliers z. Elles admettent donc chacune des développements de Taylor. En injectant les développements propre des fonctions* $p_0(z), p_1(z), p_2(z)$ *et le développement* $y(z) = z^r (C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + ...)$ *dans l'équation différentielle, et en annulant chacun des termes de puissance de z, on obtient un système infini d'équation linéaire sur les coefficients* C_i *qui s'annule. <u>La première équation linéaire de la puissance minimale en z est appelée communément l'équation indicielle</u>. Dans le cas d'une équation différentielle du second degré c'est un polynôme de degré maximal 2, que je note I(r).*

Plusieurs cas permettent une première classification du point singulier z=0 :

Cas n°1 : I(r) est indépendant de l'exposant r, il n'y a pas de solution et le point est alors qualifié d'irrégulier

Cas n°2 : I(r) dépend de l'exposant r, si c'est un polynôme de degré strictement inférieur 2, là encore le point z=0 est un point singulier irrégulier

Cas n°3 : I(r) dépend de l'exposant r, c'est un polynôme de degré = 2, le point z=0 est un point singulier régulier.

Pour le cas n°3, modifions l'équation différentielle de la façon suivante : $y''(z)+P(z)y'(z)+Q(z)y(z)=0 \quad P(z)=\frac{p_1(z)}{p_0(z)} \quad Q(z)=\frac{p_2(z)}{p_0(z)}$*. Pour qu'un point singulier z=0 de l'équation différentielle se trouve dans le cas n°3, il faut et il suffit que les deux fonctions P(z) et Q(z) satisfassent aux conditions suivantes (Théorème dû à Fuchs) :*

$$P(z)=O\left(\frac{1}{z}\right) \qquad Q(z)=O\left(\frac{1}{z^2}\right) \rightarrow \begin{cases} P(z)=\frac{p_0}{z}+a_0+a_1 z+... \\ Q(z)=\frac{q_0}{z^2}+\frac{b_{-1}}{z}+b_0+b_1 z+... \end{cases}$$

Alors dans le cas n°3 l'équation indicielle est une équation du second degré : $r^2+r(p_0-1)+q_0=0$*. Elle s'obtient facilement en injectant les développements approximées de P(z) et Q(z) et en annulant le coefficient d'ordre minimum en z, si l'on suppose un développement commençant par le terme* z^r*. On voit donc que l'équation indicielle s'obtient à partir du calcul des limites suivantes :*

$$\begin{cases} p_0=\underset{z\to 0}{Lim} \quad z\,P(z)=\underset{z\to 0}{Lim} \quad z\,\frac{p_1(z)}{p_0(z)} \\ q_0=\underset{z\to 0}{Lim} \quad z^2\,Q(z)=\underset{z\to 0}{Lim} \quad z^2\,\frac{p_2(z)}{p_0(z)} \end{cases}$$

Définie comme cela, on peut encore reformuler ces limites comme un calcul de résidus de fonction de valeur complexe pour un point singulier régulier quelconque z_0 *:*

$$\begin{cases} p_0=Residu_{\;z=z_0}\left(\frac{p_1(z)}{p_0(z)}\right) \\ q_0=Residu_{\;z=z_0}\left((z-z_0)\,\frac{p_2(z)}{p_0(z)}\right) \end{cases}$$

L'équation indicielle admet deux racines r_0 *et* r_1 *que l'on appelle communément exposants caractéristiques de Fröbenius. Il y a alors trois cas possibles dont nous allons donner les résultats principaux. Par la suite les développements seront explicitement construits autour d'un point singulier* z_0*, à l'image du point singulier z=0.*

***Sous cas n°1** : les deux racines* r_0 *et* r_1 *sont distinctes et l'écart entre les deux racines n'est pas un entiers, alors on peut construire deux solutions indépendantes autour de z=0, sous la forme :*

$$y_0(z)=z^{r_0}\sum_{l=0}^{l=+\infty}C_l z^l \qquad y_1(z)=z^{r_1}\sum_{l=0}^{l=+\infty}D_l z^l$$

***Sous cas n°2** : les deux racines* r_0 *et* r_1 *sont distinctes et l'écart entre les deux racines est un entier, alors on peut construire deux solutions indépendantes autour de z=0, sous la forme :*

$$y_0(z)=z^{r_0}\sum_{l=0}^{l=+\infty}C_l z^l \qquad y_1(z)=y_0(z)Log(z)+z^{r_0}\sum_{l=0}^{l=+\infty}D_l z^l$$

On observe la présence d'un terme dit logarithmique.

***Sous cas n°3** : les deux racines* r_0 *et* r_1 *sont identiques, alors on peut construire deux solutions indépendantes autour de z=0, également avec un terme logarithmique :*

$$y_0(z)=z^{r_0}\sum_{l=0}^{l=+\infty}C_l z^l \qquad y_1(z)=y_0(z)Log(z)+z^{r_0}\sum_{l=0}^{l=+\infty}D_l z^l$$

Le points « singulier » à l'infini

Il est facile de transformer le point à l'infini en un point singulier z=0 alors la transformation z->1/z.

L'équation différentielle de départ devient par cette transformation l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} y''(z)+P(z)y'(z)+Q(z)y(z)=0 \\ \varsigma=\dfrac{1}{z} \qquad y(z)=g(\varsigma) \end{cases} \Leftrightarrow g''(\varsigma)+\left(\frac{2}{\varsigma}-\frac{1}{\varsigma^2}P\left(\frac{1}{\varsigma}\right)\right)g'(\varsigma)+\frac{Q\left(\frac{1}{\varsigma}\right)}{\varsigma^4}g(\varsigma)=0$$

Les conditions pour lesquelles le point à l'infini est un point non-singulier sont alors les suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{2}{\varsigma}-\dfrac{1}{\varsigma^2}P\left(\dfrac{1}{\varsigma}\right)=O(1)=a_0+a_1\varsigma+\ldots \Rightarrow P\left(\dfrac{1}{\varsigma}\right)=2\varsigma+O(\varsigma^2)=\dfrac{2}{z}+O(z^{-2}) \\ \dfrac{Q\left(\frac{1}{\varsigma}\right)}{\varsigma^4}=O(1)=b_0+b_1\varsigma+\ldots \Rightarrow Q\left(\dfrac{1}{\varsigma}\right)=O(\varsigma^4)=O(z^{-4}) \end{cases}$$

Les conditions pour lesquelles le point à l'infini est un point singulier « régulier » sont alors les suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{2}{\varsigma}-\dfrac{1}{\varsigma^2}P\left(\dfrac{1}{\varsigma}\right)=\dfrac{p_0}{\varsigma}+a_0+a_1\varsigma+\ldots \Rightarrow P\left(\dfrac{1}{\varsigma}\right)=(2-p_0)\varsigma+O(\varsigma^2) \\ \dfrac{Q\left(\frac{1}{\varsigma}\right)}{\varsigma^4}=\dfrac{q_0}{\varsigma^2}+\dfrac{b_{-1}}{\varsigma}+b_0+\ldots \Rightarrow Q\left(\dfrac{1}{\varsigma}\right)=q_0\varsigma^2+b_{-1}\varsigma^3+\ldots. \end{cases}$$

Dans ce dernier cas l'équation indicielle revêt la forme suivante, à partir d'un développement des fonctions P(1/ζ) et Q(1/ζ) :

$$\begin{cases} P\left(\dfrac{1}{\varsigma}\right)=(2-p_0)\varsigma \\ Q\left(\dfrac{1}{\varsigma}\right)=q_0\varsigma^2=\dfrac{q_0}{z^2} \end{cases} \Rightarrow r^2+r(2-p_0-1)+q_0=r^2+r(1-p_0)+q_0=0$$

Moyennant cette transformation le point singulier à l'infini est alors traité comme tout autre point singulier. Les valeurs p_0 et q_0 se déduisent aussi d'un calcul de résidu :

$$\begin{cases} P\left(\dfrac{1}{\varsigma}\right)=\dfrac{p_1(z)}{p_0(z)}=\dfrac{2-p_0}{z}+\ldots \\ Q\left(\dfrac{1}{\varsigma}\right)=\dfrac{p_2(z)}{p_0(z)}=\dfrac{q_0}{z^2}+\ldots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_0=2-Residu_{\ z=\infty}\left(\dfrac{p_1(z)}{p_0(z)}\right) \\ q_0=Residu_{\ z=\infty}\left(z\,\dfrac{p_2(z)}{p_0(z)}\right) \end{cases}$$

Exemples d'équations indicielles dans le cas de points ordinaires, singuliers réguliers et singuliers irréguliers

Supposons que dans l'équation différentielle le point $z=z_0$ soit un point ordinaire, alors on peut écrire :

$$
\begin{aligned}
&y''(z)+P(z)y'(z)+Q(z)y(z)=0\\
&\begin{cases}
y(z)=\sum_{l=0}^{l=+\infty} C_l\,(z-z_0)^{r+l} \qquad y'(z)=\sum_{l=0}^{l=+\infty}(r+l)C_l\,(z-z_0)^{r+l-1} \qquad y''(z)=\sum_{l=0}^{l=+\infty}(r+l)(r+l-1)C_l\,(z-z_0)^{r+l-2}\\
P(z)=P(z_0)+(z-z_0)P'(z_0)+\ldots \qquad Q(z)=Q(z_0)+(z-z_0)Q'(z_0)
\end{cases}\\
&\text{Puissance minimale en } z \quad \text{terme} \quad y''(z)\rightarrow (r+l)(r+l-1) \quad l=0
\end{aligned}
$$

.

Dans ces conditions l'équation indicielle est invariablement : $r\,(r-1)=0$ *pour un point ordinaire ou non-singulier avec deux solutions r=0 et r=1.*

On a vu que pour un point singulier telle que : $\begin{cases} P(z)\approx \dfrac{p_0}{z-z_0}+O(1)\\ Q(z)=\dfrac{q_0}{(z-z_0)^2}+O\left(\dfrac{1}{z-z_0}\right)\end{cases}$*, l'équation indicielle était de la forme :* $r^2+r(p_0-1)+q_0=0$*. Le point $z=z_0$ est un point singulier régulier.*

Supposons maintenant que $\begin{cases} P(z)\approx \dfrac{p_0}{(z-z_0)^2}+O\left(\dfrac{1}{z-z_0}\right)\\ Q(z)=\dfrac{q_0}{(z-z_0)^2}+O\left(\dfrac{1}{z-z_0}\right)\end{cases}$*, alors exprimons juste le polynôme indiciel I(r) du degré minimal en puissance de $z-z_0$:*

$$
\begin{cases}
Q(z)y(z)=C_0(z-z_0)^{r-2}q_0\\
P(z)y'(z)=r\,C_0(z-z_0)^{r-3}p_0 \Rightarrow \text{Puissance minimale en } z \quad \text{terme} \quad P(z)y'(z)\rightarrow r=0\\
y''(z)\rightarrow r(r-1)(z-z_0)^{r-2}C_0
\end{cases}
$$

I(r) est un polynôme de degré strictement inférieur à 2. Donc $z=z_0$ est un point singulier irrégulier.

Pour une singularité de la forme : $\begin{cases} P(z)\approx \dfrac{p_0}{(z-z_0)^n}+O\left(\dfrac{1}{(z-z_0)^{n-1}}\right) \quad avec \quad n>1\\ Q(z)=\dfrac{q_0}{(z-z_0)^m}+O\left(\dfrac{1}{(z-z_0)^{m-1}}\right) \quad avec \quad m>2\end{cases}$ *, alors polynôme indiciel I(r) est de la forme :*

$$
\begin{cases}
Q(z)y(z)=C_0(z-z_0)^{r-m}q_0\\
P(z)y'(z)=r\,C_0(z-z_0)^{r-1-n}p_0 \Rightarrow \text{Puissance minimale en } z \quad \text{terme}\\
y''(z)\rightarrow r(r-1)(z-z_0)^{r-2}C_0
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
Si \quad n+1<m \quad \rightarrow I(r)=q_0\\
Si \quad n+1=m \quad \rightarrow I(r)=r\;p_0+q_0\\
Si \quad n+1>m \quad \rightarrow I(r)=r
\end{cases}
$$

Là encore le $z=z_0$ est un point singulier irrégulier.

<u>Notation de Riemann pour les points singuliers réguliers d'une équation différentielle du second degré</u>

Lors de l'étude de l'équation différentielle suivante (aussi appelé équation de Riemann ou de Papperitz) :

$$y''(z)+\left(\frac{1-\alpha-\alpha'}{z-a}+\frac{1-\beta-\beta'}{z-b}+\frac{1-\gamma-\gamma'}{z-c}\right)y'(z)+\left(\frac{\alpha\,\alpha'(a-b)(a-c)}{z-a}+\frac{\beta\,\beta'(b-a)(b-c)}{z-b}+\frac{\gamma\gamma'(c-a)(c-b)}{z-c}\right)\frac{y(z)}{(z-a)(z-b)(z-c)}=0$$

Une notation commode a été introduite pour désigner les solutions formelles de cette équation. Ici les points z=a, z=b et z=c sont des points singuliers réguliers d'exposants respectifs pour z=a, α,α' pour z=b, β,β' et pour z=c, γ, γ'. La solution est alors notée symboliquement sous la forme :

$$y(z)=P\begin{pmatrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{pmatrix}$$

dénommé symbole P-Riemann ou symbole de Papperitz (voir la combinaison des deux noms).

Les trois premières colonnes donnent respectivement le point singulier régulier et les deux exposants solutions de l'équation indicielle lors du développement autour de chaque point singulier. Par extension ce symbole est particulièrement adapté pour représenter formellement la solution d'une équation différentielle à nombre quelconque de points singuliers réguliers, sans se soucier de sa résolution concrète. On peut même lui appliquer le point singulier à l'infini (s'il est régulier) et une transformation de l'argument z.

Pour l'exemple prenons l'équation différentielle de Bessel :

$$z^2y''(z)+z\,y'(z)+\left(z^2-\nu^2\right)y(z)=0\Leftrightarrow y''(z)+\frac{1}{z}y'(z)+\left(1-\frac{\nu^2}{z^2}\right)y(z)=0$$

$$P(z)=\frac{1}{z}\rightarrow p_0=1\quad Q(z)=1-\frac{\nu^2}{z^2}\rightarrow q_0=-\nu^2\Rightarrow I(r)=r^2+r(p_0-1)+q_0=r^2-\nu^2=0\Rightarrow r=\pm\nu$$

Dans ce cas il y a deux points singuliers en z=0 et z=∞, mais seul le point z=0 est régulier, et la notation de Riemann donne pour ce point :

$$y(z)=P\begin{pmatrix} 0 & \\ -\nu & z \\ \nu & \end{pmatrix}$$

Le point z=∞ est un point singulier essentiel pour lequel l'équation indicielle n'a pas de solution :

$$y''(z)+\frac{1}{z}y'(z)+\left(1-\frac{\nu^2}{z^2}\right)y(z)=0\Rightarrow\varsigma=\frac{1}{z}\rightarrow y''(\varsigma)+\frac{1}{\varsigma}y'(\varsigma)+\left(\frac{1}{\varsigma^4}-\frac{\nu^2}{\varsigma^2}\right)y(\varsigma)=0$$

$$\textit{Equation indicielle}\quad I(r)=1=0$$

Auquel cas le comportement asymptotique des solutions de l'équation de Bessel relève de la construction d'une forme normale (voir plus loin dans le document).

Prenons un autre exemple avec l'équation de Heun (j'applique également la relation de Fuchs pour déterminer l'équation indicielle au point à l'infini):

$$y''(z)+\left(\frac{\gamma}{z}+\frac{\delta}{z-1}+\frac{\gamma}{z-a}\right)y'(z)+\frac{\alpha\beta\, z-q}{z(z-1)(z-a)}y(z)=0$$

$$\text{Point singulier } z=0 \quad p_0=\gamma \quad q_0=0 \Rightarrow I(r)=r^2+r(\gamma-1) \Rightarrow r=0 \quad r=1-\gamma$$

$$\text{Point singulier } z=1 \quad p_0=\delta \quad q_0=0 \Rightarrow I(r)=r^2+r(\delta-1) \Rightarrow r=0 \quad r=1-\delta$$

$$\text{Point singulier } z=a \quad p_0=\varepsilon \quad q_0=0 \Rightarrow I(r)=r^2+r(\varepsilon-1) \Rightarrow r=0 \quad r=1-\varepsilon$$

$$\begin{cases} p_0=\lim\limits_{z\to\infty} \quad z\left(\dfrac{\gamma}{z}+\dfrac{\delta}{z-1}+\dfrac{\varepsilon}{z-a}\right)=\gamma+\delta+\varepsilon \Rightarrow 1-p_0=-\alpha-\beta \\ q_0=\lim\limits_{z\to\infty} \quad z^2\,\dfrac{\alpha\beta\, z-q}{z(z-1)(z-a)}=\alpha\beta \end{cases}$$

$$\text{Point singulier } z=\infty \Rightarrow r^2+r(1-p_0)+q_0=(r-\alpha)(r-\beta)=0 \Rightarrow r=\alpha \quad r=\beta$$

On a donc le p-Symbole de Riemann : $y(z)=P\begin{pmatrix} 0 & 1 & a & \infty & \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & z \\ 1-\gamma & 1-\delta & 1-\varepsilon & \beta & \end{pmatrix}$

<u>*Équation « fuchsienne » et relation de Fuchs*</u>

Une équation différentielle ordinaire d'ordre quelconque est dîtes fuchsienne si tous ces points singuliers, y compris le point à l'infini sont réguliers.

Il existe une condition pour que tous les points soit réguliers. Je la donne pour une équation différentielle d'ordre 2 (une démonstration partielle simple suit). Soit a_i l'ensemble des v points singuliers de l'équation à distance fini (en dehors du point à l'infini), soit α_{i1},α_{i2} les exposants aux points a_i et β_1,β_2 au point à l'infini, la relation suivante a lieu :

$$\sum_{i=1}^{i=\nu}(\alpha_{i1}+\alpha_{i2})+\beta_1+\beta_2=\nu-1 \qquad \text{Equation différentielle de degré } n \qquad \sum_{i=1}^{i=\nu}\sum_{j=1}^{j=n}\alpha_{ij}+\sum_{j=1}^{j=n}\beta_j=\frac{n(n-1)(\nu-1)}{2}$$

Prenons par exemple l'équation de Heun, alors la relation s'écrit :

$$r=3 \to 1-\gamma+1-\delta+1-\varepsilon+\alpha+\beta=2 \Leftrightarrow 1+\alpha+\beta=\gamma+\delta+\varepsilon$$

Cette relation se démontre « facilement » si l'on admet le théorème du même mathématicien Fuchs que l'on a déjà énoncé et qui nous dit qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un point singulier soit régulier pour l'équation $y''(z)+P(z)y'(z)+Q(z)y(z)=0$ *est que les deux fonctions P(z) et Q(z) soient de la forme* $P(z)=\frac{p_0(z)}{z-z_0}$ $\quad Q(z)=\frac{q_0(z)}{(z-z_0)^2}$ *autour du point singulier* z_0 *avec des fonctions* $p_0(z)$ *et* $q_0(z)$ *analytiques (admettant un développement de Taylor) autour du point singulier.*

Si maintenant on transpose ce résultat dans une équation Fuchsienne, cela implique que dans la partie finie du plan complexe avec pour seuls points singuliers a_i *, alors les fonctions P(z) et Q(z) sont nécessairement de la forme :*

$$P(z)=\sum_{l=1}^{l=v}\frac{p_{1l}}{z-a_l}+q_1(z) \qquad Q(z)=\sum_{l=1}^{l=v}\frac{p_{2l}}{(z-a_l)^2}+\frac{q_2(z)}{(z-a_1)\times\ldots\times(z-a_v)}$$

Avec $q_m(z)$ *des polynômes en z de degré à définir.*

Pour cela étudions maintenant le point singulier z=∞. Pour que ce point soit également un point régulier, posons le développement de la solution à l'infini sous la forme : $y(z)=z^r\left(c_0+c_1z^{-1}+c_2z^{-2}+\ldots\right)$*. Et supposons encore que le développement à l'infini des fonctions P(z) et Q(z) soit de la forme :* $P(z)=z^{\sigma_1}\left(b_{10}+b_{11}z^{-1}+\ldots\right)$ $\quad Q(z)=z^{\sigma_2}\left(b_{20}+b_{21}z^{-1}+\ldots\right)$*. Calculons alors le polynôme indicielle de telle manière qu'il soit exactement du second degré (condition de régularité du point). Dans l'équation différentielle* $y''(z)+P(z)y'(z)+Q(z)y(z)=0$*, les termes de puissance minimale en 1/z, soit les termes dominants en puissance de z sont :*

$$\begin{cases} y''(z)\rightarrow r\,(r-1)\,z^{r-2} \\ P(z)y'(z)\rightarrow r\ z^{r-1+\sigma_1} \\ Q(z)y(z)\rightarrow z^{r+\sigma_2} \end{cases}$$

Pour que l'équation indicielle soit du second degré il faut et il suffit que le puissance maximale vienne du terme de la dérivée seconde. On a donc les conditions :

$$\begin{cases} P(z)y'(z)\rightarrow r-1+\sigma_1\leq r-2 \\ Q(z)y(z)\rightarrow r+\sigma_2\leq r-2 \end{cases}\Rightarrow \sigma_m\leq -m \quad m=\{1,2\}$$

Cela signifie que finalement les polynômes $q_m(z)$ *sont d'un degré inférieur ou égal à m(v-1)-v, soit* $q_m(z)=O\left(z^{m(v-1)-v}\right)$*. Cela implique immédiatement que pour m=1 si* $q_m(z)$ *doit rester un polynôme alors* $q_1(z)=O\left(z^{-1}\right)\equiv 0$ *et pour m=2,* $q_2(z)=O\left(z^{v-2}\right)$*. Si par exemple il y a deux points singuliers à distance fini, alors ce polynôme est une constante* $v=2\Rightarrow q_2(z)=O(1)=a$*. Avec trois points singuliers alors* $v=3\Rightarrow q_2(z)=O(z)=a+b\ z$*.*

On en déduit la forme la plus générale d'une équation fuchsienne avec ν points singuliers réguliers à distance finie :

$$y''(z)+\left(\sum_{l=1}^{l=\nu}\frac{p_{1,l}}{z-a_l}\right)y'(z)+\left(\sum_{l=1}^{l=\nu}\frac{p_{2,l}}{(z-a_l)^2}+\frac{q_{2,0}+q_{2,1}z+\ldots+q_{2,\nu-2}z^{\nu-2}}{(z-a_1)\times\ldots\times(z-a_\nu)}\right)y(z)=0$$

Il reste à tirer la conséquence de la régularité du point à l'infini. Maintenant que tous les points singuliers à distance finis sont réguliers, les exposants caractéristiques de tous ces points avec la forme obtenue de l'équation fuchsienne sont solutions d'une équation du second degré de la forme $r(r-1)+r\,p_{1,i}+p_{2,i}=r^2+r\,(p_{1,i}-1)+p_{2,i}$ *et peuvent être pré-assignés aux valeurs :* $\alpha_{i1},\alpha_{i2}\quad i\in\{1,\ldots,\nu\}$. *Mais comme ce sont les racines de l'équation du second degré, on peut écrire :* $r^2+r\,(p_{1,i}-1)+p_{2,i}=(r-\alpha_{i1})(r-\alpha_{i2})$. *On a donc les relations évidentes :*

$$\begin{cases}1-p_{1,i}=\alpha_{i1}+\alpha_{i2}\\ p_{2,i}=\alpha_{i1}\alpha_{i2}\end{cases}$$

L'équation différentielle au point à l'infini a la forme asymptotique suivante :

$$y''(z)+\frac{\sum_{i=1}^{i=\nu}p_{1,i}}{z}\,y'(z)+\frac{1}{z^2}\left(\sum_{i=1}^{i=\nu}p_{2,i}+q_{2,\nu-2}\right)y(z)=0$$

Partant de là l'équation indicielle au point singulier z=∞ a la forme suivante :

$$r(r-1)+r\sum_{i=1}^{i=\nu}p_{1,i}+\left(\sum_{i=1}^{i=\nu}p_{2,i}+q_{2,\nu-2}\right)=(r+\beta_1)(r+\beta_2)=0$$

On en déduit les relations suivantes : $\begin{cases}\beta_1+\beta_2=\sum_{i=1}^{i=\nu}p_{1,i}-1\\ \beta_1\beta_2=\sum_{i=1}^{i=\nu}p_{2,i}+q_{2,\nu-2}\end{cases}$ *portant sur les exposants* β_1 *et* β_2 *à l'infini. Mise en correspondance avec les relations précédentes :* $\begin{cases}1-p_{1,i}=\alpha_{i1}+\alpha_{i2}\\ p_{2,i}=\alpha_{i1}\alpha_{i2}\end{cases}$, *on déduit :*

$$\sum_{i=1}^{i=\nu}(1-p_{1,i})=\sum_{i=1}^{i=\nu}(\alpha_{i1}+\alpha_{i2})=\nu-\sum_{i=1}^{i=\nu}p_{1,i}=\nu-1-\beta_1-\beta_2\Rightarrow\sum_{i=1}^{i=\nu}(\alpha_{i1}+\alpha_{i2})+\beta_1+\beta_2=\nu-1$$

Ce qui est la relation de Fuchs recherchée.

Au passage la seconde relation nous dit que $\beta_1\beta_2 = \sum_{i=1}^{i=v}\alpha_{i1}\alpha_{i2} + q_{2,v-2} \Rightarrow q_{2,v-2} = \beta_1\beta_2 - \sum_{i=1}^{i=v}\alpha_{i1}\alpha_{i2}$

Il est à noter que les coefficients $q_{2,v-1},\ldots,q_{2,1},q_{2,0}$ *ne sont pas déterminés. Avec ces relations la forme de l'équation différentielle devient :*

$$y''(z)+\left(\sum_{l=1}^{l=v}\frac{1-\alpha_{l1}-\alpha_{l2}}{z-a_l}\right)y'(z)+\left(\sum_{l=1}^{l=v}\frac{\alpha_{l1}\alpha_{l2}}{(z-a_l)^2}-\frac{z^{v-2}\sum_{i=1}^{i=v}\alpha_{i1}\alpha_{i2}}{(z-a_1)\times\ldots\times(z-a_v)}+\frac{\beta_1\beta_2\ z^{v-2}+q_{2,v-3}z^{v-3}+\ldots+q_{2,1}z+q_{2,0}}{(z-a_1)\times\ldots\times(z-a_v)}\right)y(z)=0$$

$$\Leftrightarrow y''(z)+\left(\sum_{l=1}^{l=v}\frac{1-\alpha_{l1}-\alpha_{l2}}{z-a_l}\right)y'(z)+\left(\sum_{l=1}^{l=v}\alpha_{l1}\alpha_{l2}\left(\frac{-(z-a_l)\,z^{v-2}+\prod_{i=1,i\neq l}^{i=v}(z-a_i)}{z-a_l}\right)+\left(\beta_1\beta_2\ z^{v-2}+q_{2,v-3}z^{v-3}+\ldots+q_{2,1}z+q_{2,0}\right)\right)\frac{y(z)}{\prod_{l=1}^{l=v}(z-a_l)}=0$$

$$Or\quad -(z-a_l)\,z^{v-2}+\prod_{i=1,i\neq l}^{i=v}(z-a_i)=\prod_{i=1,i\neq l}^{i=v}(a_l-a_i)+(z-a_l)\left(\chi_{2,v-3}z^{v-3}+\ldots+\chi_{2,1}z+\chi_{2,0}\right)$$

Or cette forme peut encore se simplifier sachant que :

$$-(z-a_l)\,z^{v-2}+\prod_{i=1,i\neq l}^{i=v}(z-a_i)=\prod_{i=1,i\neq l}^{i=v}(a_l-a_i)+(z-a_l)\left(\chi_{2,v-3,l}z^{v-3}+\ldots+\chi_{2,1,l}z+\chi_{2,0,l}\right)$$

où les coefficients $\chi_{2,v-3},\ldots,\chi_{2,1},\chi_{2,0}$ *n'ont pas besoin d'être déterminé explicitement, mais dont on sait que l'existence est assurée, car l'expression du membre gauche de l'égalité est égale à* $\prod_{i=1,i\neq l}^{i=v}(a_l-a_i)$ *lorsque z=*a_l*. Donc la différence est nécessairement un polynôme qui s'annule pour z=*a_l *et qui est de degré égal à v-1. Il a donc nécessaire la forme :* $(z-a_l)\left(\chi_{2,v-3,l}z^{v-2}+\ldots+\chi_{2,1,l}z+\chi_{2,0,l}\right)$*. Une fois que l'on injecte cette forme dans l'équation différentielle fuchsienne, il vient :*

$$y''(z)+\left(\sum_{l=1}^{l=v}\frac{1-\alpha_{l1}-\alpha_{l2}}{z-a_l}\right)y'(z)+\left(\begin{array}{l}\sum_{l=1}^{l=v}\alpha_{l1}\alpha_{l2}\left(\frac{\prod_{i=1,i\neq l}^{i=v}(a_l-a_i)}{z-a_l}\right)+\\ +\sum_{l=1}^{l=v}\alpha_{l1}\alpha_{l2}\left(\chi_{2,v-3,l}z^{v-3}+\ldots+\chi_{2,1,l}z+\chi_{2,0,l}\right)+\left(\beta_1\beta_2\ z^{v-2}+q_{2,v-3}z^{v-3}+\ldots+q_{2,1}z+q_{2,0}\right)\end{array}\right)\frac{y(z)}{\prod_{l=1}^{l=v}(z-a_l)}=0$$

$$Posons\quad \tilde{q}_{2,v-3}=q_{2,v-3}+\sum_{l=1}^{l=v}\alpha_{l1}\alpha_{l2}\chi_{2,v-3,l}\quad\ldots\quad \tilde{q}_{2,1}=q_{2,1}+\sum_{l=1}^{l=v}\alpha_{l1}\alpha_{l2}\chi_{2,v-3,l}\chi_{2,1,l}\quad \tilde{q}_{2,0}=q_{2,0}+\sum_{l=1}^{l=v}\alpha_{l1}\alpha_{l2}\chi_{2,v-3,l}\chi_{2,0,l}$$

$$\Rightarrow y''(z)+\left(\sum_{l=1}^{l=v}\frac{1-\alpha_{l1}-\alpha_{l2}}{z-a_l}\right)y'(z)+\left(\sum_{l=1}^{l=v}\alpha_{l1}\alpha_{l2}\left(\frac{\prod_{i=1,i\neq l}^{i=v}(a_l-a_i)}{z-a_l}\right)+\left(\beta_1\beta_2\ z^{v-2}+\tilde{q}_{2,v-3}z^{v-3}+\ldots+\tilde{q}_{2,1}z+\tilde{q}_{2,0}\right)\right)\frac{y(z)}{\prod_{l=1}^{l=v}(z-a_l)}=0$$

Donc pour une équation fuchsienne où $p_{2,i}=0$*, une forme assez générale possible est la suivante :*

$$y''(z)+\left(\sum_{l=1}^{l=v}\frac{p_{1,l}}{z-a_l}\right)y'(z)+\frac{q_{2,0}+q_{2,1}z+\ldots+q_{2,v-2}z^{v-2}}{(z-a_1)\times\ldots\times(z-a_v)}\,y(z)=0$$

On déduit facilement que : $\alpha_{i1}=0\qquad \alpha_{i2}=1-p_{1,i}$ *et également que* $q_{2,v-2}=\beta_1\beta_2$*. Mais on va voir que la forme la plus « condensée » possible est obtenue à l'aide d'une suite de changement de fonctions.*

Si nous réalisons le changement de fonction suivant où m est à valeur quelconque réelle, il vient :

$$\begin{cases} w(z)=(z-a_j)^{-m}y(z)\Leftrightarrow y(z)=(z-a_j)^m w(z) \\ y'(z)=(z-a_j)^m\left(w'(z)+m\,\dfrac{w(z)}{z-a_j}\right) \\ y''(z)=(z-a_j)^m\left(w''(z)+2m\,\dfrac{w'(z)}{z-a_j}+m(m-1)\dfrac{w(z)}{(z-a_j)^2}\right) \end{cases}$$

$$y''(z)+\left(\sum_{l=1}^{l=\nu}\frac{1-\alpha_{l1}-\alpha_{l2}}{z-a_l}\right)y'(z)+\left(\sum_{l=1}^{l=\nu}\left(\frac{\alpha_{l1}\alpha_{l2}\prod_{i=1,i\neq l}^{i=\nu}(a_l-a_i)}{z-a_l}\right)+\left(\beta_1\beta_2\,z^{\nu-2}+\tilde{q}_{2,\nu-3}z^{\nu-3}+\ldots+\tilde{q}_{2,1}z+\tilde{q}_{2,0}\right)\right)\frac{y(z)}{\prod_{l=1}^{l=\nu}(z-a_l)}=0$$

$$\Rightarrow w''(z)+\left(\sum_{l=1,l\neq j}^{l=\nu}\frac{1-\alpha_{l1}-\alpha_{l2}}{z-a_l}+\frac{1-(\alpha_{j1}-m)-(\alpha_{j2}-m)}{z-a_j}\right)w'(z)+$$

$$+\left(\begin{matrix}\displaystyle\sum_{l=1,l\neq j}^{l=\nu}\left(\frac{\alpha_{l1}\alpha_{l2}\prod_{i=1,i\neq l}^{i=\nu}(a_l-a_i)}{z-a_l}\right)+\frac{\alpha_{j1}\alpha_{j2}\prod_{i=1,i\neq j}^{i=\nu}(a_j-a_i)+m(m-1)\prod_{i=1,i\neq j}^{i=\nu}(z-a_i)+m\prod_{i=1}^{i=\nu}(z-a_i)\left(\sum_{l=1}^{l=\nu}\frac{1-\alpha_{l1}-\alpha_{l2}}{z-a_l}\right)}{z-a_j}+\\ +\left(\beta_1\beta_2\,z^{\nu-2}+\tilde{q}_{2,\nu-3}z^{\nu-3}+\ldots+\tilde{q}_{2,1}z+\tilde{q}_{2,0}\right)\end{matrix}\right)\frac{w(z)}{\prod_{l=1}^{l=\nu}(z-a_l)}=0$$

$$\Rightarrow w''(z)+\left(\sum_{l=1,l\neq j}^{l=\nu}\frac{1-\alpha_{l1}-\alpha_{l2}}{z-a_l}+\frac{1-(\alpha_{j1}-m)-(\alpha_{j2}-m)}{z-a_j}\right)w'(z)+$$

$$+\left(\begin{matrix}\displaystyle\sum_{l=1,l\neq j}^{l=\nu}\left(\frac{\alpha_{l1}\alpha_{l2}\prod_{i=1,i\neq l}^{i=\nu}(a_l-a_i)}{z-a_l}\right)+\frac{\alpha_{j1}\alpha_{j2}\prod_{i=1,i\neq j}^{i=\nu}(a_j-a_i)+m(m-1)\prod_{i=1,i\neq j}^{i=\nu}(z-a_i)+m\left(\prod_{i=1}^{i=\nu}(z-a_i)\sum_{l=1,l\neq j}^{l=\nu}\frac{1-\alpha_{l1}-\alpha_{l2}}{z-a_l}+(1-\alpha_{j1}-\alpha_{j2})\prod_{i=1,i\neq j}^{i=\nu}(z-a_i)\right)}{z-a_j}+\\ +\left(\beta_1\beta_2\,z^{\nu-2}+\tilde{q}_{2,\nu-3}z^{\nu-3}+\ldots+\tilde{q}_{2,1}z+\tilde{q}_{2,0}\right)\end{matrix}\right)\frac{w(z)}{\prod_{l=1}^{l=\nu}(z-a_l)}=0$$

L'expression polynomiale suivante :

$$P_j(z)=\alpha_{j1}\alpha_{j2}\prod_{i=1,i\neq j}^{i=\nu}(a_j-a_i)+m(m-1)\prod_{i=1,i\neq j}^{i=\nu}(z-a_i)+m\left(\prod_{i=1}^{i=\nu}(z-a_i)\sum_{l=1,l\neq j}^{l=\nu}\frac{1-\alpha_{l1}-\alpha_{l2}}{z-a_l}+(1-\alpha_{j1}-\alpha_{j2})\prod_{i=1,i\neq j}^{i=\nu}(z-a_i)\right)$$

$$\text{Terme}\quad z^{\nu-1}\rightarrow P_j(z)=\left(m\,(m-1)+m\,(1-\alpha_{j1}-\alpha_{j2})+m\sum_{l=1,l\neq j}^{l=\nu}(1-\alpha_{l1}-\alpha_{l2})\right)z^{\nu-1}+\ldots=\left(m^2-m+m\sum_{l=1}^{l=\nu}(1-\alpha_{l1}-\alpha_{l2})\right)z^{\nu-1}+\ldots$$

$$P_j(a_j)=\left(\alpha_{j1}\alpha_{j2}+m(m-1)+m\,(1-\alpha_{j1}-\alpha_{j2})\right)\prod_{i=1,i\neq j}^{i=\nu}(a_j-a_i)=(\alpha_{j1}-m)(\alpha_{j2}-m)\prod_{i=1,i\neq j}^{i=\nu}(a_j-a_i)$$

$$\Rightarrow P_j(z)-P_j(a_j)=(z-a_j)\left(\left(m^2-m+m\sum_{l=1}^{l=\nu}(1-\alpha_{l1}-\alpha_{l2})\right)z^{\nu-2}+\ldots\right)=(z-a_j)\left(\left(m^2-m+m\nu-m\sum_{l=1}^{l=\nu}(\alpha_{l1}+\alpha_{l2})\right)z^{\nu-2}+\ldots\right)$$

$$\text{En utilisant la relation de Fuchs}\quad\sum_{i=1}^{i=\nu}(\alpha_{i1}+\alpha_{i2})+\beta_1+\beta_2=\nu-1\Rightarrow m^2-m+\nu-m\sum_{l=1}^{l=\nu}(\alpha_{l1}+\alpha_{l2})=m^2+m(\beta_1+\beta_2)$$

$$\Rightarrow P_j(z)-P_j(a_j)=(z-a_j)\left(\left(m^2+m(\beta_1+\beta_2)\right)z^{\nu-2}+\ldots\right)$$

Il vient une équation différentielle de la forme :

$$\Rightarrow w''(z)+\left(\sum_{l=1,l\neq j}^{l=v}\frac{1-\alpha_{l1}-\alpha_{l2}}{z-a_l}+\frac{1-(\alpha_{j1}-m)-(\alpha_{j2}-m)}{z-a_j}\right)w'(z)+$$

$$+\left(\sum_{l=1,l\neq j}^{l=v}\left(\frac{\alpha_{l1}\alpha_{l2}\prod_{i=1,i\neq l}^{i=v}(a_l-a_i)}{z-a_l}\right)+\frac{(\alpha_{j1}-m)(\alpha_{j2}-m)\prod_{i=1,i\neq j}^{i=v}(a_j-a_i)}{z-a_j}+((\beta_1+m)(\beta_2+m)z^{v-2}+\tilde{\tilde{q}}_{2,v-3}z^{v-3}+\ldots+\tilde{\tilde{q}}_{2,1}z+\tilde{\tilde{q}}_{2,0})\right)\frac{w(z)}{\prod_{l=1}^{l=v}(z-a_l)}=0$$

Donc la transformation $y(z)=(z-a_l)^m w(z)$ *conduit à ce que l'équation est toujours une équation fuchsienne à v points réguliers à distance finie, pour lequel l'exposant au point z=*a_j*, les exposants sont transformées de la manière suivante :* $\begin{cases}\tilde{\alpha}_{j1}=\alpha_{j1}-m\\ \tilde{\alpha}_{j2}=\alpha_{j2}-m\end{cases}$ $\begin{cases}\tilde{\beta}_1=\beta_1+m\\ \tilde{\beta}_2=\beta_2+m\end{cases}$.

En prenant tout simplement m=α_{j1}*, alors* $\begin{cases}\tilde{\alpha}_{j1}=0\\ \tilde{\alpha}_{j2}=\alpha_{j2}-\alpha_{j1}\end{cases}$ *et l'équation différentielle devient :*

$$w''(z)+\left(\sum_{l=1,l\neq j}^{l=v}\frac{1-\alpha_{l1}-\alpha_{l2}}{z-a_l}+\frac{1-\tilde{\alpha}_{j2}}{z-a_j}\right)w'(z)+\left(\sum_{l=1,l\neq j}^{l=v}\left(\frac{\alpha_{l1}\alpha_{l2}\prod_{i=1,i\neq l}^{i=v}(a_l-a_i)}{z-a_l}\right)+((\beta_1+\alpha_{j1})(\beta_2+\alpha_{j1})z^{v-2}+\tilde{\tilde{q}}_{2,v-3}z^{v-3}+\ldots+\tilde{\tilde{q}}_{2,1}z+\tilde{\tilde{q}}_{2,0})\right)\frac{w(z)}{\prod_{l=1}^{l=v}(z-a_l)}=0$$

Donc l'équation différentielle c'est simplifiée en complexité notamment sur le terme :

$$\sum_{l=1,l\neq j}^{l=v}\left(\frac{\alpha_{l1}\alpha_{l2}\prod_{i=1,i\neq l}^{i=v}(a_l-a_i)}{z-a_l}\right)$$

En itérant ce processus pour tous les indices j entre 1 et v , soit en se fixant une transformation de la forme : $y(z)=(z-a_1)^{\alpha_{11}}(z-a_2)^{\alpha_{21}}\ldots(z-a_v)^{\alpha_{v1}}w(z)=w(z)\prod_{l=1}^{l=v}(z-a_l)^{\alpha_{l1}}$ *, l'équation différentielle de la fonction w(z) devient :*

$$\begin{cases}w''(z)+\left(\sum_{l=1}^{l=v}\frac{1-\tilde{\alpha}_{l2}}{z-a_l}+\right)w'(z)+\left(\left(\left(\beta_1+\sum_{l=1}^{l=v}\alpha_{l1}\right)\left(\beta_2+\sum_{l=1}^{l=v}\alpha_{l1}\right)z^{v-2}+\tilde{\tilde{q}}_{2,v-3}z^{v-3}+\ldots+\tilde{\tilde{q}}_{2,1}z+\tilde{\tilde{q}}_{2,0}\right)\right)\frac{w(z)}{\prod_{l=1}^{l=v}(z-a_l)}=0\\ Exposant\quad \tilde{\alpha}_{l1}=0\qquad \tilde{\alpha}_{l2}=\alpha_{l2}-\alpha_{l1}\end{cases}$$

On peut donc considérer que la forme la plus standard de l'équation fuchsienne est la suivante avec le symbole de P-Riemann suivant :

$$w''(z)+\left(\sum_{l=1}^{l=v}\frac{\alpha_l}{z-a_l}\right)w'(z)+((\beta_1\beta_2\,z^{v-2}+q_{2,v-3}z^{v-3}+\ldots+q_{2,1}z+q_{2,0}))\frac{w(z)}{\prod_{l=1}^{l=v}(z-a_l)}=0$$

$$P\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \ldots & a_v & \infty & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \beta_1 & z\\ 1-\alpha_1 & 1-\alpha_2 & \ldots & 1-\alpha_v & \beta_2 & \end{pmatrix}$$

Une question : pourquoi la forme la plus générale d'une équation fuchsienne à trois points singuliers est celle de Heun ?

Appliquons ce résultat à l'équation à 3 points singuliers réguliers à distance finie :

$$\begin{cases} w''(z)+\left(\frac{\alpha_1}{z-a_1}+\frac{\alpha_2}{z-a_2}+\frac{\alpha_3}{z-a_3}\right)w'(z)+\frac{\beta_1\beta_2 z-q}{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)}w(z)=0 \\ P\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \infty & \\ 0 & 0 & 0 & \beta_1 & z \\ 1-\alpha_1 & 1-\alpha_2 & 1-\alpha_3 & \beta_2 & \end{pmatrix} \end{cases}$$

Il se trouve que cette équation différentielle reste de même nature par une transformation homographique simple z->z-a_1 (translation) :

$$w''(z)+\left(\frac{\alpha_1}{z-a_1}+\frac{\alpha_2}{z-a_2}+\frac{\alpha_3}{z-a_3}\right)w'(z)+\frac{\beta_1\beta_2 z-q}{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)}w(z)=0$$

$$t=z-a_1 \Rightarrow w''(t)+\left(\frac{\alpha_1}{t}+\frac{\alpha_2}{t-(a_2-a_1)}+\frac{\alpha_3}{t-(a_3-a_2)}\right)w'(z)+\frac{\beta_1\beta_2 t+a_1\beta_1\beta_2-q}{t\,(t-(a_2-a_1))(t-(a_3-a_2))}w(z)=0$$

Cette translation remplace le triplet de point $(a_1,a_2,a_3)\to(0,a_2-a_1,a_3-a_1)$ *et l'équation reste une équation différentielle de même nature après re-écriture des différents paramètres :*

$$w''(z)+\left(\frac{\alpha_1}{z}+\frac{\alpha_2}{z-a}+\frac{\alpha_3}{z-b}\right)w'(z)+\frac{\beta_1\beta_2 z-q}{z\,(z-a)(z-b)}w(z)=0$$

La deuxième transformation homographique est également très simple (homothétie) et associe les points $(0,a,b)\to\left(0,1,\frac{b}{a}\right)$ *:*

$$t=\frac{z}{a}\Leftrightarrow z=at\Rightarrow \frac{1}{a^2}w''(t)+\frac{1}{a}\left(\frac{\alpha_1}{a\,t}+\frac{\alpha_2}{a\,t-a}+\frac{\alpha_3}{a\,t-b}\right)w'(t)+\frac{\beta_1\beta_2 a\,t-q}{a\,t\,(a\,t-a)(a\,t-b)}w(t)=0$$

$$\Rightarrow w''(t)+\left(\frac{\alpha_1}{t}+\frac{\alpha_2}{t-1}+\frac{\alpha_3}{t-\frac{b}{a}}\right)w'(t)+\frac{\beta_1\beta_2 t-\frac{q}{a}}{t\,(t-1)\left(t-\frac{b}{a}\right)}w(t)=0$$

Et l'on obtient également une équation différentielle de Heun « standardisée » sous la forme :

$$w''(z)+\left(\frac{\alpha_1}{z}+\frac{\alpha_2}{z-1}+\frac{\alpha_3}{z-a}\right)w'(z)+\frac{\beta_1\beta_2 z-q}{z\,(z-1)(z-a)}w(z)=0$$

Solution triviale de l'équation fuschienne générale : le polynôme V(z) est identiquement nulle

Soit l'équation différentielle fuchsienne comportant p points réguliers :

$$\begin{cases} y''(z)+\left(\sum_{l=1}^{l=p}\frac{\gamma_l}{z-a_l}\right)y'(z)+\frac{V(z)}{\prod_{l=1}^{l=p}(z-a_l)}\,y(z)=0 \\ \alpha,\beta \text{ les deux exposants du développement de Fröbenius à } z=\infty \\ \text{Contrainte de Fuchs} \quad \alpha+\beta+1=\sum_{l=1}^{l=p}\gamma_l \\ V(z)=\alpha\ \beta\ z^{p-2}+v_{p-3}z^{p-3}+...+v_0 \end{cases}$$

Pour laquelle le polynôme V(z) est identiquement nulle, dans ce cas l'équation différentielle est intégrable trivialement sous la forme indéfinie :

$$y''(z)+\left(\sum_{l=1}^{l=p}\frac{\gamma_l}{z-a_l}\right)y'(z)=0 \Rightarrow \frac{d}{dz}\{Log(y'(z))\}=-\sum_{l=1}^{l=p}\frac{\gamma_l}{z-a_l}$$

$$\Rightarrow Log(y'(z))=C_1-\sum_{l=1}^{l=p}\gamma_l Log(z-a_l) \Rightarrow y'(z)=\frac{C_2}{\prod_{l=1}^{l=p}(z-a_l)^{\gamma_l}} \Rightarrow y(z)=C_2\int_z\frac{dz}{\prod_{l=1}^{l=p}(z-a_l)^{\gamma_l}}+C_3$$

Remarquons que si tous les paramètres γ_l sont entiers négatifs ou nul, l'intégrale est parfaitement calculable sous la forme d'un polynôme de degré et dans ce cas la fonction est parfaitement définie sur tout le plan complexe, a fortiori sur l'axe réel :

$$\forall l \quad \gamma_l \le 0 \quad \begin{cases} y(z)=C_0\int_1^z dz\prod_{l=1}^{l=p}(z-a_l)^{-\gamma_l} \\ y(0)=1 \Rightarrow C_0=\left(\int_1^z dz\prod_{l=1}^{l=p}(z-a_l)^{-\gamma_l}\right)^{-1} \end{cases}$$

$$\prod_{l=1}^{l=p}(z-a_l)^{-\gamma_l} \to \text{polynôme de degré} \quad -\sum_{l=0}^{l=p}\gamma_l \to y(z) \quad \text{polynôme de degré} \quad 1-\sum_{l=0}^{l=p}\gamma_l$$

A propos d'une solution polynomiale de degré 1 de l'équation différentielle de Heun

Soit l'équation différentielle fuchsienne comportant 4 points réguliers :

$$\begin{cases} y''(z)+\left(\dfrac{\gamma}{z}+\dfrac{\delta}{z-1}+\dfrac{\varepsilon}{z-a}\right)y'(z)+\dfrac{(\alpha\ \beta\ z-\theta_1)}{z(z-1)(z-a)}\,y(z)=0 \\ Contrainte\ de\ Fuchs\quad \alpha+\beta+1=\gamma+\delta+\varepsilon \end{cases}$$

Je reviens sur la construction des solutions polynomiales de cette équation, en appliquant les résultat établit en 1931 par Moris Marden dans son article « On Stieltjes Polynomials ». Il s'agit de caractériser ou de construire les solutions polynomiales des équations fuchsiennes qui sont communément appelé « Polynômes de Stieltjes » ou « Polynômes de Stieltjes-Heine », ces derniers sont étroitement associés à l'existence et la forme de polynôme de Van-Vleck, présent en numérateur du terme en y(z) de l'équation différentielle fuchsienne (voir ci-après). Le paramètre n est le degré du polynôme de Stieltjes et p est le nombre de points singuliers réguliers à distance finie de l'équation fuchsienne.

Et je me restreint tout d'abord à la solution polynomiale de degré 1, soit la plus simple qui se puisse trouver. Il se trouve que l'article laisse au lecteur le soin de compléter pour le cas n=1. Plaçons-nous également sur le cas p=3 soit l'équation de Heun. La forme du polynôme de Stieltjes dans ce cas peut s'écrire : $S_{1,0}^{(1)}(z)\quad ou\quad S_{0,1}^{(1)}(z)=z-z_1$. *En injectant cette forme triviale dans l'équation de Heun, il vient :*

$$\begin{aligned} &\frac{\gamma}{z}+\frac{\delta}{z-1}+\frac{\varepsilon}{z-a}+\frac{(\alpha\ \beta\ z-\theta_1)}{z(z-1)(z-a)}(z-z_1)=0 \\ &\Leftrightarrow (\alpha\ \beta\ z-\theta_1)(z-z_1)=-z(z-1)(z-a)\left(\frac{\gamma}{z}+\frac{\delta}{z-1}+\frac{\varepsilon}{z-a}\right) \end{aligned}$$

L'un des résultats de l'article est que par ailleurs la valeur de la racine du polynôme de Stieltjes est solution de l'équation algébrique de degré 2, qui est également une équation dîtes fractionnaire :

$$\frac{\gamma}{z_1}+\frac{\delta}{z_1-1}+\frac{\varepsilon}{z_1-a}=0$$

Ainsi l'expression $z(z-1)(z-a)\left(\dfrac{\gamma}{z}+\dfrac{\delta}{z-1}+\dfrac{\varepsilon}{z-a}\right)$ *s'annule en* $z=z_1$. *Comme c'est une expression polynomiale de degré 2, on peut la factoriser sous la forme :*

$$z(z-1)(z-a)\left(\frac{\gamma}{z}+\frac{\delta}{z-1}+\frac{\varepsilon}{z-a}\right)=(\gamma+\delta+\varepsilon)(z-z_1)(z-B)$$

Il vient donc pour la détermination du polynôme de Van-Vleck : $V_1(z)=\alpha\ \beta\ z-\theta_1$, *la valeur suivante :*

$$\begin{aligned} &(\alpha\ \beta\ z-\theta_1)(z-z_1)=-z(z-1)(z-a)\left(\frac{\gamma}{z}+\frac{\delta}{z-1}+\frac{\varepsilon}{z-a}\right)=-(\gamma+\delta+\varepsilon)(z-z_1)(z-B) \\ &\Rightarrow \alpha\ \beta\ z-\theta_1=-(\gamma+\delta+\varepsilon)(z-B) \\ &\Rightarrow \begin{cases} \alpha\ \beta=-(\gamma+\delta+\varepsilon)\Rightarrow(1+\alpha)(1+\beta)=0\Rightarrow\alpha=-1\quad ou\quad \beta=-1 \\ B=-\dfrac{\theta_1}{\gamma+\delta+\varepsilon}=-\dfrac{\theta_1}{1+\alpha+\beta}\Rightarrow B=-\dfrac{\theta_1}{\beta}\quad ou\quad B=-\dfrac{\theta_1}{\alpha} \end{cases} \\ &\Rightarrow V_1(z)=-\beta\ z-\theta_1\quad ou\quad V_1(z)=-\alpha\ z-\theta_1 \\ &Racine\ de\quad V_1(t_1)=0\quad :\quad t_1=-\frac{\theta_1}{\beta}\quad ou\quad t_1=-\frac{\theta_1}{\alpha} \end{aligned}$$

Le second résultat de l'article porte sur la valeur de la racine du polynôme de Van-Vleck qui pour n=1 doit suivre l'équation algébrique :

$$\frac{\gamma}{t_1}+\frac{\delta}{t_1-1}+\frac{\varepsilon}{t_1-a}=0 \Rightarrow t_1=z_1 \Rightarrow \theta_1=-\beta\, z_1 \quad ou \quad \theta_1=-\alpha\, z_1$$

L'expression de la racine z_1 est la suivante :

$$\frac{\gamma}{z_1}+\frac{\delta}{z_1-1}+\frac{\varepsilon}{z_1-a}=0 \Leftrightarrow \gamma(z_1-1)(z_1-a)+\delta\, z_1(z_1-a)+\varepsilon\, z_1(z_1-1)=0$$

$$\Leftrightarrow z_1^{\,2}(\gamma+\delta+\varepsilon)-z_1(\gamma(1+a)+\delta\, a+\varepsilon)+a\gamma=0$$

$$\Delta=(\beta-\delta+(\gamma+\delta)\,a)^2-4a\gamma(\gamma+\delta+\varepsilon)=\begin{cases}(\beta-\delta+a\,(\gamma+\delta))^2-4a\gamma\beta\\(\alpha-\delta+a\,(\gamma+\delta))^2-4a\gamma\alpha\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\beta\, z_1^{+}=\frac{(\beta-\delta+a\,(\gamma+\delta))+\sqrt{\Delta}}{2} & \beta\, z_1^{-}=\frac{(\beta-\delta+a\,(\gamma+\delta))-\sqrt{\Delta}}{2}\\ \alpha\, z_1^{+}=\frac{(\alpha-\delta+a\,(\gamma+\delta))+\sqrt{\Delta}}{2} & \alpha\, z_1^{-}=\frac{(\alpha-\delta+a\,(\gamma+\delta))-\sqrt{\Delta}}{2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\beta\, z_1^{\,2}-z_1(\gamma+\varepsilon+(\gamma+\delta)\,a)+a\gamma=0\\ \alpha\, z_1^{\,2}-z_1(\gamma+\varepsilon+(\gamma+\delta)\,a)+a\gamma=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-\frac{1}{z_1}=\frac{\beta\, z_1-(\beta-\delta+(\gamma+\delta)\,a)}{a\gamma} \Rightarrow -\frac{1}{z_1^{+}}=\frac{-(\beta-\delta+a\,(\gamma+\delta))+\sqrt{\Delta}}{2a\gamma}=-\frac{\beta}{a\gamma}\,z_1^{-}=\frac{\theta_1^{-}}{a\gamma}\\ -\frac{1}{z_1}=\frac{\alpha\, z_1-(\alpha-\delta+(\gamma+\delta)\,a)}{a\gamma} \Rightarrow -\frac{1}{z_1^{+}}=\frac{-(\alpha-\delta+a\,(\gamma+\delta))+\sqrt{\Delta}}{2a\gamma}=-\frac{\alpha}{a\gamma}\,z_1^{-}=\frac{\theta_1^{-}}{a\gamma}\end{cases}$$

J'aurais pu encore tout aussi simplement observer pour les deux racines du polynôme de Stieltjes que:

$$\gamma(z_1-1)(z_1-a)+\delta\, z_1(z_1-a)+\varepsilon\, z_1(z_1-1)=0 \Leftrightarrow (\gamma+\delta+\varepsilon)(z-z_1^{+})(z-z_1^{-})=0 \Rightarrow (\gamma+\delta+\varepsilon)\, z_1^{+}z_1^{-}=a\gamma$$

$$\Rightarrow \begin{cases}z_1^{+}z_1^{-}=-\frac{a\gamma}{\beta}\\ z_1^{+}z_1^{-}=-\frac{a\gamma}{\alpha}\end{cases}$$

Soit avec la normalisation choisie pour les polynômes de Heun :

$$\begin{cases}S_{1,0}^{(1)}(z)=z-z_1^{-}\\ S_{0,1}^{(1)}(z)=z-z_1^{+}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-\frac{S_{1,0}^{(1)}(z)}{z_1^{-}}=1-\frac{z}{z_1^{-}}\\ -\frac{S_{0,1}^{(1)}(z)}{z_1^{+}}=1-\frac{z}{z_1^{+}}\end{cases} = \begin{cases}1+z\,\frac{-(\beta-\delta+a\,(\gamma+\delta))\pm\sqrt{\Delta}}{2a\gamma}=1+z\,\frac{\theta_1^{-}}{a\gamma} \quad ou \quad 1+z\,\frac{\theta_1^{+}}{a\gamma}\\ 1+z\,\frac{-(\alpha-\delta+a\,(\gamma+\delta))\pm\sqrt{\Delta}}{2a\gamma}=1+z\,\frac{\theta_1^{-}}{a\gamma} \quad ou \quad 1+z\,\frac{\theta_1^{+}}{a\gamma}\end{cases}$$

$$avec \quad \begin{cases}\theta_1^{+}=-\frac{(\beta-\delta+a\,(\gamma+\delta))+\sqrt{\Delta}}{2} \quad et \quad \theta_1^{-}=-\frac{(\beta-\delta+a\,(\gamma+\delta))-\sqrt{\Delta}}{2}\\ \theta_1^{+}=-\frac{(\alpha-\delta+a\,(\gamma+\delta))+\sqrt{\Delta}}{2} \quad et \quad \theta_1^{-}=-\frac{(\alpha-\delta+a\,(\gamma+\delta))-\sqrt{\Delta}}{2}\end{cases}$$

C'est évidemment l'expression des polynômes de Heun de degré 1. Ainsi pour ce cas particulier où n=1 et p=3 l'article de Moris Marden de 1931 donne bien comme polynôme de Stieltjes un polynôme de Heun.

A propos des solutions polynomiales de l'équation différentielle fuchsienne générale
Polynômes de Heine-Steiltjes et polynômes Van-Vleck

Soit l'équation différentielle fuchsienne comportant p points réguliers :

$$\begin{cases} y''(z)+\left(\sum_{l=1}^{l=p}\frac{\gamma_l}{z-a_l}\right)y'(z)+\frac{V(z)}{\prod_{l=1}^{l=p}(z-a_l)}\,y(z)=0 \\ \alpha,\beta \text{ les deux exposants du développement de Fröbenius à } z=\infty \\ \text{Contrainte de Fuchs} \quad \alpha+\beta+1=\sum_{l=1}^{l=p}\gamma_l \\ V(z)=\alpha\ \beta\ z^{p-2}+v_{p-3}z^{p-3}+...+v_0 \end{cases}$$

Un théorème dû à Heine (Handbuch der Kugelfunctionen Berlin édition de 1878, section 135, « Ueber die Existenz und Anzahl der Lamé'schen Functionen hoherer Ordnung », page 473) nous dit qu'il existe au plus $C_{p-2}^{n+p-2}=\begin{pmatrix} n+p-2 \\ p-2 \end{pmatrix}=\frac{n\times(n+1)\times...\times(n+p-2)}{1\times 2\times...\times(p-2)}$ *polynôme V(z) de degré p-2 pour lesquels il existe des solutions polynomiales S(z) de degré n. S(z) est appelé polynôme de Stieltjes-Hein ou Stieltjes tout simplement et V(z) les polynômes de Van-Vleck. Le théorème de Heine établit l'existence de ces divers polynômes. Pour la construction de ces derniers, un article de 1931 de* ***M.Marden « On Stieltjes Polynomials »*** *en établit les prémices. Dans cet article le premier résultat porte sur les zéros du polynôme de Stieltjes de degré n. Soit les zéros* z_k *coïncident avec l'un des points réguliers* a_l*, soit ils satisfont au système suivant d'équations « fractionnaires » :*

$$S^{(n)}(z)=\prod_{l=1}^{l=n}(z-z_l)\rightarrow\begin{cases} Pour \quad n>1 \quad k=\{1,...,n>0\} \quad \sum_{l=1}^{l=p}\frac{1}{2}\frac{\gamma_l}{z_k-a_l}+\sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{l=n}\frac{1}{z_k-z_l}=0 \\ Pour \quad n=1 \quad k=\{1,...,n>0\}\rightarrow\sum_{l=1}^{l=p}\frac{\gamma_l}{z_1-a_l}=0 \end{cases}$$

Le cas n=1 n'est pas traité dans l'article de M.Marden du fait de sa relative simplicité : de l'équation fractionnaire il en résulte par une mise en facteur commun un polynôme de degré p-1 au numérateur dont l'annulation détermine p-1 valeurs possibles de la racine z_1*. Pour déterminer les valeurs des polynômes de Van-Vleck de degré p-2, la construction est la suivante. Une fois déterminées les racines* z_k *du polynôme de Stieltjes, alors on peut calculer les racines* z'_l *de la dérivée première du polynôme de Stieltjes. Notons* t_l *les zéros du polynôme de Van-Vleck de degré p-2 alors ces zéros soit coïncident avec l'un des points réguliers* a_l *, soit ils satisfont chacun à l'équation fractionnaire suivante :*

$$V(z)=\alpha\ \beta\prod_{l=1}^{l=p-2}(z-t_l)\rightarrow\begin{cases} Pour \quad n>1 \quad k=\{1,...,p-2\} \quad \rightarrow \quad \sum_{l=1}^{l=p}\frac{\gamma_l}{t_k-a_l}+\sum_{l=1}^{l=n-1}\frac{1}{t_k-z'_l}=0 \\ Pour \quad n=1 \quad k=\{1,...,p-2\} \quad \rightarrow \quad \sum_{l=1}^{l=p}\frac{\gamma_l}{t_k-a_l}=0 \end{cases}$$

Chacun des zéros du polynôme de Stieltjes satisfait également à cette équation fractionnaire (voir plus loin). Il s'ensuit qu'il convient de ne pas choisir comme racines de cette équation l'une quelconques des racines z_l *du polynôme de Stieltjes-Hein. Là encore le cas n= 1 étant considéré comme relativement simple par M.Marden il n'est pas traité et il résulte que les zéros* t_k *suivent exactement la même équation fractionnaire que le zéro* z_1*. De plus toutes les racines* t_k *à choisir étant distinct, le problème revient à choisir p-2 racines distinctes de* z_1 *parmi ces p-1 valeurs, soit le coefficient binomial qui est justement égal à p-1. Il s'en suit qu'il y a bien p-1 formes possibles du polynôme de Van-Vleck* $V_1(z)$*.*

On va supposer que les coefficients γ_l sont tous réels et positifs. Dans l'article de 1931 de M.Marden « On Stieltjes Polynomials » la supposition sur les valeurs des coefficients γ_l s'étend à des valeurs complexes : $-\nu \leq \arg\gamma_l \leq \nu < \frac{\pi}{2}$*, soit le demi-plan complexe à droite, ce qui exclut les valeurs négatives. Dans un article de T.J.Stieltjes de 1885 « Sur certains polynômes qui vérifient une équation différentielle linéaire » dans « Acta Mathematica » page 41 et suivantes, l'auteur démontre qu'avec les conditions que nous avons choisi* $\gamma_l > 0 \quad l = 1,\dots,p$ *alors les déterminations des* C_{p-2}^{n+p-2} *polynôme V(z) de degré p-2 sont toutes réelles ainsi que les solutions polynomiales de Stieltjes. T.J.Stieltjes démontre en outre que toutes les racines du polynôme éponyme sont à l'intérieur de l'intervalle des points $[a_1,a_p]$ (ces points par convention sont ordonnés par valeur croissante). T.J.Stieltjes défini justement le dénombrement des polynômes éponymes, par le nombre d'arrangement de ces n racines dans p-1 intervalles qui est justement :* $C_{p-2}^{n+p-2} = C_n^{n+p-2}$ *comme l'indique le théorème de Heine. Ce dénombrement engendre une simple propriété d'entrelacement : lorsque tous les points a_i sont sur l'axe réel et que tous les paramètres γ_i sont réels et positifs, alors les racines z_i du polynôme de Stieltjes-Hein se répartissent comme suit :*

$$\begin{cases} a_1 < z_1 < \dots < z_{n_1} < a_2 < z_{n_1+1} < \dots < z_{n_1+n_2} < a_3 < \dots < a_{p-1} < z_{\sum_{l=1}^{l=p-2} n_l + 1} < \dots < z_{\sum_{l=1}^{l=p-1} n_p} = z_N < a_p \\ n_1 + n_2 + \dots + n_{p-1} = N \end{cases}$$

Exemples simples de dénombrement : lorsque n=1, il existe au plus p-1 polynôme de Van-Vleck de degré p-2. Et encore plus concrètement pour p=3, il en existe 2. C'est d'ailleurs ce que l'on a construit dans l'exemple simple précédemment exposé avec les deux racines possibles d'une équation du second degré. Pour l'équation de Heun où p=3, alors le dénombrement des polynômes de Stieltjes-Hein de degré n est simplement n+1.

En 1898 E.B.Van.Vleck dans l'article « On the polynomials of Stieltjes » démontre pour le cas de l'équation de Heun (p=3) que la racine du polynôme de Van-Vleck de degré 1 est toujours incluse elle-même dans l'intervalle$[a_1,a_3]$. Le cas de l'équation de Heun est simple car il s'agit de répartir les racines du polynôme de Stieltjes-Hein dans deux intervalles $[a_1,a_2]$ et $[a_2,a_3]$. Comme il y en a n+1 façon de répartir les n racines dans les deux intervalles, on peut imaginer une indexation des polynômes de Stieltjes-Hein et Van-Vleck correspondant :

$$\begin{cases} l \in [0,n] \quad S_l^{(n)}(z) = \prod_{i=1}^{i=n}\left(z - z_{i,l}^{(n)}\right) \quad Card\left\{z_{i,l}^{(n)} / z_{i,l}^{(n)} \in [a_1,a_2]\right\} = l \quad i \in [1,l] \quad Card\left\{z_{i,l}^{(n)} / z_{i,l}^{(n)} \in [a_2,a_3]\right\} = n - l \\ V_l^n(z) = \alpha\ \beta\left(z - t_{n,l}\right) \end{cases}$$

E.B.Van.Vleck démontre qu'entre toutes les racines d'un polynôme de Stieltjes-Hein de degré n se trouve une et une seule racine du polynôme de Stieltjes-Hein de degré n soit qui le précède ou qui le suit : $a_1 < z_{1,l+1}^{(n)} < z_{1,l}^{(n)} < z_{2,l+1}^{(n)} < \dots < z_{i-1,l}^{(n)} < z_{i,l+1}^{(n)} < z_{i,l}^{(n)} < z_{i+1,l+1}^{(n)} < z_{i+1,l}^{(n)} < \dots < z_{n,l+1}^{(n)} < z_{n,l}^{(n)} < a_3$*. Dans l'article de A.Bourget et T.McMillen « Interlacing and asymptotic properties of Stieltjes polynomials », les auteurs précise l'entrelacement entre les racines des polynômes de Stieltjes-Hein de degré n et n+1 qui n'a lieu que lorsque les indices i et j des polynômes respectifs se suivent , précisément si i=j ou i=j+1. On a alors :* $\begin{cases} i = j \\ i = j+1 \end{cases} \Rightarrow a_1 < z_{1,i}^{(n+1)} < z_{1,j}^{(n)} < z_{2,i}^{(n+1)} < z_{2,j}^{(n)} < \dots < z_{l,i}^{(n+1)} < z_{l,j}^{(n)} < \dots < z_{n,j}^{(n)} < z_{n+1,i}^{(n+1)} < a_3$

<u>Extension des résultats aux valeurs complexes des points singuliers réguliers de l'équation différentielles et à des formes similaires d'équations différentielles fuschiennes du second degré</u>

A partir de l'article de 1931 de M.Marden, la plupart des articles dans les années 1970 et suivantes jusqu'à nos jours précisent la position des zéros des polynômes de Stieltjes et Van-Vleck à l'intérieur de l'enveloppe convexe des points singuliers réguliers à distance finie, si les points singuliers sont cette fois choisis dans le plan complexe et si les paramètres γ_i *le sont aussi avec la restriction sur l'argument du paramètre. C'est bien sûr le propos principal de l'article de M.Marden de 1931 « On Stieltjes Polynomials », mais avant en 1912 de celui de G.Pólya «Sur un théorème de Stieltjes », mais aussi de celui de N.Zaheer de 1976 «On Stieltjes and Van Vleck polynomials » et de celui de M.Alam de 1979 «ZEROS OF STIELTJES AND VAN-VLECK-POLYNOMIALS ». Un article de G.M.Shah de 1968 « On the Zeros of Van Vleck Polynomials » démontre une propriété de répartition des racines des polynômes de Van-Vleck (rappel de degré p-2) à l'intérieur des p-1 intervalles.*

En 2018 et 2021 les auteurs A.Bourget, T.McMillen et A.Vargas démontrent divers résultats d'entrelacement dans les deux articles « Interlacing and non-orthogonality of spectral polynomials for the Lamé operator » et «Interlacing and asymptotic properties of Stieltjes polynomials » toujours dans le cas restreint de l'équation de Heun(p=4) pour les racines successives du polynôme de Van-Vleck (ici de degré 1). Notamment un résultat simple fait appel à une indexation des n+1 choix de la racine du polynôme de Van-Vleck (correspond aux n+1 choix des n racines du polynôme de Stieltjes-Hein de degré n). On désigne par $t_{i,n}$ *les choix successifs de la racine du polynôme de Van-Vleck en rapport avec le polynôme de Stieltjes-Hein de degré n et par* $t_{i,n+1}$ *les choix successifs de la racine du polynôme de Van-Vleck en rapport avec le polynôme de Stieltjes-Hein de degré n+1. Alors on a :*

$$a_1 < t_{1,n} < t_{2,n} < \ldots < t_{n+1,n} < a_3 \rightarrow a_1 < t_{1,n+1} < t_{1,n} < t_{2,n+1} < t_{2,n} < \ldots < t_{n+1,n} < t_{n+2,n+1} < a_3$$

Une extension intéressante des résultats de M.Marden est réalisée dans l'article de 1976 de N.Zaheer « On Stieltjes and Van Vleck polynomials ». Dans cet article l'auteur étend les résultats obtenus par M.Marden à l'équation différentielle fuschienne du second degré de la forme :

$$y''(z)+\left(\sum_{l=1}^{l=p}\gamma_l\left(\prod_{j=1}^{j=n_l-1}(z-b_{lj})\Big/\prod_{j=1}^{j=n_l}(z-a_{lj})\right)\right)y'(z)+\frac{V(z)}{\prod_{l=1}^{l=p}\prod_{j=1}^{j=n_l}(z-a_{lj})}y(z)=0$$

La question essentielle est de savoir si l'on peut décomposer l'expression suivante ainsi :

$$\sum_{l=1}^{l=p}\gamma_l\left(\prod_{j=1}^{j=n_l-1}(z-b_{lj})\Big/\prod_{j=1}^{j=n_l}(z-a_{lj})\right)=\sum_{l=1}^{l=p}\sum_{j=1}^{j=n_l}\frac{\gamma_{lj}}{z-a_{lj}}$$

En l'occurrence pour chacun des indices l, il doit y avoir identité des deux expressions polynomiales suivantes : $\gamma_l \times \prod_{j=1}^{j=n_l-1}(z-b_{lj})=\sum_{j=1}^{j=n_l}\left(\gamma_{lj}\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{i=n_l}(z-a_{li})\right)$. *Le terme de puissance de z en* n_l*-1 donne invariablement l'équation :* $\sum_{j=1}^{j=n_l}\gamma_{lj}=\gamma_l$. *Par identification de tous les autres puissances de z, on obtient un système linéaire de* n_l *équations dont les inconnus sont les paramètres* γ_{lj}.

Il se trouve que la résolution de ce système d'équations linéaires donne des valeurs des coefficients γ_{lj} particulièrement simples en l'occurrence : $\gamma_{lj} = \gamma_l \times \frac{\prod_{i=1}^{i=n_l-1}(a_{lj}-b_{li})}{\prod_{i=1, i\neq j}^{i=n_l}(a_{lj}-a_{li})}$. *Dans ces conditions l'équation différentielle de départ est bien équivalente à l'équation fuschienne classique :*

$$y''(z)+\left(\sum_{l=1}^{l=p}\gamma_l\left(\prod_{j=1}^{j=n_l-1}(z-b_{lj})\Big/\prod_{j=1}^{j=n_l}(z-a_{lj})\right)\right)y'(z)+\frac{V(z)}{\prod_{l=1}^{l=p}\prod_{j=1}^{j=n_l}(z-a_{lj})}y(z)=0 \Leftrightarrow y''(z)+\left(\sum_{l=1}^{l=p}\sum_{j=1}^{j=n_l}\frac{\gamma_{lj}}{z-a_{lj}}\right)y'(z)+\frac{V(z)}{\prod_{l=1}^{l=p}\prod_{j=1}^{j=n_l}(z-a_{lj})}y(z)=0$$

Avec un nombre de points réguliers singuliers à distance finie au nombre de : $\sum_{l=1}^{l=p} n_l$.

Les racines des polynômes de Stieltjes-Hein satisfont donc au système suivant d'équations « fractionnaires » :

$$S_n(z)=\prod_{l=1}^{l=n}(z-z_l)\rightarrow\begin{cases} Pour \quad n>1 \quad k=\{1,...,n>0\} \quad \sum_{l=1}^{l=p}\gamma_l\left(\prod_{j=1}^{j=n_l-1}(z_k-b_{lj})\Big/\prod_{j=1}^{j=n_l}(z_k-a_{lj})\right)+\sum_{l=1, l\neq k}^{l=n}\frac{2}{z_k-z_l}=0 \\ Pour \quad n=1 \quad \rightarrow\sum_{l=1}^{l=p}\gamma_l\left(\prod_{j=1}^{j=n_l-1}(z_1-b_{lj})\Big/\prod_{j=1}^{j=n_l}(z_1-a_{lj})\right)=0 \end{cases}$$

Pour déterminer les valeurs des polynômes de Van-Vleck de degré p-2, la construction demeure la même que pour l'équation fuschienne standard à p points singuliers réguliers à distance finies : une fois déterminées les racines z_k du polynôme de Stieltjes, alors on peut calculer les racines z'_l de la dérivée première du polynôme de Stieltjes. Notons t_l les zéros du polynôme de Van-Vleck de degré p-2 alors ces zéros soit coïncident avec l'un des points réguliers a_l , soit ils satisfont à l'équation fractionnaire suivante :

$$V(z)=\alpha\ \beta\prod_{l=1}^{l=p-2}(z-t_l)\rightarrow\begin{cases} Pour \quad n>1 \quad k=\{1,...,p-2\} \quad \rightarrow \quad \sum_{l=1}^{l=p}\gamma_l\left(\prod_{j=1}^{j=n_l-1}(t_k-b_{lj})\Big/\prod_{j=1}^{j=n_l}(t_k-a_{lj})\right)+\sum_{l=1}^{l=n-1}\frac{1}{t_k-z'_l}=0 \\ Pour \quad n=1 \quad k=\{1,...,p-2\} \quad \rightarrow \quad \sum_{l=1}^{l=p}\gamma_l\left(\prod_{j=1}^{j=n_l-1}(t_k-b_{lj})\Big/\prod_{j=1}^{j=n_l}(t_k-a_{lj})\right)=0 \end{cases}$$

Ici je ne me pose pas la question de savoir si les paramètres γ_{lj} restent positifs dès lors que les paramètres γ_l le sont : $\gamma_{lj} = \gamma_l \times \frac{\prod_{i=1}^{i=n_l-1}(a_{lj}-b_{li})}{\prod_{i=1, i\neq j}^{i=n_l}(a_{lj}-a_{li})}$. *Aussi je ne peux tirer de conclusions sur la position respectives des racines des polynômes de Stieltjes-Hein ou Van-Vleck dans le cas général. Toutefois si les points b_{li} s'intercalent comme suit avec les points a_{li}* $a_{l1}<b_{l1}<a_{l2}<b_{l2}<...<a_{ln_l-1}<b_{ln_l-1}<a_{ln_l}$ *alors on peut affirmer que les coefficients γ_{lj} restent positifs, et les résultats précédents peuvent s'appliquer.*

<u>Une considération générale sur l'équation fuchsienne conduit à une condition nécessaire pour l'existence de solutions polynomiales</u>

Avant de passer au cas n=1 et n=2, une considération générale sur l'équation différentielle permet de déduire les seules valeurs admissibles de α,β pour qu'une solution polynomiale $S_n(z)$ existe avec un polynôme de Van-Vleck de degré p-2 :

$$\begin{cases} S^{(n)}(z)=\prod_{l=1}^{l=n}(z-z_l) \\ V_{p-2}(z)=\alpha\ \beta \prod_{l=1}^{l=p-2}(z-t_l) \end{cases} \Rightarrow S^{(n)''}(z)+\left(\sum_{l=1}^{l=p}\frac{\gamma_l}{z-a_l}\right)S^{(n)'}(z)+\frac{V_{p-2}(z)}{\prod_{l=1}^{l=p}(z-a_l)}\,S_n(z) \Rightarrow S^{(n)''}(z)\times\prod_{l=1}^{l=p}(z-a_l)+\sum_{l=1}^{l=p}\left(\gamma_l\prod_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{j=p}(z-a_l)\right)S^{(n)'}(z)+V_{p-2}(z)\,S^{(n)}(z)=0$$

$$S^{(n)'}(z)=\sum_{i=1}^{i=n}\left(\prod_{\substack{l=1\\ l\neq i}}^{l=n}(z-z_l)\right)=n\,z^{n-1}+\ldots \qquad S^{(n)''}(z)=\sum_{i=1}^{i=n}\left(\sum_{j=1}^{j=n}\prod_{\substack{l=1\\ l\neq i\\ l\neq j}}^{l=n}(z-z_l)\right)=n(n-1)\,z^{n-2}+\ldots$$

$$\begin{cases} Terme\quad z^{p+n-2}\rightarrow n(n-1)+n\times\sum_{l=1}^{l=p}\gamma_l+\alpha\ \beta \\ Relation\ de\ Fuchs\quad \sum_{l=1}^{l=p}\gamma_l=1+\alpha+\beta \end{cases} \Rightarrow n(n-1)+n\times\sum_{l=1}^{l=p}\gamma_l+\alpha\ \beta=n(n-1)+n(1+\alpha+\beta)+\alpha\ \beta=(n+\alpha)(n+\beta)=0\Rightarrow n=-\alpha\quad ou\quad n=-\beta$$

<u>Polynômes de Heine-Steiltjes de degré 1 et Polynômes de Van-Vleck associés pour une «équation fuchsienne générale »</u>

Précisons donc la construction du polynôme de Heine-Stieltjes de degré 1. Nous avons illustré ce cas simple pour l'équation de Heun dans le paragraphe précédent. A titre d'exemple traitons ce même cas pour l'équation fuchsienne générale à p points singuliers réguliers :

$$y(z)=S^{(1)}(z)=z-z_1\rightarrow\sum_{l=1}^{l=p}\frac{\gamma_l}{z_1-a_l}=0\Leftrightarrow\sum_{l=1}^{l=p}\left(\gamma_l\prod_{\substack{j=1\\ p\neq l}}^{j=p}(z_1-a_j)\right)=0\rightarrow p-1\quad valeurs\ de\quad z_1=z_{1,l}\Rightarrow\sum_{l=1}^{l=p}\left(\gamma_l\prod_{\substack{j=1\\ p\neq l}}^{j=p}(z-a_j)\right)=\left(\sum_{l=1}^{l=p}\gamma_l\right)\times\prod_{l=1}^{l=p-1}(z-z_{1,l})$$

$$\begin{cases} V(z)=\alpha\ \beta\ z^{p-2}+v_{p-3}z^{p-3}+\ldots+v_0=A\prod_{l=1}^{l=p-2}(z-t_l)\Rightarrow A=\alpha\ \beta \\ p-1\quad formes\ de\ V(z)\quad t_l\in\{z_{1,1},\ldots z_{1,p-1}\}\rightarrow V_k(z)=\alpha\ \beta\prod_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{l=p-1}(z-z_{1,l})\quad k=1,\ldots,p-1 \end{cases}$$

$$S_k^{(1)}(z)=z-z_{1,k}\quad k=1,\ldots,p-1 \qquad \begin{cases} y(z)=S_k^{(1)}(z) \\ V(z)=V_k(z) \end{cases}\Rightarrow y''(z)+\left(\sum_{l=1}^{l=p}\frac{\gamma_l}{z-a_l}\right)y'(z)+\frac{V(z)}{\prod_{l=1}^{l=p}(z-a_l)}\,y(z)=0\Leftrightarrow\sum_{l=1}^{l=p}\frac{\gamma_l}{z-a_l}+\frac{\alpha\ \beta\ (z-z_{1,k})\prod_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{l=p-1}(z-z_{1,l})}{\prod_{l=1}^{l=p}(z-a_l)}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sum_{l=1}^{l=p}\left(\gamma_l\prod_{\substack{j=1\\ p\neq l}}^{j=p}(z-a_j)\right)}{\prod_{l=1}^{l=p}(z-a_l)}+\alpha\ \beta\frac{\prod_{l=1}^{l=p-1}(z-z_{1,l})}{\prod_{l=1}^{l=p}(z-a_l)}=0\Leftrightarrow\sum_{l=1}^{l=p}\left(\gamma_l\prod_{\substack{j=1\\ p\neq l}}^{j=p}(z-a_j)\right)+\alpha\ \beta\prod_{l=1}^{l=p-1}(z-z_{1,l})=0$$

$$\alpha,\beta\ les\ deux\ exposants\ à\ z=\infty\qquad \alpha+\beta+1=\sum_{l=1}^{l=p}\gamma_l\Leftrightarrow(\alpha+\beta+1)\prod_{l=1}^{l=p-1}(z-z_{1,l})+\alpha\ \beta\prod_{l=1}^{l=p-1}(z-z_{1,l})=0\Rightarrow(\alpha+1)(\beta+1)\prod_{l=1}^{l=p-1}(z-z_{1,l})\Rightarrow\alpha=-1\quad ou\quad\beta=-1$$

Donc il suffit que α ou β soit égal à -1 pour que le couple suivant de polynôme de Stieltjes et de Van-Vleck respectent l'équation différentielle fuchsienne :

$$\begin{cases} z_{1,k} \quad \text{racines de} \quad \sum_{l=1}^{l=p}\left(\gamma_l \prod_{\substack{j=1\\ p\neq l}}^{j=p}(z-a_j)\right)=0 \\ y(z)=S_k^{(1)}(z)=z-z_{1,k} \\ V(z)=V_k(z)=\alpha\ \beta \prod_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{l=p-1}(z-z_{1,l}) \end{cases} \Rightarrow y''(z)+\left(\sum_{l=1}^{l=p}\frac{\gamma_l}{z-a_l}\right)y'(z)+\frac{V(z)}{\prod_{l=1}^{l=p}(z-a_l)}\,y(z)=0$$

Polynômes de Heine-Steiltjes de degré 2 et Polynômes de Van-Vleck associés pour une «équation fuchsienne générale »

Prenons maintenant le cas un peu plus compliqué de n=2 et p quelconque :

$$x, y \text{ racines de } \quad S^{(2)}(z)=(z-x)(z-y)\rightarrow \text{Système d'équations fractionnaires} \quad \begin{cases} \sum_{l=1}^{l=p}\frac{\gamma_l}{x-a_l}+\frac{2}{x-y}=0 \\ \sum_{l=1}^{l=p}\frac{\gamma_l}{y-a_l}+\frac{2}{y-x}=0 \end{cases}$$

$$\text{Posons} \quad \sum_{l=1}^{l=p}\frac{\gamma_l}{x-a_l}=\frac{P_{p-1}(x)}{\prod_{j=1}^{j=p}(x-a_j)} \Leftrightarrow P_{p-1}(x)=\prod_{j=1}^{j=p}(x-a_j)\times\sum_{l=1}^{l=p}\frac{\gamma_l}{x-a_l} \quad \text{et} \quad \sum_{\substack{l=1\\ l\neq i}}^{l=p}\frac{\gamma_l}{x-a_l}=\frac{P_{p-2}^{(i)}(x)}{\prod_{\substack{l=1\\ l\neq i}}^{l=p}(x-a_l)}$$

$$P_{p-1}(x)=\sum_{l=1}^{l=p}\gamma_l\prod_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{j=p}(x-a_j) \qquad P_{p-2}^{(i)}(x)=\sum_{\substack{l=1\\ l\neq i}}^{l=p}\gamma_l\prod_{\substack{j=1\\ j\neq l\neq i}}^{j=p}(x-a_j)$$

$$\sum_{l=1}^{l=p}\frac{\gamma_l}{x-a_l}+\frac{2}{x-y}=0 \Leftrightarrow \frac{2}{y-x}=\frac{P_{p-1}(x)}{\prod_{j=1}^{j=p}(x-a_j)} \Leftrightarrow y=x+2\,\frac{\prod_{j=1}^{j=p}(x-a_j)}{P_{p-1}(x)} \Leftrightarrow y-a_l=x-a_l+2\,\frac{\prod_{j=1}^{j=p}(x-a_j)}{P_{p-1}(x)}$$

$$\sum_{l=1}^{l=p}\frac{\gamma_l}{y-a_l}+\frac{2}{y-x}=0 \Leftrightarrow \sum_{l=1}^{l=p}\frac{\gamma_l}{(x-a_l)P_{p-1}(x)+2\prod_{j=1}^{j=p}(x-a_j)}+\frac{1}{\prod_{j=1}^{j=p}(x-a_j)}=0 \Leftrightarrow 1+\sum_{l=1}^{l=p}\frac{\gamma_l}{(x-a_l)\times\sum_{j=1}^{j=p}\frac{\gamma_j}{x-a_j}+2}=0$$

Une mise en facteur commun de l'expression, un peu fastidieuse, conduit au numérateur à un polynôme en x de degré p(p-1), par exemple pour p=3, de degré 6 et pour p=2 de degré 12, comme suit que l'on va noter $P_{p(p-1)}(x)$:

$$1+\sum_{l=1}^{l=p}\frac{\gamma_l}{(x-a_l)\times\sum_{j=1}^{j=p}\frac{\gamma_j}{x-a_j}+2}=0\Leftrightarrow 1+\sum_{l=1}^{l=p}\left(\frac{\gamma_l}{2+\sum_{i=1}^{i=p}\gamma_i\frac{x-a_l}{x-a_i}}\right)=0\Leftrightarrow\prod_{j=1}^{j=p}\left(2+\sum_{i=1}^{i=p}\gamma_i\frac{x-a_j}{x-a_i}\right)+\sum_{l=1}^{l=p}\left(\gamma_l\prod_{\substack{j=1\\j\neq l}}^{j=p}\left(2+\sum_{i=1}^{i=p}\gamma_i\frac{x-a_j}{x-a_i}\right)\right)=0$$

$$\text{Comme}\quad 2+\sum_{i=1}^{i=p}\gamma_i\frac{x-a_j}{x-a_i}=2+\gamma_j+\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{i=p}\gamma_i\frac{x-a_j}{x-a_i}\quad\text{et}\quad\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{i=p}\gamma_i\frac{x-a_j}{x-a_i}=(x-a_j)\frac{P_{p-2}^{(j)}(x)}{\prod_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{i=p}(x-a_i)}\qquad\prod_{j=1}^{j=p}\left(\prod_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{i=p}(x-a_i)\right)=\prod_{j=1}^{j=p}\left(\frac{\prod_{i=1}^{i=p}(x-a_i)}{x-a_j}\right)=\left(\prod_{j=1}^{j=p}(x-a_j)\right)^{p-1}$$

$$\Leftrightarrow\prod_{j=1}^{j=p}\left(2+\gamma_j+(x-a_j)\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{i=p}\frac{\gamma_i}{x-a_i}\right)+\sum_{l=1}^{l=p}\left(\gamma_l\prod_{\substack{j=1\\j\neq l}}^{j=p}\left(2+\gamma_j+(x-a_j)\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{i=p}\frac{\gamma_i}{x-a_i}\right)\right)=0\Leftrightarrow\prod_{j=1}^{j=p}\left(2+\gamma_j+(x-a_j)\frac{P_{p-2}^{(j)}(x)}{\prod_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{i=p}(x-a_i)}\right)+\sum_{l=1}^{l=p}\left(\gamma_l\prod_{\substack{j=1\\j\neq l}}^{j=p}\left(2+\gamma_j+(x-a_j)\frac{P_{p-2}^{(j)}(x)}{\prod_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{i=p}(x-a_i)}\right)\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{\prod_{j=1}^{j=p}\left((2+\gamma_j)\prod_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{i=p}(x-a_i)+(x-a_j)P_{p-2}^{(j)}(x)\right)}{\prod_{j=1}^{j=p}\left(\prod_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{i=p}(x-a_i)\right)}+\sum_{l=1}^{l=p}\left(\gamma_l\frac{\prod_{\substack{j=1\\j\neq l}}^{j=p}\left((2+\gamma_j)\prod_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{i=p}(x-a_i)+(x-a_j)P_{p-2}^{(j)}(x)\right)}{\prod_{\substack{j=1\\j\neq l}}^{j=p}\left(\prod_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{i=p}(x-a_i)\right)}\right)=0\qquad P_{p-2}^{(j)}(x)=\sum_{\substack{m=1\\m\neq j}}^{m=p}\gamma_m\prod_{\substack{i=1\\i\neq m\\i\neq j}}^{i=p}(x-a_i)$$

$$\Leftrightarrow\frac{\prod_{j=1}^{j=p}\left((2+\gamma_j)\prod_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{i=p}(x-a_i)+(x-a_j)P_{p-2}^{(j)}(x)\right)}{\left(\prod_{j=1}^{j=p}(x-a_j)\right)^{p-1}}+\frac{\sum_{l=1}^{l=p}\left(\gamma_l\prod_{\substack{m=1\\m\neq l}}^{m=p}\left(\prod_{\substack{j=1\\j\neq l}}^{j=p}\left(\prod_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{i=p}(x-a_i)\right)\right)\prod_{\substack{j=1\\j\neq l}}^{j=p}\left((2+\gamma_j)\prod_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{i=p}(x-a_i)+(x-a_j)P_{p-2}^{(j)}(x)\right)\right)}{\prod_{l=1}^{l=p}\left(\prod_{\substack{j=1\\j\neq l}}^{j=p}\left(\prod_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{i=p}(x-a_i)\right)\right)}=0$$

$$\text{Or}\quad\prod_{l=1}^{l=p}\left(\prod_{\substack{j=1\\j\neq l}}^{j=p}\left(\prod_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{i=p}(x-a_i)\right)\right)=\left(\prod_{j=1}^{j=p}(x-a_j)\right)^{(p-1)^2}\quad\text{et}\quad\prod_{\substack{m=1\\m\neq l}}^{m=p}\left(\prod_{\substack{j=1\\j\neq l}}^{j=p}\left(\prod_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{i=p}(x-a_i)\right)\right)=\left(\prod_{j=1}^{j=p}(x-a_j)\right)^{(p-1)(p-2)}\prod_{\substack{m=1\\m\neq l}}^{m=p}(x-a_m)$$

$$\Rightarrow\frac{\prod_{j=1}^{j=p}\left((2+\gamma_j)\prod_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{i=p}(x-a_i)+(x-a_j)P_{p-2}^{(j)}(x)\right)}{\left(\prod_{j=1}^{j=p}(x-a_j)\right)^{p-1}}+\frac{\sum_{l=1}^{l=p}\left(\gamma_l\prod_{\substack{m=1\\m\neq l}}^{m=p}(x-a_m)\prod_{\substack{j=1\\j\neq l}}^{j=p}\left((2+\gamma_j)\prod_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{i=p}(x-a_i)+(x-a_j)P_{p-2}^{(j)}(x)\right)\right)}{\left(\prod_{j=1}^{j=p}(x-a_j)\right)^{(p-1)^2-(p-1)(p-2)}}$$

$$\Rightarrow\frac{\prod_{j=1}^{j=p}\left((2+\gamma_j)\prod_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{i=p}(x-a_i)+(x-a_j)P_{p-2}^{(j)}(x)\right)+\sum_{l=1}^{l=p}\left(\gamma_l\left(\prod_{\substack{m=1\\m\neq l}}^{m=p}(x-a_m)\right)\times\prod_{\substack{j=1\\j\neq l}}^{j=p}\left((2+\gamma_j)\prod_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{i=p}(x-a_i)+(x-a_j)P_{p-2}^{(j)}(x)\right)\right)}{\left(\prod_{j=1}^{j=p}(x-a_j)\right)^{p-1}}$$

$$\text{Numérateur}\quad P_{p(p-1)}(x)=\prod_{j=1}^{j=p}\left((2+\gamma_j)\prod_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{i=p}(x-a_i)+(x-a_j)P_{p-2}^{(j)}(x)\right)+\sum_{l=1}^{l=p}\left(\gamma_l\left(\prod_{\substack{m=1\\m\neq l}}^{m=p}(x-a_m)\right)\prod_{\substack{j=1\\j\neq l}}^{j=p}\left((2+\gamma_j)\prod_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{i=p}(x-a_i)+(x-a_j)P_{p-2}^{(j)}(x)\right)\right)=0$$

$$\text{Numérateur}\rightarrow\text{Polynôme de degré}\quad x^{p(p-1)}\quad p=3\rightarrow x^6\quad p=4\rightarrow x^{12}$$

La seconde racine y est toujours déterminée par l'expression :

$$y = x + 2\,\frac{\prod_{j=1}^{j=p}\left(x-a_j\right)}{P_{p-1}(x)} \quad avec \quad P_{p-1}(x) = \sum_{l=1}^{l=p}\gamma_l \prod_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{j=p}\left(x-a_j\right)$$

Cette racine est toujours en correspondance unique avec l'une des racines x que l'on choisit pour le polynôme de Stieltjes. Il va de soi que l'on aurait pu commencer par déterminer la racine y qui suit exactement la même équation polynôme de degré p(p-1) puis la racine x en relation, comme suit :

$$P_{p(p-1)}(y) = \prod_{j=1}^{j=p}\left(\left(2+\gamma_j\right)\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{i=p}\left(y-a_i\right)+\left(y-a_j\right)P_{p-2}^{(j)}(y)\right)+\sum_{l=1}^{l=p}\left(\gamma_l\left(\prod_{\substack{m=1\\ m\neq l}}^{m=p}\left(y-a_m\right)\right)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{j=p}\left(\left(2+\gamma_j\right)\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{i=p}\left(y-a_i\right)+\left(y-a_j\right)P_{p-2}^{(j)}(y)\right)\right)=0$$

$$x = y + 2\,\frac{\prod_{j=1}^{j=p}\left(y-a_j\right)}{P_{p-1}(y)} \quad avec \quad P_{p-1}(y) = \sum_{l=1}^{l=p}\gamma_l \prod_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{j=p}\left(y-a_j\right) \quad et \quad P_{p-2}^{(j)}(y) = \sum_{\substack{m=1\\ m\neq j}}^{m=p}\gamma_m \prod_{\substack{i=1\\ i\neq m\\ i\neq j}}^{i=p}\left(y-a_i\right)$$

Mais puisque x et y sont déterminés de la même façon, alors x et y sont deux racines distinctes du même polynôme de degré p(p-1), de telle manière que : $y = x + 2\,\frac{\prod_{j=1}^{j=p}\left(x-a_j\right)}{P_{p-1}(x)}$ *et* $x = y + 2\,\frac{\prod_{j=1}^{j=p}\left(y-a_j\right)}{P_{p-1}(y)}$*. Ces deux expressions sont des involutions et définissent exactement un couple de deux racines (x,y) en correspondance l'une de l'autre. Il n'y a donc en réalité pas p(p-1) possibilités pour le polynôme de Stieltjes mais* $\frac{p\times(p-1)}{2}$ *du fait qu'il faut choisir un couple de deux racines.*

Pour ce qui est des polynômes de Van-Vleck d'après le théorème de Heine il y a au plus $n=2 \rightarrow C_{p-2}^{n+p-2} = \frac{(n+p-2)!}{n!\,(p-2)!} = \frac{p\times(p-1)}{2}$ *formes possibles. Ce qui correspond exactement au nombre de choix de racines du polynôme précédent. Pour le calcul des racines* t_k *du polynôme de Van-Vleck, cela fait intervenir les racines de la dérivée première du Polynôme de Stieltjes. Cette dernière est relativement facile à calculer à partir du choix des deux racines x et y de ce dernier. Notons là x', alors :* $S^{(2)}(z) = (z-x)(z-y) \Rightarrow S^{(2)}{}'(z) = 2z-(x+y) = 2\left(z-\frac{x+y}{2}\right) \Rightarrow x' = \frac{x+y}{2}$*. Par ailleurs les p-2 racines* t_k *du polynôme de Van-Vleck respectent toutes l'équation fractionnaire suivante :* $k\in\{1,2,\ldots,p-2\} \quad \sum_{l=1}^{l=p}\frac{\gamma_l}{t_k-a_l}+\frac{1}{t_k-\frac{x+y}{2}} = 0 \Leftrightarrow \sum_{l=1}^{l=p}\frac{\gamma_l}{t_k-a_l}+\frac{2}{2t_k-(x+y)} = 0$*. Or les équations fractionnaires qui déterminent les racines x et y du polynôme de Stieltjes sont les suivantes :* $\begin{cases}\sum_{l=1}^{l=p}\frac{\gamma_l}{x-a_l}+\frac{2}{x-y} = 0 \leftarrow t_k = x\\ \sum_{l=1}^{l=p}\frac{\gamma_l}{y-a_l}+\frac{2}{y-x} = 0 \leftarrow t_k = y\end{cases}$*.*

Donc Les deux racines choisies x et y du polynôme $P_{p(p-1)}(x)$, sont bien solutions de l'équation fractionnaire des racines du Polynôme de Van-Vleck : $\sum_{l=1}^{l=p}\frac{\gamma_l}{t_k-a_l}+\frac{2}{2t_k-(x+y)}=0$. *Désignons par* $t_{\frac{x+y}{2},j}$ *toutes les autres racines de cette équation fractionnaire liée au choix (x,y) sans être x et y. Alors on peut réécrire de manière formelle sans l'indice cette équation fractionnaire, en effectuant une mise en facteur commun, comme suit :* $\sum_{l=1}^{l=p}\frac{\gamma_l}{t-a_l}+\frac{2}{2t-(x+y)}=0 \Leftrightarrow \frac{2\left(1+\sum_{l=1}^{l=p}\gamma_l\right)(t-x)(t-y)\prod_{j=1}^{j=p-2}\left(t-t_{\frac{x+y}{2},j}\right)}{\prod_{j=1}^{j=p}(t-a_j)(2t-(x+y))}=0$, *sachant que le polynôme au numérateur se factorise toujours par le produit des racines.*

Il suffit alors de choisir comme polynôme de Van-Vleck le produit des racines autres que x et y : $\prod_{j=1}^{j=p-2}\left(t-t_{\frac{x+y}{2},j}\right)$ *pour un polynôme de Stieltjes :* $y(z)=(z-x)(z-y)$*, comme suit :*

$$\begin{cases} y(z)=(z-x)(z-y) \\ V(z)=\alpha\,\beta\prod_{j=1}^{j=p-2}\left(z-t_{\frac{x+y}{2},j}\right) \end{cases} \Rightarrow (1) \qquad 2+\left(\sum_{l=1}^{l=p}\frac{\gamma_l}{z-a_l}\right)(2z-(x+y))+\alpha\,\beta\,\frac{\prod_{l=1}^{l=p-2}\left(z-t_{\frac{x+y}{2},j}\right)}{\prod_{l=1}^{l=p}(z-a_l)}(z-x)(z-y)=0$$

$$\sum_{l=1}^{l=p}\frac{\gamma_l}{z-a_l}+\frac{2}{2z-(x+y)}=\frac{2\left(1+\sum_{l=1}^{l=p}\gamma_l\right)(z-x)(z-y)\prod_{j=1}^{j=p-2}\left(z-t_{\frac{x+y}{2},j}\right)}{(2z-(x+y))\times\prod_{j=1}^{j=p}(z-a_j)}$$

$$\Rightarrow (2z-(x+y))\sum_{l=1}^{l=p}\frac{\gamma_l}{z-a_l}+2=\frac{2\left(1+\sum_{l=1}^{l=p}\gamma_l\right)(z-x)(z-y)\prod_{j=1}^{j=p-2}\left(z-t_{\frac{x+y}{2},j}\right)}{\prod_{j=1}^{j=p}(z-a_j)}-2$$

$$(1)\Rightarrow 2\left(1+\sum_{l=1}^{l=p}\gamma_l\right)\prod_{j=1}^{j=p-2}\left(z-t_{\frac{x+y}{2},j}\right)+\alpha\,\beta\prod_{l=1}^{l=p-2}\left(z-t_{\frac{x+y}{2},j}\right)=0 \Leftrightarrow (2+\alpha)(2+\beta)=0 \leftarrow 1+\sum_{l=1}^{l=p}\gamma_l=2+\alpha+\beta$$

Par ailleurs on sait que pour n=2, la contrainte sur α ou β est la suivante :

$$Terme \quad z^p \to 2+2\times\sum_{l=1}^{l=p}\gamma_l+\alpha\,\beta=0 \quad et \quad \sum_{l=1}^{l=p}\gamma_l=1+\alpha+\beta \Rightarrow \alpha=-2 \quad ou \quad \beta=-2$$

Donc l'équation différentielle fuchsienne est bien respectée par cette construction. Pour dénombrer le nombre de choix du polynôme de Van-Vleck, étant donnée que sa forme est directement construction à partir du choix (x,y), il y a bien p(p-1)/2 formes possibles.

<u>Un résultat partiel pour les polynômes de Heine-Steiltjes de degré 3 et Polynômes de Van-Vleck associés pour une «équation fuchsienne générale »</u>

Soit les trois racines choisies pour définir le polynôme de Stieltjes : $S^{(3)}(z)=(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)$

$$\begin{cases} \sum_{l=1}^{l=p}\frac{\gamma_l}{z_1-a_l}+\frac{2}{z_1-z_2}+\frac{2}{z_1-z_3}=0 \\ \sum_{l=1}^{l=p}\frac{\gamma_l}{z_2-a_l}+\frac{2}{z_2-z_1}+\frac{2}{z_2-z_3}=0 \\ \sum_{l=1}^{l=p}\frac{\gamma_l}{z_3-a_l}+\frac{2}{z_3-z_1}+\frac{2}{z_3-z_2}=0 \end{cases}$$

Ce système d'équation fractionnaire est loin d'être aussi simple à résoudre que celui pour les racines du polynôme de Stieltjes de degré. <u>En cela le résultat ce petit paragraphe est donc partiel</u>. Tout juste peut-on supposer que les trois racines sont solutions chacune d'un polynôme de degré $\frac{p(p-1)(p-2)}{2}$*, et que chacune d'entre-elles est reliée univoquement avec les deux autres, ce qui conduit à n'en retenir que le tiers soit* $\frac{p(p-1)(p-2)}{6}$*, ce qui est exactement les résultats de dénombrement du théorème de Heine sur les polynôme de Van-Vleck. Car nous allons voir que le procédé de choix de ce dernier polynôme est similaire à celui réalisé dans le cas n=2.*

La dérivée première du polynôme de Stieltjes s'écrit : $S^{(3)\prime}(z)=(z-z_2)(z-z_3)+(z-z_1)(z-z_3)+(z-z_1)(z-z_2)$ *et la dérivée seconde s'écrit :* $S^{(3)\prime\prime}(z)=z-z_2+z-z_3+z-z_1+z-z_3+z-z_1+z-z_2=6z-2(z_1+z_2+z_3)$*. Les racines de la dérivée première sont celle du polynôme du second degré :*

$$S^{(3)\prime}(z)=3z^2-2z(z_1+z_2+z_3)+(z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3)$$
$$S^{(3)\prime}(z)=3(z-z'_1)(z-z'_2)\Leftrightarrow\begin{cases} z'_1z'_2=\frac{z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3}{3} \\ z'_1+z'_2=\frac{2}{3}(z_1+z_2+z_3) \end{cases}$$

Les racines du polynôme de Van-Vleck respectent l'équation fractionnaire suivante :

$$\sum_{l=1}^{l=p}\frac{\gamma_l}{t_k-a_l}+\frac{1}{t_k-z'_1}+\frac{1}{t_k-z'_2}=0\Leftrightarrow\sum_{l=1}^{l=p}\frac{\gamma_l}{t_k-a_l}+\frac{2t_k-z'_1-z'_2}{(t_k-z'_1)(t_k-z'_2)}=0$$
$$\Leftrightarrow\sum_{l=1}^{l=p}\frac{\gamma_l}{t_k-a_l}+\frac{6t_k-2(z_1+z_2+z_3)}{3t_k^2-2t_k(z_1+z_2+z_3)+(z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3)}=0\leftarrow\begin{cases} z'_1z'_2=\frac{z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3}{3} \\ z'_1+z'_2=\frac{2}{3}(z_1+z_2+z_3) \end{cases}$$

On voit que les trois racines choisies z_1*,*z_2 *et* z_3 *du polynôme de Stieltjes sont bien solutions de l'équation fractionnaire des racines du polynôme de Van-Vleck (j'ôte l'indice des racines* t_k*) :*

$$t=z_1\rightarrow\sum_{l=1}^{l=p}\frac{\gamma_l}{z_1-a_l}+\frac{6z_1-2(z_1+z_2+z_3)}{z_1^2-z_1z_2-z_1z_3+z_2z_3}=0\Leftrightarrow\sum_{l=1}^{l=p}\frac{\gamma_l}{z_1-a_l}+2\frac{2z_1-z_2-z_3}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)}=0$$
$$\Leftrightarrow\sum_{l=1}^{l=p}\frac{\gamma_l}{z_1-a_l}+\frac{2}{z_1-z_2}+\frac{2}{z_1-z_3}=0$$

Comme l'expression est totalement symétrique en z_1,z_2 et z_3 les deux autres racines respectent également les équations fractionnaires de Stieltjes. L'équation fractionnaire des polynômes de Van-Vleck conduit par la mise en facteur commun à l'annulation d'un polynôme de degré p+1. Comme trois de ces racines sont z_1,z_2 et z_3 il suffit de prendre les p-2 suivantes pour construire ce polynôme. Comme elles sont construites à partir des deux racines z_1' et z_2' notons ces p-2 racines , $t_{z'_1,z'_2,j}$ liée au choix (z_1,z_2,z_3) sans être z_1,z_2 ou z_3. Alors on peut réécrire de manière formelle cette équation fractionnaire, comme suit :

$$\sum_{l=1}^{l=p}\frac{\gamma_l}{t-a_l}+\frac{6\,t-2\,(z_1+z_2+z_3)}{3\,t^2-2\,t\,(z_1+z_2+z_3)+(z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3)}=\frac{\left(6+3\sum_{l=1}^{l=p}\gamma_l\right)(t-z_1)(t-z_2)(t-z_3)\prod_{j=1}^{j=p-2}\left(t-t_{z'_1,z'_2,j}\right)}{\left(3\,t^2-2\,t\,(z_1+z_2+z_3)+(z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3)\right)\times\prod_{j=1}^{j=p}(t-a_j)}=0$$

$$\Rightarrow\left(3\,t^2-2\,t\,(z_1+z_2+z_3)+(z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3)\right)\times\sum_{l=1}^{l=p}\frac{\gamma_l}{t-a_l}+6\,t-2\,(z_1+z_2+z_3)=\frac{\left(6+3\sum_{l=1}^{l=p}\gamma_l\right)\prod_{j=1}^{j=p-2}\left(t-t_{z'_1,z'_2,j}\right)}{\prod_{j=1}^{j=p}(t-a_j)}(t-z_1)(t-z_2)(t-z_3)$$

sachant que le polynôme au numérateur se factorise toujours par un produit sur ces racines.

Il suffit alors de choisir comme polynôme de Van-Vleck le produit des racines autres que z_1,z_2 et z_3 : $\prod_{j=1}^{j=p-2}\left(t-t_{z'_1,z'_2,j}\right)$ pour un polynôme de Stieltjes : $y(z)=(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)$, comme suit :

$$\begin{cases}y(z)=S^{(3)}(z)=(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)\\ V(z)=\alpha\,\beta\prod_{j=1}^{j=p-2}\left(z-t_{z'_1,z'_2,j}\right)\end{cases}\Rightarrow(1)\quad 6\,z-2\,(z_1+z_2+z_3)+\left(\sum_{l=1}^{l=p}\frac{\gamma_l}{z-a_l}\right)\left(3\,z^2-2\,z\,(z_1+z_2+z_3)+(z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3)\right)+\alpha\,\beta\,\frac{\prod_{j=1}^{j=p-2}\left(z-t_{z'_1,z'_2,j}\right)}{\prod_{l=1}^{l=p}(z-a_l)}(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)=0$$

$$Comme\quad\left(3\,z^2-2\,z\,(z_1+z_2+z_3)+(z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3)\right)\times\sum_{l=1}^{l=p}\frac{\gamma_l}{z-a_l}+6\,z-2\,(z_1+z_2+z_3)=\frac{\left(6+3\sum_{l=1}^{l=p}\gamma_l\right)\prod_{j=1}^{j=p-2}\left(z-t_{z'_1,z'_2,j}\right)}{\prod_{j=1}^{j=p}(z-a_j)}(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)$$

$$\Rightarrow\frac{\left(6+3\sum_{l=1}^{l=p}\gamma_l\right)\prod_{j=1}^{j=p-2}\left(z-t_{z'_1,z'_2,j}\right)}{\prod_{j=1}^{j=p}(z-a_j)}(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)+\alpha\,\beta\,\frac{\prod_{j=1}^{j=p-2}\left(z-t_{z'_1,z'_2,j}\right)}{\prod_{l=1}^{l=p}(z-a_l)}(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)=0$$

$$\Rightarrow 6+3\sum_{l=1}^{l=p}\gamma_l+\alpha\,\beta=6+3\,(1+\alpha+\beta)+\alpha\,\beta=0\Leftrightarrow(3+\alpha)(3+\beta)=0\leftarrow\sum_{l=1}^{l=p}\gamma_l=1+\alpha+\beta$$

Par ailleurs on sait que pour n=3, la contrainte sur α ou β est la suivante : $\alpha=-3\quad ou\quad\beta=-3$. Donc l'équation différentielle fuchsienne est bien respectée par cette construction. Pour dénombrer le nombre de choix du polynôme de Van-Vleck, étant donnée que sa forme est directement construite à partir (z_1,z_2 ,z_3), c'est le même dénombrement que pour le choix des trois racines.

Par extension on procède de la même manière pour un polynôme de Stieltjes de degré n, même si les expressions sont plus complexes. Les expressions des dérivées première et seconde sont les suivantes :

$$S^{(n)}(z)=\prod_{i=1}^{i=n}(t-z_i)=\sum_{i=0}^{i=n}s_it^{n-i}\Rightarrow S^{(n)\prime}(z)=\prod_{i=1}^{i=n-1}(t-z'_i)=\sum_{i=0}^{i=n}(n-i)s_it^{n-i-1}=\sum_{i=0}^{i=n-1}(i+1)\,s_{n-1-i}t^i=n\times\sum_{i=0}^{i=n-1}s'_i\,t^{n-1-i}\qquad s_i,s'_i\quad produits\ symétriques$$

où s_i et s'_i sont les produits symétriques suivants :

$$\begin{cases} s_0=1 \quad s_1=\sum_{l=1}^{l=n} z_l \quad s_2=\sum_{i,j=1,i>j}^{i,j=n} z_i z_j \quad s_3=\sum_{i,j,k=1,i>j>k}^{i,j=n} z_i z_j z_k \quad \ldots \quad s_{n-1}=\sum_{i_1,\ldots,i_{n-1}=1,i_1>\ldots>i_{n-1}}^{i_1,\ldots,i_n} z_{i_1}\times\ldots\times z_{i_{n-1}} \quad s_n=\prod_{l=1}^{l=n} z_l \\ s'_0=1 \quad s'_1=\sum_{l=1}^{l=n-1} z'_l \quad s'_2=\sum_{i,j=1,i>j}^{i,j=n} z'_i z'_j \quad s_3=\sum_{i,j,k=1,i>j>k}^{i,j=n} z'_i z'_j z'_k \quad \ldots \quad s_{n-2}=\sum_{i_1,\ldots,i_{n-2}=1,i_1>\ldots>i_{n-2}}^{i_1,\ldots,i_{n-2}} z'_{i_1}\times\ldots\times z'_{i_{n-2}} \quad s'_{n-1}=\prod_{l=1}^{l=n-1} z'_l \\ s'_{n-1-i}=\dfrac{(i+1)\,s_{n-1-i}}{n} \Leftrightarrow s'_i=\dfrac{n-i}{n}s_i \end{cases}$$

La dérivée seconde du polynôme de Stieltjes s'écrit : $S_n''(z)=\sum_{i=0}^{i=n-1} i\,n\,s'_{n-1-i}\,t^{i-1}$ *et nous avons :* $\dfrac{S^{(n)}''(z)}{S^{(n)}'(z)}=\sum_{i=1}^{i=n-1}\dfrac{1}{z-z'_i}$*. Si bien que l'équation fractionnaire des racines du polynôme de Van-Vleck peut s'écrire :* $\sum_{l=1}^{l=p}\dfrac{\gamma_l}{t-a_l}+\sum_{i=1}^{i=n-1}\dfrac{1}{t-z'_i}=0 \Leftrightarrow \sum_{l=1}^{l=p}\dfrac{\gamma_l}{t-a_l}+\dfrac{S^{(n)}''(t)}{S^{(n)}'(t)}=0$*. Cela conduit à une équation polynomiale de degré p+n-2, dont il faut exclure les n racines solutions correspondant à un choix de n racines du polynôme de Stieltjes. En effet ces dernières sont bien solutions de l'équation fractionnaire puisque l'on retombe sur le système d'équations fractionnaire des racines du polynôme de Stieljes.*

$$\begin{aligned} & t=z_i \Rightarrow \sum_{l=1}^{l=p}\frac{\gamma_l}{t-a_l}+\frac{S^{(n)}''(t)}{S^{(n)}'(t)}=\sum_{l=1}^{l=p}\frac{\gamma_l}{z_i-a_l}+\frac{S^{(n)}''(z_i)}{S^{(n)}'(z_i)} \\ & Or \quad \frac{S^{(n)}''(z_i)}{S^{(n)}'(z_i)}=\sum_{\substack{l=1\\ l\neq i}}^{l=n}\frac{2}{z_i-z_l} \Rightarrow \sum_{l=1}^{l=p}\frac{\gamma_l}{z_i-a_l}+\sum_{\substack{l=1\\ l\neq i}}^{l=n}\frac{2}{z_i-z_l}=0 \end{aligned}$$

Aussi il convient donc bien de choisir pour racines du polynôme Van-Vleck les p-2 racines qui ne coïncident pas avec n racines z_i . Notons ces racines comme suit $t_{z'_1,\ldots,z'_{n-1},j}$ *et le polynôme de Van-Vleck ainsi* $V(z)=\alpha\,\beta\prod_{j=1}^{j=p-2}\left(z-t_{z'_1,\ldots,z'_{n-1},j}\right)$ *. L'équation fractionnaire de Van-Vleck par une mise en facteur commun conduit à l'équation polynomiale formelle suivante :*

$$S^{(n)}'(t)\prod_{l=1}^{l=p}(t-a_l)\times\sum_{l=1}^{l=p}\frac{\gamma_l}{t-a_l}+S^{(n)}''(t)\times\prod_{l=1}^{l=p}(t-a_l)=\left(n\times\sum_{l=1}^{l=p}\gamma_l+n\,(n-1)\right)\times\prod_{i=1}^{i=n}(t-z_i)\times\prod_{j=1}^{j=p-2}\left(z-t_{z'_1,\ldots,z'_{n-1},j}\right)=\left(n\times\sum_{l=1}^{l=p}\gamma_l+n\,(n-1)\right)\times S^{(n)}(t)\times\prod_{j=1}^{j=p-2}\left(z-t_{z'_1,\ldots,z'_{n-1},j}\right)$$

.

On peut à profit utiliser cette factorisation dans l'équation différentielle générale qui se trouve bien vérifier :

$$\begin{cases} y(z)=S^{(n)}(z) \\ V(z)=\alpha\,\beta\prod_{j=1}^{j=p-2}\left(z-t_{z'_1,\ldots,z'_{n-1},j}\right) \end{cases} \Rightarrow S^{(n)}''(z)+\left(\sum_{l=1}^{l=p}\frac{\gamma_l}{z-a_l}\right)\times S^{(n)}'(z)+\alpha\,\beta\,\frac{\prod_{j=1}^{j=p-2}\left(z-t_{z'_1,\ldots,z'_{n-1},j}\right)}{\prod_{l=1}^{l=p}(z-a_l)}\times S^{(n)}(z)=0$$

$$Comme \quad S^{(n)}''(z)\times\prod_{l=1}^{l=p}(z-a_l)+S^{(n)}'(z)\prod_{l=1}^{l=p}(z-a_l)\times\sum_{l=1}^{l=p}\frac{\gamma_l}{z-a_l}=\left(n\times\sum_{l=1}^{l=p}\gamma_l+n\,(n-1)\right)\times S^{(n)}(z)\times\prod_{j=1}^{j=p-2}\left(z-t_{z'_1,\ldots,z'_{n-1},j}\right)$$

$$\Rightarrow n\times\sum_{l=1}^{l=p}\gamma_l+n\,(n-1)+\alpha\,\beta=n\times(1+\alpha+\beta)+n\,(n-1)+\alpha\,\beta=(n+\alpha)(n+\beta)=0$$

Nota bene : pour information, la construction proposée est un des résultats inclus dans l'article de 1968 de G. M. SHAH, «ON THE ZEROS OF VAN VLECK POLYNOMIALS ».

Construction des développements de Fröbenius autour d'un point singulier z=z₀

Recherchons la solution de l'équation différentielle suivante :

$$y''(z)+P(z)y'(z)+Q(z)y(z)=0$$

autour de la singularité $z=z_0$ constatée sur la fonction P(z) par un développement de la forme :

$$Z(z)=(z-z_0)^{\beta}\sum_{j=0}^{j=+\infty}C_j(z-z_0)^j$$

Dans la nomenclature de Böcher, l'équation prend la forme suivante :

$$Z''(z)+P(z)\,Z'(z)+Q(z)\,Z(z)=0 \qquad (z-z_0)\,P(z)=\sum_{i=0}^{+\infty}A_i(z-z_0)^i \quad (z-z_0)^2Q(z)=\sum_{i=0}^{+\infty}B_i(z-z_0)^i$$

Introduisons l'opérateur différentiel fonctionnel suivant:

$$L\equiv(z-z_0)^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}+(z-z_0)[(z-z_0)P(z)]\frac{\partial}{\partial z}+\left[(z-z_0)^2Q(z)\right]$$

$$\left.\begin{array}{l}\widetilde{P}(z)=(z-z_0)P(z)\\ \widetilde{Q}(z)=(z-z_0)^2Q(z)\end{array}\right\}\Rightarrow L\equiv(z-z_0)^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}+(z-z_0)\widetilde{P}(z)\frac{\partial}{\partial z}+\widetilde{Q}(z)$$

L'équation différentiel peut alors se réécrire sous la forme : $L(Z(z))=0$.

En prenant une solution sous la forme de la série proposée, l'effet de l'opérateur différentiel L est le suivant :

$$Z(z,r)=\sum_{j=0}^{j=+\infty}C_j(z-z_0)^{\beta+j}\Rightarrow L(Z(z,r))=\sum_{j=0}^{j=+\infty}C_jL\left((z-z_0)^{r+j}\right)=\sum_{j=0}^{j=+\infty}C_j(z-z_0)^{r+j}f(z-z_0,r+j)$$

$$\text{avec}\quad\begin{cases}f(z-z_0,r+j)=[r+j]_2+[r+j]_1P(z)+Q(z)\\ [r+j]_2=(r+j)(r+j-1)\qquad [r+j]_1=(r+j)\end{cases}$$

Autour de la singularité $z=z_0$, on développe les fonctions P(x) et Q(x) :

$$f(z-z_0,r+j)=[r+j]_2+[r+j]_1P(z)+Q(z)=\sum_{i=0}^{i=+\infty}f_i(r+j)(z-z_0)^i$$

$$\Rightarrow L(Z(z,r))=\sum_{j=0}^{j=+\infty}C_j(z-z_0)^{r+j}\sum_{i=0}^{i=+\infty}f_i(r+j)(z-z_0)^i=\sum_{j=0}^{j=+\infty}\sum_{i=0}^{i=+\infty}C_jf_i(r+j)(z-z_0)^{r+j+i}$$

En réarrangeant la sommation de telle sorte que l'on rassemble les mêmes puissances de $z-z_0$, il vient :

$$L(Z(z,r))=\sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty}(z-z_0)^{r+\nu}\{C_\nu f_0(r+\nu)+C_{\nu-1}f_1(r+\nu-1)+\ldots+C_0f_\nu(r)\}$$

$$\Leftrightarrow L(Z(z,r))=\sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty}(z-z_0)^{r+\nu}\{C_0f_\nu(r)+C_1f_{\nu-1}(r)+\ldots+C_{\nu-1}f_1(r+\nu-1)+C_\nu f_0(r+\nu)\}$$

Si la série est solution de l'équation différentielle, alors chaque terme de même puissance doit s'annuler ce qui conduit à résoudre un système d'équations linéaires sur les coefficients.

$$\forall \nu \quad C_\nu f_0(r+\nu)+C_{\nu-1}f_1(r+\nu-1)+\ldots+C_0 f_\nu(r)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_0 f_0(r)=0 \\ C_1 f_0(r+1)+C_0 f_1(r)=0 \\ C_2 f_0(r+2)+C_1 f_1(r+1)+C_0 f_2(r)=0 \\ \ldots \\ C_\nu f_0(r+\nu)+C_{\nu-1}f_1(r+\nu-1)+\ldots+C_0 f_\nu(r)=0 \\ \ldots \end{cases}$$

C'est la forme très générale de solution en dehors du cas de l'équation de propagation de Bessel. On peut également comprendre ce système linéaire comme un système de récurrence sur les coefficients, comme nous venons de le faire dans le point précédent sur l'exemple de la fonction d'onde de Bessel. Dans le cas général, les coefficients se déduisent par l'expression suivante :

$$r \quad tq \quad f_0(r)=r^2+(A_0-1)r+B_0=0 \Rightarrow r\in\{r_1,r_2\} \qquad r_1>r_2 \qquad f_j(r)=rA_j+B_j$$

$$C_j(r)=C_0\frac{(-1)^j\Delta_j(r)}{f_0(r+1)f_0(r+2)\ldots f_0(r+j)}=C_0\frac{(-1)^j\Delta_j(r)}{\prod_{i=1}^{j}f_0(r+i)}$$

$$\Delta_j(r)=\begin{bmatrix} f_1(r) & f_0(r+1) & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ f_2(r) & f_1(r+1) & f_0(r+2) & 0 & \ldots & 0 \\ f_3(r) & f_2(r+1) & f_1(r+2) & f_0(r+3) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ f_{j-1}(r) & f_{j-2}(r+1) & f_{j-3}(r+2) & f_{j-4}(r+3) & \ldots & f_0(r+j-1) \\ f_j(r) & f_{j-1}(r+1) & f_{j-2}(r+2) & f_{j-3}(r+3) & \ldots & f_1(r+j-1) \end{bmatrix}$$

Comme le déterminant en question est identique si l'on range ligne et colonne en ordre inversé, alors le déterminant peut aussi s'écrire :

$$C_j(r)=C_0\frac{(-1)^j\Delta_j(r)}{\prod_{i=1}^{j}f_0(r+i)} \qquad \Delta_j(r)=\begin{bmatrix} f_1(r+j-1) & f_2(r+j-2) & f_3(r+j-3) & \ldots & f_{j-1}(r+1) & f_j(r) \\ f_0(r+j-1) & f_1(r+j-2) & f_2(r+j-3) & \ldots & f_{j-2}(r+1) & f_{j-1}(r) \\ 0 & f_0(r+j-2) & f_1(r+j+3) & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & 0 & \ldots & \ldots & f_2(r+1) & f_3(r) \\ \ldots & \ldots & \ldots & f_0(r+2) & f_1(r+1) & f_2(r) \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & f_0(r+1) & f_1(r) \end{bmatrix}$$

$$\Delta_j(r)=\mathbf{F}_j(r) \quad \textit{Notation de E.L.Ince}$$

C'est exactement la notation et l'ordre du déterminant utilisée par E.L.Ince (page 397).

Tous ces coefficients et tous les déterminants doivent se comprendre comme étant des fonctions du paramètre β. Par exemple :

$$\Delta_0(r)=1 \qquad \Delta_1(r)=f_1(r) \quad \Delta_2(r)=\begin{bmatrix} f_1(r) & f_0(r+1) \\ f_2(r) & f_1(r+1) \end{bmatrix} \qquad \Delta_3(r)=\begin{bmatrix} f_1(r) & f_0(r+1) & 0 \\ f_2(r) & f_1(r+1) & f_0(r+2) \\ f_3(r) & f_2(r+1) & f_1(r+2) \end{bmatrix}$$

Si nous reportons les valeurs des racines de l'équation indicielle r_1 et r_2 dans les formules, il vient pour le dénominateur des coefficients :

$$f_0(r)=r^2+(A_0-1)r+B_0=(r-r_1)(r-r_2) \quad Den(r)=\prod_{i=1}^{j} f_0(r+i)=\prod_{i=1}^{j}(r+i-r_1)(r+i-r_2) \quad \textit{Den pour Dénominateur}$$

$$\Rightarrow C_j(r)=C_0\frac{(-1)^j\Delta_j(r)}{\prod_{i=1}^{j}(r+i-r_1)(r+i-r_2)} \quad et \quad Den(r)=\prod_{i=1}^{j}(r+i-r_1)\prod_{i=1}^{j}(r+i-r_2)=\frac{\Gamma(r-r_1+j+1)}{\Gamma(r-r_1+1)}\times\frac{\Gamma(r-r_2+j+1)}{\Gamma(r-r_2+1)}$$

$$r_1>r_2\ ,\ r_1=r_2+k \Rightarrow \begin{cases} Den(r_1)=\dfrac{j!\,\Gamma(k+j+1)}{\Gamma(k+1)} \\ Den(r_2)=\dfrac{j!\,\Gamma(-k+j+1)}{\Gamma(1-k)} \end{cases} \quad ou\ bien \quad Den(r_1)=\prod_{i=1}^{j} i\times\prod_{i=1}^{j}(i+k) \qquad Den(r_2)=\prod_{i=1}^{j} i\times\prod_{i=1}^{j}(i-k)$$

En d'autres termes si les deux racines ne sont pas distantes d'un entier, et k restant un réel alors les dénominateurs sont parfaitement définis. Et l'on peut alors écrire :

$$C_j(r_1)=C_0\frac{(-1)^j\Gamma(k+1)\Delta_j(r_1)}{j!\,\Gamma(k+j+1)} \qquad C_j(r_2)=C_0\frac{(-1)^j\Gamma(1-k)\Delta_j(r_2)}{j!\,\Gamma(j+1-k)}$$

Les cas de figure se compliquent lorsque les deux racines sont distantes d'un entier k >0 car la fonction Gamma présente un pôle, ou bien que les deux racines β_1 et β_2 sont égales et dans ce cas par construction les deux solutions coïncident, il faut donc élaborer une seconde solution indépendante de la première autrement, et pour cela opérer une légère modification de la méthode.

<u>Modification de la méthode de Frobënius pour obtenir les autres solutions dans les cas des racines indicielles multiples ou séparées par un entier</u>

Voir l'ouvrage de E.L.Ince « Ordinary Differential Equation », page 397 et suivantes (point 16.12).

La série introduite ici a une forme similaire mais le paramètre indiciel n'est pas racine de l'équation indicielle. De ce fait le développement devient une fonction dépendante de deux arguments r le paramètre indiciel qui devient formellement continu (discret lorsqu'il est racine de l'équation indicielle) et z un point du plan complexe.

$$Z(z,r) = (z-z_0)^r \sum_{j=0}^{j=+\infty} C_j(r)(z-z_0)^j \quad C_0(r) = C_0 \quad quelconque \quad et \quad f_0(r) \neq 0$$

Toutefois les coefficients de la série sont solutions du système linéaire qui suit :

$$\begin{cases} C_1(r)f_0(r+1) + C_0 f_1(r) = 0 \\ C_2(r)f_0(r+2) + C_1(r)f_1(r+1) + C_0 f_2(r) = 0 \\ \dots \\ C_\nu(r)f_0(r+\nu) + C_{\nu-1}(r)f_1(r+\nu-1) + \dots + C_1(r)f_{\nu-1}(r+1) + C_0 f_\nu(r) = 0 \\ \dots \end{cases}$$

Alors l'opérateur différentiel appliqué sur ce développement en série a une valeur très simple puisque tous les termes de puissance positive s'annulent (équations du système linéaire). Il ne reste que le premier terme :

$$\begin{aligned} &L(Z(z,r)) = \sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty} (z-z_0)^{r+\nu} \{C_\nu(r)f_0(r+\nu) + C_{\nu-1}(r)f_1(r+\nu-1) + \dots + C_1(r)f_{\nu-1}(r) + C_0 f_\nu(r)\} \\ &\forall \nu > 0 \quad C_\nu(r)f_0(r+\nu) + C_{\nu-1}(r)f_1(r+\nu-1) + \dots + C_0 f_\nu(r) = 0 \\ &\Rightarrow L(Z(z,r)) = C_0(z-z_0)^r f_0(r) \end{aligned}$$

Ce résultat n'a l'air de rien (E.L.Ince, « Ordinary Differential Equation, page 397), mais il est en fait très utile pour la construction des secondes solutions. On retrouve également la construction des premières solutions si ß est racine de l'équation indicielle : $f_0(r)$ =0.

Cas des racines entières distinctes ou de racines réelles distinctes dont l'écart k est un entier

Donc lorsque k est un entier le terme $\Gamma(j+1-k)$ *présente un pôle, on peut formellement séparer les coefficients du développement comme suit :*

$$Si \quad j<k \quad \prod_{i=1}^{j}(i-k)=\frac{\Gamma(j+1-k)}{\Gamma(1-k)}=(-1)^j\prod_{i=1}^{j}(k-i)=(-1)^j\frac{\Gamma(k-j)}{\Gamma(k)}=(-1)^j\frac{(k-j-1)!}{(k-1)!}$$

$$Si \quad j\geq k \quad \prod_{i=1}^{k-1}(i-k)(k-k)\prod_{i=k+1}^{j}(i-k)=0$$

$$\begin{cases} C_j(r_2)=C_0\dfrac{(-1)^j\Gamma(1-k)}{j!\,\Gamma(j+1-k)}\Delta_j(r_2)=C_0\dfrac{(k-j-1)!}{j!(k-1)!}\Delta_j(r_2) & j<k \\ C_j(r_2)=C_0\dfrac{(-1)^j}{j!}\dfrac{1}{\prod_{i=1}^{k-1}(i-k)}\left[\dfrac{\Delta_j(r_2)}{r-r_2}\right]_{r\to r_2}\dfrac{1}{\prod_{i=k+1}^{j}(i-k)}=C_0\dfrac{(-1)^{j-k+1}}{j!(k-1)!(j-k)!}\left[\dfrac{\Delta_j(r_2)}{r-r_2}\right]_{r\to r_2} & j\geq k \end{cases}$$

On a donc isolé le terme de divergence des coefficients d'indice supérieur ou égal à k. En reprenant mot pour mot le raisonnement de Moon et Spencer, on peut supposer que le terme $\left[\dfrac{\Delta_j(r_2)}{r-r_2}\right]_{r\to r_2}$ *soit à tout hasard fini, si le déterminant s'annule sur les deux racines indicielles, mais comme il ne faut pas trop compter là-dessus, on préfère introduire pour ce groupe de coefficients la grandeur suivante* $D_j(r)$ *qui neutralise l'annulation :*

$$Si \quad j<k \quad \prod_{i=1}^{j}(i-k)=\frac{\Gamma(j+1-k)}{\Gamma(1-k)}=(-1)^j\prod_{i=1}^{j}(k-i)=(-1)^j\frac{(k-j-1)!}{(k-1)!}$$

$$D_j(r)=(r-r_2)C_j(r) \qquad pour \quad j\geq k \qquad D_j(r)=\frac{(-1)^j C_0\Delta_j(r)}{\prod_{i=1}^{j}(r-r_2+i)\prod_{i=1}^{k-1}(r-r_1+i)\prod_{i=k+1}^{j}(r-r_1+i)}$$

$$Pour \quad j>k \quad D_j(r_2)=Lim_{r\to r_2}(r-r_2)C_j(r)=\frac{(-1)^j C_0\Delta_j(r_2)}{j!\prod_{i=1}^{k-1}(r_2-r_1+i)\prod_{i=k+1}^{j}(r_2-r_1+i)}=\frac{(-1)^j C_0\Delta_j(r_2)}{j!\prod_{i=1}^{k-1}(i-k)\prod_{i=k+1}^{j}(i-k)}$$

$$\Rightarrow D_j(r_2)=\frac{(-1)^{j-k+1}C_0\Delta_j(r_2)}{j!(k-1)!(j-k)!} \quad j>k$$

$$Pour \quad j=k \quad D_j(r_2)=Lim_{r\to r_2}(r-r_2)C_j(r)=\frac{(-1)^k C_0\Delta_k(r_2)}{k!\prod_{i=1}^{k-1}(r_2-r_1+i)}=\frac{(-1)^k C_0\Delta_k(r_2)}{k!\prod_{i=1}^{k-1}(i-k)}=-C_0\frac{\Delta_k(r_2)}{k!(k-1)!}$$

$$\Rightarrow D_k(r_2)=-C_0\frac{\Delta_k(r_2)}{k!(k-1)!}$$

On complète la définition des coefficients $D_j(r)$ *pour les indices inférieurs à k. Par construction comme les coefficients* $C_j(r)$*ne présentent aucune singularité, les coefficients* $D_j(r_2)$ *sont donc tous nuls :*

$$D_j(r)=(r-r_2)C_j(r)\Rightarrow D_j(r_2)=Lim_{r\to r_2}(r-r_2)C_j(r)=0 \quad pour \quad j<k$$

Ces coefficients servent dans la construction d'une seconde solution, dans le cas des racines entières distinctes, sous la forme :

$$\Rightarrow \widetilde{Z}_2(r,z)=(r-r_2)\left\{C_0(z-z_0)^r+\sum_{j=1}^{j=k-1}C_j(r)(z-z_0)^{r+j}\right\}+\sum_{j=k}^{j=+\infty}D_j(r)(z-z_0)^{r+j}$$

Selon la théorie de Fröbenius, on parvient à construire une seconde solution indépendante de la première, par un processus limite de dérivation sur la seconde racine indicielle, soit :

$$\Rightarrow Z_2(z)=Lim_{r\to r_2}\frac{\partial \widetilde{Z}_2(r,z)}{\partial r}\quad seconde\quad solution$$

Par ailleurs dans le cas de racines indicielles séparées par un nombre entier, il existe une relation entre les déterminants utilisés pour calculer les coefficients $C_j(r)$ et $D_j(r)$. On peut tout d'abord montrer que le rapport des coefficients $D_j(r)$ tend à la limite vers une expression définie. Ici on prend la précaution du passage à la limite car les coefficients $C_j(r)$ sont censés diverger pour $r= r_2$:

$$Lim_{r\to r_2}\frac{C_{j+k}(r)}{C_k(r)}=\frac{D_{j+k}(r_2)}{D_k(r_2)}=\frac{C_j(r_1)}{C_0}=(-1)^j\,\frac{k!\Delta_j(r_1)}{j!(j+k)!}$$

Pour établir cette relation il suffit de considérer le système d'équations linéaires permettant d'établir les coefficients $D_{j+k}(r)$ par passage à la limite. Commençons par les coefficients $C_{j+k}(r)$ à partir du coefficient $C_k(r)$ et appliquons la définition des coefficients $D_{j+k}(r)$, il vient :

$$Lim_{r\to r_2}(r-r_2)\times\begin{cases}C_{k+1}(r)f_0(r+k+1)+C_k(r)f_1(r+k)+\ldots+C_1(r)f_k(r+1)+C_0f_{k+1}(r)=0\\ \ldots\\ C_{k+j}(r)f_0(r+k+j)+C_{k+j-1}(r)f_1(r+k+j-1)+\ldots+C_1(r)f_{k+j-1}(r)+C_0f_{k+j}(r)=0\end{cases}$$

$$Si\quad r=r_2\quad r_2+k=r_1\qquad et\qquad \forall j\quad Lim_{r\to r_2}(r-r_2)C_j(r)=D_j(r)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}D_{k+1}(r_2)f_0(r_1+1)+D_k(r_2)f_1(r_1)+D_{k-1}(r_2)f_2(r_1-1)+\ldots+D_1(r_2)f_k(r_1-1)+C_0(r_2-r_2)f_{k+1}(r_1-k)=0\\ \ldots\\ D_{k+j}(r_2)f_0(r_1+j)+D_{k+j-1}(r_2)f_1(r_1+j-1)+\ldots+D_1(r_2)f_{k+j-1}(r_1-k+1)+C_0(r_2-r_2)f_{k+j}(r_1-k)=0\end{cases}$$

$$Comme\quad D_1(r_2)=D_2(r_2)=\ldots=D_{k-1}(r_2)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}D_{k+1}(r_2)f_0(r_1+1)+D_k(r_2)f_1(r_1)=0\\ D_{k+2}(r_2)f_0(r_1+2)+D_{k+1}(r_2)f_1(r_1+1)+D_k(r_2)f_2(r_1)=0\\ \ldots\\ D_{k+j}(r_2)f_0(r_1+j)+D_{k+j-1}(r_2)f_1(r_1+j-1)+\ldots+D_{k+1}(r_2)f_{j-1}(r_2)+D_k(r_2)f_j(r_1)=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{D_{k+1}(r_2)}{D_k(r_2)}f_0(r_1+1)+f_1(r_1)=0\\ \dfrac{D_{k+2}(r_2)}{D_k(r_2)}f_0(r_1+2)+\dfrac{D_{k+1}(r_2)}{D_k(r_2)}f_1(r_1+1)+f_2(r_1)=0\\ \ldots\\ \dfrac{D_{k+j}(r_2)}{D_k(r_2)}f_0(r_1+j)+\dfrac{D_{k+j-1}(r_2)}{D_k(r_2)}f_1(r_1+j-1)+\ldots+\dfrac{D_{k+1}(r_2)}{D_k(r_2)}f_{j-1}(r_1-1)+f_j(r_1)=0\end{cases}$$

Ce dernier jeu d'équation linéaire est exactement celui formé par les rapports $C_j(r_1)/C_0$, à savoir :

$$\begin{cases} \frac{C_1(r_1)}{C_0} f_0(r_1+1) + f_1(r_1) = 0 \\ \frac{C_2(r_1)}{C_0} f_0(r_1+2) + \frac{C_1(r_1)}{C_0} f_1(r_1+1) + f_2(r_1) = 0 \\ \ldots \\ \frac{C_j(r_1)}{C_0} f_0(r_1+j) + \frac{C_{j-1}(r_1)}{C_0} f_1(r_1+j-1) + \ldots + \frac{C_1(r_1)}{C_0} f_{j-1}(r_1+1) + f_j(r_1) = 0 \end{cases}$$

Autrement dit les rapports étant calculés par le même système de récurrence (ou système linéaire), ayant le même point de départ, ils sont égaux. Soit $\frac{C_j(r_1)}{C_0} = \frac{D_{k+j}(r_2)}{D_k(r_2)} \quad \forall j > 0$.

Ici je reprend le raisonnement de l'ouvrage de P.Moon et E.Spencer « Field Theory Handbook » à ceci près que pour ôter toute confusion, il faut utiliser les nouveaux coefficients $D_j(\beta)$ en lieu et place des anciens coefficients $C_j(\beta)$, ce qui n'est pas indiqué dans le livre et cela rend impropre quelques formules reportées pour la démonstration même si le résultat final est juste.

Et par ailleurs la relation sur les $D_j(r)$ peut également être établie comme suit :

$$D_j(r_2) = \frac{(-1)^{j-k+1} C_0 \Delta_j(r_2)}{j!(k-1)!(j-k)!} \quad D_k(r_2) = -\frac{C_0 \Delta_k(r_2)}{k!(k-1)!} \Rightarrow D_{j+k}(\beta_2) = \frac{(-1)^{j+1} C_0 \Delta_{j+k}(r_2)}{j!(k-1)!(j+k)!}$$

$$\Rightarrow \frac{D_{j+k}(r_2)}{D_k(r_2)} = \frac{\frac{(-1)^{j+1}\Delta_{j+k}(r_2)}{j!(j+k)!}}{-\frac{C_0\Delta_k(r_2)}{k!}} = (-1)^j \frac{k!\Delta_{j+k}(r_2)}{j!(j+k)!\Delta_k(r_2)} \Rightarrow Lim_{r\to r_2} \frac{C_{j+k}(r)}{C_k(r)} = \frac{D_{j+k}(r_2)}{D_k(r_2)} = (-1)^j \frac{k!\Delta_{j+k}(r_2)}{j!(j+k)!\Delta_k(r_2)}$$

Les deux expressions comparées, il vient :

$$(-1)^j \frac{k!\Delta_j(r_1)}{j!(j+k)!} = (-1)^j \frac{k!\Delta_{j+k}(r_2)}{j!(j+k)!\Delta_k(r_2)} \Rightarrow \Delta_j(\beta_1) = \frac{\Delta_{j+k}(r_2)}{\Delta_k(r_2)}$$

Soit la formule importante sur les déterminants :

$$\Delta_{j+k}(r_2) = \Delta_k(r_2)\Delta_j(r_1)$$

La dérivation de tous les coefficients du développement lorsqu'ils ne présentent pas d'annulation du dénominateur est la suivante :

$$Comme \quad C_j(r) = C_0 \frac{(-1)^j \Delta_j(r)}{\prod_{i=1}^{j}(r+i-r_1)(r+i-r_2)}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial C_j(r)}{\partial r} = \frac{(-1)^j C_0}{\prod_{i=1}^{j}(r-r_1+i)\prod_{i=1}^{j}(r-r_2+i)} \left\{ \frac{\partial \Delta_j(r)}{\partial r} - \Delta_j(r)\left[\sum_{l=1}^{j}\frac{1}{r-r_1+l} + \sum_{l=1}^{j}\frac{1}{r-r_2+l}\right]\right\}$$

$$Lim_{r\to r_1} \frac{\partial C_j(r)}{\partial r} = \frac{(-1)^j C_0 \Gamma(k+1)}{j!\Gamma(k+j+1)} \left\{ \frac{\partial \Delta_j(r_1)}{\partial r} - \Delta_j(r_1)\left[\sum_{l=1}^{j}\frac{1}{l} + \sum_{l=1}^{j}\frac{1}{k+l}\right]\right\}$$

$$Pour \quad j < k \qquad Lim_{r\to r_2} \frac{\partial C_j(r)}{\partial r} = \frac{C_0 \Gamma(k)}{j!\Gamma(k-j)} \left\{ \frac{\partial \Delta_j(r_2)}{\partial r} - \Delta_j(r_2)\left[\sum_{l=1}^{j}\frac{1}{l} + \sum_{l=1}^{j}\frac{1}{l-k}\right]\right\}$$

Pour les coefficients supérieurs ou égaux à k, on dérive les coefficients D introduits précédemment, comme suit :

$$\frac{\partial D_j(r)}{\partial r}=\frac{(-1)^j C_0}{\prod_{i=1}^{j}(r-r_2+i)\prod_{i=1}^{k-1}(r-r_1+i)\prod_{i=k+1}^{j}(r-r_1+i)}\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial \Delta_j(r)}{\partial r}-\\ -\Delta_j(r)\left[\sum_{l=1}^{j}\frac{1}{r-r_2+l}+\sum_{l=1}^{k-1}\frac{1}{r-r_1+l}+\sum_{l=k+1}^{j}\frac{1}{r-r_1+l}\right]\end{array}\right\}$$

$$Lim_{r\to r_2}\frac{\partial D_j(r)}{\partial r}=C_0\frac{(-1)^{j-k+1}}{j!(k-1)!(j-k)!}\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial \Delta_j(r_2)}{\partial r}-\\ -\Delta_j(r_2)\left[\sum_{l=1}^{j}\frac{1}{l}+\sum_{l=1}^{k-1}\frac{1}{l-k}+\sum_{l=k+1}^{j}\frac{1}{l-k}\right]\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow Lim_{r\to r_2}\frac{\partial D_j(r)}{\partial \beta}=C_0\frac{(-1)^{j-k+1}}{j!(k-1)!(j-k)!}\left\{\frac{\partial \Delta_j(r_2)}{\partial r}-\Delta_j(r_2)\left[\sum_{l=1}^{j}\frac{1}{l}-\sum_{l=1}^{k-1}\frac{1}{l}+\sum_{l=1}^{j-k}\frac{1}{l}\right]\right\}$$

Nous avons vu comment dans un processus limite et dans le cas d'un écart entier entre les deux racines de l'équation indicielle, construire une seconde solution

Nous donc maintenant considérer les trois cas de figures.

Cas des deux racines réelles distinctes d'écart k non entier

Les deux solutions de première et deuxième espèces se déduisent des coefficients calculés auparavant qui n'ont aucune singularité au dénominateur :

$$k = r_1 - r_2 \qquad C_j(r_1) = C_0 \frac{(-1)^j \Gamma(k+1)\Delta_j(r_1)}{j!\,\Gamma(k+j+1)} \qquad C_j(r_2) = C_0 \frac{(-1)^j \Gamma(1-k)\Delta_j(r_2)}{j!\,\Gamma(j+1-k)}$$

$$\Delta_j(r) = \begin{bmatrix} f_1(r) & f_0(r+1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ f_2(r) & f_1(r+1) & f_0(r+2) & 0 & \dots & 0 \\ f_3(r) & f_2(r+1) & f_1(r+2) & f_0(r+3) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ f_{j-1}(r) & f_{j-2}(r+1) & f_{j-3}(r+2) & f_{j-4}(r+3) & \dots & f_0(r+j-1) \\ f_j(r) & f_{j-1}(r+1) & f_{j-2}(r+2) & f_{j-3}(r+3) & \dots & f_1(r+j-1) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Z_1(z) = (z-z_0)^{r_1}\Gamma(k+1)C_0 \sum_{j=0}^{j=+\infty} \frac{(-1)^j \Delta_j(r_1)}{j!\,\Gamma(k+j+1)}(z-z_0)^j \\ Z_2(z) = (z-z_0)^{r_1}\Gamma(1-k)C_0 \sum_{j=0}^{j=+\infty} \frac{(-1)^j \Delta_j(r_2)}{j!\,\Gamma(j+1-k)}(z-z_0)^j \end{cases}$$

Cas des deux racines identiques (réelles ou entières)

La solution de première espèce est identique :

$$k = r_1 - r_2 = 0 \quad r_1 = r_2 = r_0 \quad C_j(r_0) = C_0 \frac{(-1)^j \Delta_j(r_0)}{(j!)^2}$$

$$\Delta_j(\beta) = \begin{bmatrix} f_1(r) & f_0(r+1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ f_2(r) & f_1(r+1) & f_0(r+2) & 0 & \dots & 0 \\ f_3(r) & f_2(r+1) & f_1(r+2) & f_0(r+3) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ f_{j-1}(r) & f_{j-2}(r+1) & f_{j-3}(r+2) & f_{j-4}(r+3) & \dots & f_0(r+j-1) \\ f_j(r) & f_{j-1}(r+1) & f_{j-2}(r+2) & f_{j-3}(r+3) & \dots & f_1(r+j-1) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow Z_1(z) = (z-z_0)^{r_0} C_0 \sum_{j=0}^{j=+\infty} \frac{(-1)^j \Delta_j(r_0)}{(j!)^2}(z-z_0)^j$$

Pour la seconde solution on introduit une fonction de la forme suivante, en considérant la racine β_0 comme une variable , soit :

$$\widetilde{Z}_2(z) = C_0(z-z_0)^{r_0} + \sum_{j=1}^{j=+\infty} C_j(r_0)(z-z_0)^{r_0+j} \Rightarrow \widetilde{Z}_2(r,z) = C_0(z-z_0)^r + \sum_{j=1}^{j=+\infty} C_j(r_0)(z-z_0)^{r+j}$$

En introduisant l'opérateur différentiel fonctionnel L et en passant à la limite sur la dérivée du paramètre de racine indicielle, il vient :

$$L \equiv (z-z_0)^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + (z-z_0)[(z-z_0)P(z)]\frac{\partial}{\partial z} + [(z-z_0)^2 Q(z)] = 0$$
$$Si \quad r \neq r_0 \Rightarrow f_0(r) = (r-r_0)^2$$
$$\Rightarrow L(\widetilde{Z}_2(r,z)) = C_0(r-r_0)^2(z-z_0)^r = C_0(r-r_0)^2 e^{r\,Log(z-z_0)}$$
$$L\left(\frac{\partial \widetilde{Z}_2(r,z)}{\partial r}\right) = L\left(\frac{\partial}{\partial r} C_0(r-r_0)^2(z-z_0)^\beta\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(C_0(r-r_0)^2 e^{r\,Log(z-z_0)}\right)$$
$$\Rightarrow L\left(\frac{\partial \widetilde{Z}_2(r,z)}{\partial r}\right) = 2C_0(r-r_0)e^{r\,Log(z-z_0)} + C_0(r-r_0)^2 Log(z-z_0)e^{r\,Log(z-z_0)}$$
$$\Rightarrow L\left(\frac{\partial \widetilde{Z}_2(r,z)}{\partial r}\right) = C_0(r-r_0)(z-z_0)^r\{2+(r-r_0)Log(z-z_0)\} \Rightarrow Lim_{\beta\to\beta_0} L\left(\frac{\partial \widetilde{Z}_2(r,z)}{\partial r}\right) = 0$$

De plus : $\frac{\partial}{\partial r}\widetilde{Z}_2(r,z)$ *n'est pas une solution de l'équation différentielle*

Mais en dérivant par rapport à la variable racine indicielle et en passant à la limite, la fonction obtenue satisfait à l'équation différentielle, il est donc théoriquement possible de construire une seconde solution, comme suit :

$$Z_2(z) = Lim_{r\to r_0} \frac{\partial}{\partial r}\widetilde{Z}_2(r,z) \quad \text{constitue une seconde solution indépendante de } Z_1(z)$$

Il vient :

$$Z_2(r,z) = C_0(z-z_0)^r + \sum_{j=1}^{j=+\infty} C_j(r)(z-z_0)^{r+j}$$
$$Z_2(r,z) = C_0 e^{r\,Log(z-z_0)} + e^{r\,Log(z-z_0)}\sum_{j=1}^{j=+\infty} C_j(r)(z-z_0)^j$$
$$\frac{\partial}{\partial r}Z_2(r,z) = C_0 Log(z-z_0)e^{r\,Log(z-z_0)} + Log(z-z_0)e^{r\,Log(z-z_0)}\sum_{j=1}^{j=+\infty} C_j(r)(z-z_0)^j + \sum_{j=1}^{j=+\infty}\frac{\partial C_j(r)}{\partial r}(z-z_0)^{r+j}$$
$$= C_0 Log(z-z_0)(z-z_0)^r + Log(z-z_0)\sum_{j=1}^{j=+\infty} C_j(r)(z-z_0)^{r+j} + \sum_{j=1}^{j=+\infty}\frac{\partial C_j(r)}{\partial r}(z-z_0)^{r+j}$$
$$C_j(r_0) = C_0\frac{(-1)^j \Delta_j(r_0)}{(j!)^2} \Rightarrow \frac{\partial C_j(r)}{\partial r} = C_0\frac{(-1)^j}{(j!)^2}\left[\frac{\partial \Delta_j(r_0)}{\partial r} - 2\Delta_j(r_0)\left\{\sum_{l=1}^{l=j}\frac{1}{l}\right\}\right]$$
$$\Rightarrow Lim_{r\to r_0}\frac{\partial}{\partial r}Z_2(r,z) = \left[\begin{array}{l} C_0 Log(z-z_0)(z-z_0)^{r_0} + C_0 Log(z-z_0)\sum_{j=1}^{j=+\infty}\frac{(-1)^j\Delta_j(r_0)}{(j!)^2}(z-z_0)^{r_0+j} + \\ + C_0\sum_{j=1}^{j=+\infty}\frac{(-1)^j(z-z_0)^{r_0+j}}{(j!)^2}\left\{\frac{\partial \Delta_j(r_0)}{\partial r} - 2\Delta_j(r_0)\sum_{l=1}^{l=j}\frac{1}{j}\right\}\end{array}\right]$$
$$Comme \quad Z_1(r_0,z) = C_0\sum_{j=0}^{j=+\infty}\frac{(-1)^j\Delta_j(r_0)}{(j!)^2}(z-z_0)^{r_0+j} = C_0 + \sum_{j=1}^{j=+\infty}\frac{(-1)^j\Delta_j(r_0)}{(j!)^2}(z-z_0)^{r_0+j}$$
$$\Rightarrow Lim_{r\to r_0}\frac{\partial}{\partial r}Z_2(r,z) = Z_1(r_0,z)Log(z-z_0) + C_0\sum_{j=1}^{j=+\infty}\frac{(-1)^j(z-z_0)^{r_0+j}}{(j!)^2}\left\{\frac{\partial \Delta_j(r_0)}{\partial r} - 2\Delta_j(r_0)\sum_{l=1}^{l=j}\frac{1}{j}\right\}$$

Soit pour seconde solution

$$Z_2(r,z)=Lim_{r\to r_0}\frac{\partial}{\partial r}Z_2(r,z)=Z_1(r_0,z)Log(z-z_0)+C_0\sum_{j=1}^{j=+\infty}\frac{(-1)^j(z-z_0)^{r_0+j}}{(j!)^2}\left\{\frac{\partial\Delta_j(r_0)}{\partial r}-2\Delta_j(r_0)\sum_{l=1}^{l=j}\frac{1}{j}\right\}$$

Il peut arriver que cette construction ne coïncide pas avec des secondes solutions usuelle dans la littérature scientifique. Dans ce cas, il suffit de rajouter un terme proportionnel à la première solution pour faire coïncider les deux solutions, comme suit :

$$Z_2(r,z)=AZ_1(r_0,z)+Z_1(r_0,z)Log(z-z_0)+C_0\sum_{j=1}^{j=+\infty}\frac{(-1)^j(z-z_0)^{r_0+j}}{(j!)^2}\left\{\frac{\partial\Delta_j(r_0)}{\partial r}-2\Delta_j(r_0)\sum_{l=1}^{l=j}\frac{1}{j}\right\}$$

La seconde solution se calcule donc sous la forme suivante à partir de la première solution avec un terme additionnel, avec éventuellement adjonction d'un terme proportionnel à la première solution pour recouper les définitions usuelles des secondes solutions :

$$Z_2(z)=Log(z-z_0)Z_1(z)+C_0(z-z_0)^{r_0}\sum_{j=1}^{j=+\infty}\frac{(-1)^j(z-z_0)^j}{(j!)^2}\left\{\left[\frac{\partial\Delta_j(r_0)}{\partial r}\right]_{r\to r_0}-2\Delta_j(r_0)\sum_{l=1}^{l=j}\frac{1}{l}\right\}$$

<u>Cas des deux racines entières distinctes ou de deux racines réelles présentant un écart entier</u>

La solution de première espèce est identique :

$$k=r_1-r_2\neq 0\quad k\in\mathbf{N}\quad r_1\neq r_2=C_j(r_1)=C_0\frac{(-1)^j k!\,\Delta_j(r_1)}{j!\,(k+j)!}$$

$$\Delta_j(r)=\begin{bmatrix} f_1(r) & f_0(r+1) & 0 & 0 & \dots & 0\\ f_2(r) & f_1(r+1) & f_0(r+2) & 0 & \dots & 0\\ f_3(r) & f_2(r+1) & f_1(r+2) & f_0(r+3) & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0\\ f_{j-1}(r) & f_{j-2}(r+1) & f_{j-3}(r+2) & f_{j-4}(r+3) & \dots & f_0(r+j-1)\\ f_j(r) & f_{j-1}(r+1) & f_{j-2}(r+2) & f_{j-3}(r+3) & \dots & f_1(r+j-1)\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow Z_1(z)=(z-z_0)^{r_1}k!\,C_0\sum_{j=0}^{j=+\infty}\frac{(-1)^j\Delta_j(r_1)}{j!\,(k+j)!}(z-z_0)^j$$

Comme il est indiqué dans le processus de construction de Fröbenius, on introduit une fonction de la forme :

$$\Rightarrow \widetilde{Z}_2(r,z)=(r-r_2)\left\{C_0(z-z_0)^r+\sum_{j=1}^{j=k-1}C_j(r)(z-z_0)^{\beta+j}\right\}+\sum_{j=k}^{j=+\infty}D_j(r)(z-z_0)^{r+j}$$

$$Comme\quad D_j(r)=(r-r_2)C_j(r)\qquad pour\quad j\geq k\Rightarrow \widetilde{Z}_2(r,z)=\sum_{j=0}^{j=+\infty}(r-r_2)C_j(r)(z-z_0)^{r+j}$$

où les coefficients $C_j(\beta)$ sont solutions des équations linaires :

$$\begin{cases} C_1(r)f_0(r+1)+C_0f_1(r)=0 \qquad C_2(r)f_0(r+2)+C_1(r)f_1(r+1)+C_0f_2(r)=0\\ \dots\\ C_{k-1}(r)f_0(r+k-1)+C_{k-2}(r)f_1(r+k-2)+\dots+C_1(r)f_{k-2}(r+1)+C_0f_{k-1}(r)=0\\ \dots\\ C_\nu(r)f_0(r+\nu)+C_{\nu-1}(r)f_1(r+\nu-1)+\dots+C_1(r)f_{\nu-1}(r+1)+C_0f_\nu(r)=0\quad \nu\geq k\\ \dots\end{cases}$$

En conséquence l'opérateur différentiel fonctionnel L a une valeur différente de celle établit en début d'exposé sur la théorie de Fröbenius. Cela est dû à la construction de la série utilisant les coefficients $D_j(r)$ au lieu des coefficients $C_j(r)$ à partir de l'indice k. Toutefois il reste toujours uniquement le premier terme de la série, non nul :

$$L\left(\widetilde{Z}_2(z,r)\right)=(r-r_2)\left\{C_0(z-z_0)^r+\sum_{j=1}^{j=k-1}C_j(r)(z-z_0)^{r+j}\right\}+\sum_{j=k}^{j=+\infty}D_j(r)(z-z_0)^{r+j}$$

$$L\left(\widetilde{Z}_2(z,r)\right)=\left[\begin{array}{l}(r-r_2)\sum_{\nu=0}^{\nu=k-1}(z-z_0)^{r+\nu}\{C_\nu(r)f_0(r+\nu)+C_{\nu-1}(r)f_1(r+\nu-1)+\ldots+C_0f_\nu(r)\}+\\+\sum_{\nu=k}^{\nu=\infty}(r-r_2)(z-z_0)^{r+\nu}\{C_\nu(r)f_0(r+\nu)+C_{\nu-1}(r)f_1(r+\nu-1)+\ldots+C_0f_\nu(r)\}\end{array}\right]$$

$$\Rightarrow L(Z(z,r))=C_0(z-z_0)^r(r-r_2)f_0(r)=C_0(r-r_2)^2(r-r_1)(z-z_0)^r$$

Si maintenant on dérive la fonction par rapport au paramètre indiciel, et que l'on passe à la limite :

$$L\equiv(z-z_0)^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}+(z-z_0)[(z-z_0)P(z)]\frac{\partial}{\partial z}+\left[(z-z_0)^2Q(z)\right]=0$$

$$\Rightarrow L\left(\widetilde{Z}_2(r,z)\right)=C_0(r-r_2)^2(r-r_1)(z-z_0)^r=C_0(r-r_2)^2(r-r_1)e^{r\,Log(z-z_0)}$$

$$L\left(\frac{\partial\widetilde{Z}_2(r,z)}{\partial r}\right)=L\left(\frac{\partial}{\partial r}C_0(r-r_2)^2(r-r_1)e^{r\,Log(z-z_0)}\right)$$

$$\Rightarrow L\left(\frac{\partial\widetilde{Z}_2(r,z)}{\partial r}\right)=2C_0(r-r_2)(r-r_1)e^{r\,Log(z-z_0)}+C_0(r-r_2)^2e^{\beta\,Log(z-z_0)}+C_0(r-r_2)^2(r-r_1)Log(z-z_0)e^{r\,Log(z-z_0)}$$

$$\Rightarrow L\left(\frac{\partial\widetilde{Z}_2(r,z)}{\partial r}\right)=(z-z_0)^r(r-r_2)\{2C_0(r-r_1)+C_0(r-r_2)+C_0(r-r_2)(r-r_1)Log(z-z_0)\}$$

$$\Rightarrow Lim_{r\to r_2}L\left(\frac{\partial\widetilde{Z}_2(r,z)}{\partial r}\right)=0$$

Comme dans le cas précédent, la dérivée par rapport au paramètre de racine indicielle, satisfait à l'équation différentielle. Il est donc théoriquement possible de construire une seconde solution, comme suit :

$$Z_2(z)=Lim_{r\to r_0}\frac{\partial}{\partial r}\widetilde{Z}_2(r,z)\quad \textit{constitue une seconde solution indépendante de } Z_1(z)$$

Plus précisément la dérivée de la fonction introduite s'écrit :

$$\frac{\partial \widetilde{Z}_2(r,z)}{\partial r}=\begin{Bmatrix}\sum_{j=0}^{j=k-1} C_j(r)(z-z_0)^{r+j}+(r-r_2)\begin{Bmatrix}C_0(z-z_0)^r Log(z-z_0)+\\ +\sum_{j=1}^{j=k-1}\left[\frac{\partial C_j(r)}{\partial r}+C_j(r)Log(z-z_0)\right](z-z_0)^{r+j}\end{Bmatrix}\\ +\sum_{j=k}^{j=+\infty}(z-z_0)^{r+j}\left\{\frac{\partial D_j(r)}{\partial r}+D_j(r)Log(z-z_0)\right\}\end{Bmatrix}$$

$$Or \quad Lim_{r\to r_2}(r-r_2)\begin{Bmatrix}C_0(z-z_0)^r Log(z-z_0)+\\ +\sum_{j=1}^{j=k-1}\left[\frac{\partial C_j(r)}{\partial r}+C_j(r)Log(z-z_0)\right](z-z_0)^{r+j}\end{Bmatrix}=0$$

$$\Rightarrow Lim_{r\to r_2}\frac{\partial \widetilde{Z}_2(r,z)}{\partial r}=\sum_{j=0}^{j=k-1}C_j(r_2)(z-z_0)^{r_2+j}+\sum_{j=k}^{j=+\infty}(z-z_0)^{r+j}\left\{\frac{\partial D_j(r)}{\partial r}+D_j(r_2)Log(z-z_0)\right\}$$

$$Or\ D_j(r_2)=C_0\frac{(-1)^{j-k+1}}{j!(k-1)!(j-k)!}\Delta_j(r_2)\quad et\quad \frac{\partial D_j(r)}{\partial r}=C_0\frac{(-1)^{j-k+1}}{j!(k-1)!(j-k)!}\left\{\frac{\partial \Delta_j(r_2)}{\partial r}-\Delta_j(r_2)\left[\sum_{l=1}^{j}\frac{1}{l}-\sum_{l=1}^{k-1}\frac{1}{l}+\sum_{l=1}^{j-k}\frac{1}{l}\right]\right\}$$

$$C_j(r_2)=C_0\frac{(k-j-1)!}{j!(k-1)!}\Delta_j(r_2)\qquad j<k$$

$$\Rightarrow Z_2(z)=\begin{Bmatrix}\frac{C_0(z-z_0)^{r_2}}{(k-1)!}\sum_{j=0}^{j=k-1}\frac{(k-j-1)!}{j!}\Delta_j(r_2)(z-z_0)^j+\\ +\frac{C_0(z-z_0)^{r_2}}{(k-1)!}Log(z-z_0)\sum_{j=k}^{j=+\infty}\frac{(-1)^{j-k+1}(z-z_0)^j}{j!(j-k)!}\Delta_j(r_2)\\ +\frac{C_0(z-z_0)^{r_2}}{(k-1)!}\sum_{j=k}^{j=+\infty}\frac{(-1)^{j-k+1}(z-z_0)^j}{j!(j-k)!}\left\{\frac{\partial \Delta_j(r_2)}{\partial r}-\Delta_j(r_2)\left[\sum_{l=1}^{j}\frac{1}{l}-\sum_{l=1}^{k-1}\frac{1}{l}+\sum_{l=1}^{j-k}\frac{1}{l}\right]\right\}\end{Bmatrix}$$

Toujours mot pour mot de l'ouvrage de Spencer, la deuxième sommation peut s'écrire par translation de l'indice j, partant de 0. Pour cela on utilise la relation suivante sur les déterminants :

$$\Delta_{j+k}(r_2)=\Delta_k(r_2)\Delta_j(r_1)$$

Il vient donc :

$$\Rightarrow Z_2(z)=\begin{Bmatrix}\frac{C_0(z-z_0)^{r_2}}{(k-1)!}\sum_{j=0}^{j=k-1}\frac{(k-j-1)!}{j!}\Delta_j(r_2)(z-z_0)^j+\\ -Log(z-z_0)\Delta_k(r_2)\frac{(z-z_0)^{r_1}}{k!(k-1)!}k!C_0\sum_{j=0}^{j=+\infty}\frac{(-1)^j(z-z_0)^j}{j!(j+k)!}\Delta_j(r_1)\\ +\frac{C_0(z-z_0)^{r_2}}{(k-1)!}\sum_{j=k}^{j=+\infty}\frac{(-1)^{j-k+1}(z-z_0)^j}{j!(j-k)!}\left\{\frac{\partial \Delta_j(r_2)}{\partial r}-\Delta_j(r_2)\left[\sum_{l=1}^{j}\frac{1}{l}-\sum_{l=1}^{k-1}\frac{1}{l}+\sum_{l=1}^{j-k}\frac{1}{l}\right]\right\}\end{Bmatrix}$$

$$Comme\quad Z_1(z)=(z-z_0)^{r_1}k!\,C_0\sum_{j=0}^{j=+\infty}\frac{(-1)^j\Delta_j(r_1)}{j!\,(k+j)!}(z-z_0)^j$$

$$\Rightarrow Z_2(z)=\begin{Bmatrix}-\frac{\Delta_k(r_2)}{k!(k-1)!}Z_1(z)Log(z-z_0)+\frac{C_0(z-z_0)^{r_2}}{(k-1)!}\sum_{j=0}^{j=k-1}\frac{(k-j-1)!}{j!}\Delta_j(r_2)(z-z_0)^j\\ +\frac{C_0(z-z_0)^{r_2}}{(k-1)!}\sum_{j=k}^{j=+\infty}\frac{(-1)^{j-k+1}(z-z_0)^j}{j!(j-k)!}\left\{\frac{\partial \Delta_j(r_2)}{\partial r}-\Delta_j(r_2)\left[\sum_{l=1}^{j}\frac{1}{l}-\sum_{l=1}^{k-1}\frac{1}{l}+\sum_{l=1}^{j-k}\frac{1}{l}\right]\right\}\end{Bmatrix}$$

Il se trouve que l'on peut également décaler la dernière sommation de la même manière :

$$\Rightarrow Z_2(z)=\left\{\begin{array}{l} -\dfrac{\Delta_k(r_2)}{k!(k-1)!}Z_1(z)Log(z-z_0)+\dfrac{C_0(z-z_0)^{r_2}}{(k-1)!}\displaystyle\sum_{j=0}^{j=k-1}\dfrac{(k-j-1)!}{j!}\Delta_j(r_2)(z-z_0)^j \\ -\dfrac{C_0(z-z_0)^{r_1}}{(k-1)!}\displaystyle\sum_{j=0}^{j=+\infty}\dfrac{(-1)^j(z-z_0)^j}{j!(j+k)!}\left\{\dfrac{\partial\Delta_{j+k}(r_2)}{\partial r}-\Delta_k(r_2)\Delta_j(r_1)\left[\sum_{l=1}^{j+k}\dfrac{1}{l}-\sum_{l=1}^{k-1}\dfrac{1}{l}+\sum_{l=1}^{j}\dfrac{1}{l}\right]\right\} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow Z_2(z)=\left\{\begin{array}{l} -\dfrac{\Delta_k(r_2)}{k!(k-1)!}Z_1(z)Log(z-z_0)+ \\ -\dfrac{\Delta_k(r_2)}{k!(k-1)!}\left[\displaystyle\sum_{l=1}^{k-1}\dfrac{1}{l}\right]C_0(z-z_0)^{r_1}k!\displaystyle\sum_{j=0}^{j=+\infty}\dfrac{(-1)^j(z-z_0)^j}{j!(j+k)!}\Delta_j(r_1) \\ +\dfrac{C_0(z-z_0)^{r_2}}{(k-1)!}\displaystyle\sum_{j=0}^{j=k-1}\dfrac{(k-j-1)!}{j!}\Delta_j(r_2)(z-z_0)^j \\ -\dfrac{C_0(z-z_0)^{r_1}}{(k-1)!}\displaystyle\sum_{j=0}^{j=+\infty}\dfrac{(-1)^j(z-z_0)^j}{j!(j+k)!}\left\{\dfrac{\partial\Delta_{j+k}(r_2)}{\partial r}-\Delta_k(r_2)\Delta_j(r_1)\left[\sum_{l=1}^{j+k}\dfrac{1}{l}+\sum_{l=1}^{j}\dfrac{1}{l}\right]\right\} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow Z_2(z)=\left\{\begin{array}{l} -\dfrac{\Delta_k(r_2)}{k!(k-1)!}Z_1(z)Log(z-z_0)-\dfrac{\Delta_k(r_2)}{k!(k-1)!}Z_1(z)\left[\displaystyle\sum_{l=1}^{k-1}\dfrac{1}{l}\right] \\ +\dfrac{C_0(z-z_0)^{r_2}}{(k-1)!}\displaystyle\sum_{j=0}^{j=k-1}\dfrac{(k-j-1)!}{j!}\Delta_j(r_2)(z-z_0)^j \\ -\dfrac{C_0(z-z_0)^{r_1}}{(k-1)!}\displaystyle\sum_{j=0}^{j=+\infty}\dfrac{(-1)^j(z-z_0)^j}{j!(j+k)!}\left\{\dfrac{\partial\Delta_{j+k}(r_2)}{\partial r}-\Delta_k(r_2)\Delta_j(r_1)\left[\sum_{l=1}^{j+k}\dfrac{1}{l}+\sum_{l=1}^{j}\dfrac{1}{l}\right]\right\} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow Z_2(z)=\left\{\begin{array}{l} -\dfrac{\Delta_k(r_2)}{k!(k-1)!}Z_1(z)\left\{Log(z-z_0)+\left[\displaystyle\sum_{l=1}^{k-1}\dfrac{1}{l}\right]\right\} \\ +\dfrac{C_0(z-z_0)^{r_2}}{(k-1)!}\displaystyle\sum_{j=0}^{j=k-1}\dfrac{(k-j-1)!}{j!}\Delta_j(r_2)(z-z_0)^j \\ -\dfrac{C_0(z-z_0)^{r_1}}{(k-1)!}\displaystyle\sum_{j=0}^{j=+\infty}\dfrac{(-1)^j(z-z_0)^j}{j!(j+k)!}\left\{\dfrac{\partial\Delta_{j+k}(r_2)}{\partial r}-\Delta_k(r_2)\Delta_j(r_1)\left[\sum_{l=1}^{j+k}\dfrac{1}{l}+\sum_{l=1}^{j}\dfrac{1}{l}\right]\right\} \end{array}\right\}$$

Outre la forme précédente que l'on peut également utiliser, la seconde solution se calcule sous la forme suivante à partir de la première solution avec un terme additionnel :

$$Z_2(z)=\left\{\begin{array}{l} -\dfrac{\Delta_k(r_2)}{k!(k-1)!}Log(z-z_0)Z_1(z)+ \\ +\dfrac{C_0(z-z_0)^{r_2}}{(k-1)!}\displaystyle\sum_{j=0}^{j=k-1}\dfrac{(k-j-1)!\Delta_j(r_2)}{j!}(z-z_0)^j+ \\ +\dfrac{C_0(z-z_0)^{r_2}}{(k-1)!}\displaystyle\sum_{j=k}^{j=+\infty}\dfrac{(-1)^{j-k+1}(z-z_0)^j}{(j-k)!j!}\left\{\left[\dfrac{\partial\Delta_j(r)}{\partial r}\right]_{r\to r_2}-\Delta_j(r_2)\left[\sum_{l=1}^{l=j-k}\dfrac{1}{l}+\sum_{l=1}^{l=j}\dfrac{1}{l}-\sum_{l=1}^{l=k-1}\dfrac{1}{l}\right]\right\} \end{array}\right\}$$

L'approche de E.L.Ince : construction des secondes solutions dans le cas d'un écart entier ou nul, également par passage à la limite

Ici je vais tenter de reprendre les calculs réalisés par E.L.Ince, dans le contexte des seules équations du second degré. Ce dernier les réalise plus généralement pour une équation différentielle ordinaire de degré n quelconque. Il s'agit du point 16.3 page 400 de l'ouvrage « Ordinary Differential Equation ». Et je me place délibérément dans le cas de deux racines r_1 *et* r_2 *dont l'écart est un entier. En outre* $r_1>r_2$ *et le point singulier est* z_0 *au lieu de 0.*

Selon les notations employées par E.L.Ince :

$$Z(z,r)=\sum_{j=0}^{j=+\infty} C_j(r)(z-z_0)^{j+r} \quad C_0(r)=C_0 \quad quelconque \quad et \quad f_0(r)\neq 0$$

On a déjà vu que l'opérateur différentiel appliqué sur ce développement en série a une valeur très simple : $L(Z(z,r))=C_0(z-z_0)^r f_0(r)$ *où* $L\equiv (z-z_0)^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}+(z-z_0)\widetilde{P}(z)\frac{\partial}{\partial z}+\widetilde{Q}(z)$.

Les coefficients sont construits formellement à l'aide de déterminants :

$$C_j(r)=C_0\frac{(-1)^j\mathbf{F}_j(r)}{\prod_{i=1}^{j} f_0(r+j)} \qquad \mathbf{F}_j(r)=\begin{bmatrix} f_1(r+j-1) & f_2(r+j-2) & f_3(r+j-3) & ... & f_{j-1}(r+1) & f_j(r) \\ f_0(r+j-1) & f_1(r+j-2) & f_2(r+j-3) & ... & f_{j-2}(r+1) & f_{j-1}(r) \\ 0 & f_0(r+j-2) & f_1(r+j+3) & ... & ... & ... \\ ... & 0 & ... & ... & f_2(r+1) & f_3(r) \\ ... & ... & ... & f_0(r+2) & f_1(r+1) & f_2(r) \\ 0 & 0 & ... & 0 & f_0(r+1) & f_1(r) \end{bmatrix}$$

Dans le cas où les deux racines r_1,r_2 *sont soit égales soit d'un écart égal à un entier. On a vu que les dénominateurs s'annulaient et que dans ce cas les coefficients devenaient infinis.*

Cas de deux racines r_1,r_2 *d'écart entier k >0*

Pour éviter cela E.L.Ince propose de multiplier le coefficient C_0 *par une constante qui va compenser l'annulation des dénominateurs. Si nous posons* $k=r_1-r_2$*, alors*

$$k=r_1-r_2 \quad C_0\to C_0 f_0(r+1)f_0(r+2)...f_0(r+k)=C_0 f(r)$$

La solution est alors construite comme suit :

$$C_j(r)=C_0\frac{(-1)^j\mathbf{F}_j(r)}{\prod_{i=1}^{j} f_0(r+i)}\to\widetilde{Z}(z,r)=\sum_{j=0}^{j=+\infty} C_0 f(r)\frac{(-1)^j\mathbf{F}_j(r)}{\prod_{i=1}^{j} f_0(r+i)}(z-z_0)^{j+r}=\sum_{j=0}^{j=+\infty} C_j(r)f(r)(z-z_0)^{j+r}$$

$$On\ note \quad g_j(r)=C_j(r)f(r)\to\widetilde{Z}(z,r)=\sum_{j=0}^{j=+\infty} g_j(r)(z-z_0)^{j+r}$$

On s'assure maintenant que le développement est défini pour $r=r_1$ et qu'il n'y a plus de divergence sur les coefficients du développement lorsque $r=r_2$:

$$\begin{cases} C_j(r) = C_0 \dfrac{(-1)^j \mathbf{F}_j(r)}{\prod_{i=1}^{j} f_0(r+i)} \\ C_0(r) = C_0 \end{cases} \Rightarrow \widetilde{Z}(z,r) = \sum_{j=0}^{j=+\infty} C_0 \frac{\prod_{i=1}^{k} f_0(r+i)}{\prod_{i=1}^{j} f_0(r+i)} (-1)^j \mathbf{F}_j(r)(z-z_0)^{j+r}$$

$$\Rightarrow \widetilde{Z}(z,r) = \sum_{j=0}^{j=k} C_0 \prod_{i=j+1}^{k} f_0(r+i)(-1)^j \mathbf{F}_j(r)(z-z_0)^{j+r} + \sum_{j=k+1}^{j=+\infty} C_0 \frac{(-1)^j \mathbf{F}_j(r)}{\prod_{i=k+1}^{j} f_0(r+i)} (z-z_0)^{j+r}$$

$$\prod_{i=j+1}^{k} f_0(r_1+i) \neq 0 \qquad \prod_{i=k+1}^{j} f_0(r_1+i) \neq 0 \Rightarrow \widetilde{Z}(z,r_1) = \sum_{j=0}^{j=k} C_0 \prod_{i=j+1}^{k} f_0(r_1+i)(-1)^j \mathbf{F}_j(r_1)(z-z_0)^{j+r_1} + \sum_{j=k+1}^{j=+\infty} C_0 \frac{(-1)^j \mathbf{F}_j(r_1)}{\prod_{i=k+1}^{j} f_0(r_1+i)} (z-z_0)^{j+r_1}$$

$$\prod_{i=j+1}^{k} f_0(r_2+i) = 0 \qquad \prod_{i=k+1}^{j} f_0(r_2+i) \neq 0 \Rightarrow \widetilde{Z}(z,r_2) = \sum_{j=k+1}^{j=+\infty} C_0 \frac{(-1)^j \mathbf{F}_j(r_2)}{\prod_{i=k+1}^{j} f_0(r_2+i)} (z-z_0)^{j+r_2}$$

L'opérateur différentiel L appliqué sur ce développement donne :

$$\begin{aligned} & L\left(\widetilde{Z}(z,r)\right) = C_0 (z-z_0)^r f_0(r) f(r) = C_0 (z-z_0)^r f_0(r) f_0(r+1) \ldots f_0(r+k) \\ & Notons \quad F(r) = f_0(r) f_0(r+1) \ldots f_0(r+k) \rightarrow L\left(\widetilde{Z}(z,r)\right) = C_0 (z-z_0)^r F(r) \end{aligned}$$

<u>Notons que</u> $\begin{cases} f_0(r) = (r-r_1)(r-r_2) \\ f_0(r+k) = (r+k-r_1)(r+k-r_2) = (r-r_2)(r+r_1-2r_2) \end{cases}$ *<u>donc le facteur F(r) est de degré 1 en (r-r₁) et de degré 2 en (r-r₂). Nulle part ailleurs dans le facteur F(r) n'apparaît autrement les deux facteur (r-r₁) et (r-r₂). De même</u>* $\begin{cases} f_0(r+1) = (r+1-r_1)(r+1-r_2) \\ f_0(r+k) = (r+k-r_1)(r+k-r_2) = (r-r_2)(r+r_1-2r_2) \end{cases}$ *<u>et le facteur f(r) de degré 1 en (r-r₂).</u>*

Par ailleurs l'opérateur différentiel L commute avec l'opérateur différentiel sur le paramètre indiciel r.

On a donc

$$L\left(\frac{\partial^s}{\partial r^s}\left\{\widetilde{Z}(z,r)\right\}\right)\Bigg|_{r=r_\mu} = \frac{\partial^s}{\partial r^s}\left\{L\left(\widetilde{Z}(z,r)\right)\right\}\Bigg|_{r=r_\mu} = C_0 \frac{\partial^s}{\partial r^s}\left\{(z-z_0)^r F(r)\right\}\Bigg|_{r=r_\mu}$$

$$\mu = 1,2 \qquad \begin{cases} s=0 \quad pour \quad r=r_1 \\ s=0,1 \quad pour \quad r=r_2 \end{cases}$$

et conséquemment $\dfrac{\partial^s}{\partial r^s} L\left(\widetilde{Z}(z,r)\right)\Bigg|_{r=r_\mu} = 0 \qquad \mu = 1,2 \qquad \begin{cases} s=0 \quad pour \quad r=r_1 \\ s=0,1 \quad pour \quad r=r_2 \end{cases}$ *est une solution de l'équation différentielle de départ.*

Si l'on écrit le développement $\widetilde{Z}$ sous la forme suivante :

$$\widetilde{Z}(z,r)=(z-z_0)^r\sum_{j=0}^{j=+\infty}C_j(r)f(r)(z-z_0)^j=(z-z_0)^r\sum_{j=0}^{j=+\infty}g_j(r)(z-z_0)^j=e^{r\,Log(z-z_0)}\sum_{j=0}^{j=+\infty}g_j(r)(z-z_0)^j$$

$$\Rightarrow\frac{\partial}{\partial r}\widetilde{Z}(z,r)=(z-z_0)^r\sum_{j=0}^{j=+\infty}g_j\,'(r)(z-z_0)^j+Log(z-z_0)(z-z_0)^r\sum_{j=0}^{j=+\infty}g_j(r)(z-z_0)^j$$

$$\Rightarrow\frac{\partial}{\partial r}\widetilde{Z}(z,r)=w_1(z,r)+Log(z-z_0)w_0(z,r)\qquad avec\qquad w_0(z,r)=\widetilde{Z}(z,r)\qquad et\qquad w_1(z,r)=(z-z_0)^r\sum_{j=0}^{j=+\infty}g_j\,'(r)(z-z_0)^j$$

Considérons la première racine r_1, alors il n'y a pas de dérivation nécessaire et nous avons la première solution avec des coefficients toujours finis (ou nuls éventuellement selon la valeur de $C_j(r1)$):

$$\widetilde{Z}_1(z,r)=w_0(z,r_1)=(z-z_0)^{r_1}\sum_{j=0}^{j=+\infty}g_j(r_1)(z-z_0)^j\qquad g_j(r_1)=C_j(r_1)f(r_1)\qquad fini$$

Considérons maintenant la deuxième racine r_2, alors une dérivation est nécessaire et nous obtenons la deuxième solution indépendante de la première :

$$\widetilde{Z}_2(z,r_2)=\frac{\partial}{\partial r}\widetilde{Z}(z,r)\bigg|_{r=r_2}=w_1(z,r_2)+Log(z-z_0)w_0(z,r_2)$$

<u>Récurrence des coefficients g_j et H_j</u>

La récurrence des coefficients C_j étant la suivante :

$$\forall\nu\quad C_\nu f_0(r+\nu)+C_{\nu-1}f_1(r+\nu-1)+...+C_0 f_\nu(r)=0$$

Alors la récurrence des coefficients g_j suit une récurrence identique :

$$\begin{cases}g_j(r)=C_j(r)f(r)\\ g_0(r)=C_0 f(r)\end{cases}\Rightarrow g_j(r)f_0(r+j)+g_{j-1}(r)f_1(r+j-1)+...+g_0 f_j(r)=0$$

Et de même pour le rapport :

$$\begin{cases}\mathbf{H}_j(r)=\dfrac{g_j(r)}{g_0(r)}=\dfrac{C_j(r)}{C_0}\\ \mathbf{H}_0(r)=\mathbf{H}_0=1\end{cases}\Rightarrow\mathbf{H}_j(r)f_0(r+j)+\mathbf{H}_{j-1}(r)f_1(r+j-1)+...+\mathbf{H}_0 f_j(r)=0$$

$$Avec\quad\mathbf{H}_j(r)=\frac{g_j(r)}{g_0(r)}=\frac{C_j(r)}{C_0}=\frac{(-1)^j\mathbf{F}_j(r)}{\prod_{i=1}^{j}f_0(r+i)}$$

Cas d'une racine multiple d'ordre 2 :

Dans ce cas les deux solutions construites sont strictement identiques :

$$Z(z,r) = \sum_{j=0}^{j=+\infty} C_0 \frac{(-1)^j \mathbf{F}_j(r)}{\prod_{i=1}^{j} f_0(r+i)} (z-z_0)^{j+r}$$

Comme $L(Z(z,r)) = C_0 (z-z_0)^r f_0(r) \quad avec \quad f_0(r) = (r-r_1)^2$ *et que l'opérateur L commute toujours avec l'opérateur* $\frac{\partial^s}{\partial r^s} \quad s = 0{,}1 \quad pour \quad r = r_1 = r_2$*, il vient :*

$$L\left(\frac{\partial^s}{\partial r^s}\{Z(z,r)\}\right)\Bigg|_{r=r_1} = \frac{\partial^s}{\partial r^s}\{L(Z(z,r))\}\Bigg|_{r=r_1} = C_0 \frac{\partial^s}{\partial r^s}\left\{(z-z_0)^r f_0(r)\right\}\Bigg|_{r=r_1} = C_0 \frac{\partial^s}{\partial r^s}\left\{(z-z_0)^r (r-r_1)^2\right\}\Bigg|_{r=r_1}$$

$$= C_0 \left\{ (r-r_1)^2 \frac{\partial^s}{\partial r^s}\left\{(z-z_0)^r\right\} + (z-z_0)^r \frac{\partial^s}{\partial r^s}\left\{(r-r_1)^2\right\}\Bigg|_{r=r_1} \right\}$$

$$s = 0 \Rightarrow L\left(\frac{\partial^s}{\partial r^s}\{Z(z,r)\}\right)\Bigg|_{r=r_1} = C_0 \left\{ (r-r_1)(z-z_0)^r \Big|_{r=r_1} \right\} = 0$$

$$s = 1 \Rightarrow L\left(\frac{\partial^s}{\partial r^s}\{Z(z,r)\}\right)\Bigg|_{r=r_1} = C_0 \left\{ (r-r_1)^2 Log(z-z_0)(z-z_0)^r + 2(z-z_0)^r (r-r_1)\Big|_{r=r_1} \right\} = 0$$

donc là encore la dérivée formelle $\frac{\partial^s}{\partial r^s}\{Z(z,r)\}\Big|_{r=r_1}$ *est une solution de l'équation différentielle.*

La première solution s'écrit :

$$Z_1(z,r) = w_0(z,r_1) = C_0 (z-z_0)^{r_1} \sum_{j=0}^{j=+\infty} C_j(r_1)(z-z_0)^j \qquad C_j(r_1) \qquad fini$$

La deuxième solution indépendante de la première s'obtient par une première dérivation sur le paramètre indiciel comme suit :

$$Z(z,r) = C_0 (z-z_0)^{r_1} \sum_{j=0}^{j=+\infty} C_j(r_1)(z-z_0)^j$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial r} Z(z,r)\Bigg|_{r=r_1} = C_0 \frac{\partial}{\partial r}(z-z_0)^{r_1}\Bigg|_{r=r_1} \sum_{j=0}^{j=+\infty} C_j(r_1)(z-z_0)^j + C_0 (z-z_0)^{r_1} \sum_{j=0}^{j=+\infty} C_j'(r_1)(z-z_0)^j$$

$$\Rightarrow Z_2(z,r_1) = \frac{\partial}{\partial r} Z(z,r)\Bigg|_{r=r_1} = w_1(z,r_1) + Log(z-z_0) w_0(z,r_1)$$

Points singuliers apparents et absence du terme logarithmique

E.L.Ince déduit de ces calculs formels (voir paragraphe 16.33 page 404 et suivantes de « Ordinary Differential Equation »), la condition pour que les termes logarithmiques n'apparaissent pas.

Tout d'abord pour que toutes les solutions indépendantes développées autour du point singulier, il est nécessaire que les deux racines de l'équation indicielle soit distinctes. Le terme logarithmique n'apparaît que si l'écart des racines est un entier.

*On peut donc arranger les deux racines r_1,r_2 avec r_1>r_2 et r_1-r_2 € **N**. Reprenons les raisonnements employés par E.L.Ince qui sont semblent-ils repris des travaux initiaux de Fröbenius.*

La solution liée à la racine r_2 se construit comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial r}\widetilde{Z}(z,r)\Big|_{r=r_2}=(z-z_0)^{r_2}\sum_{j=0}^{j=+\infty}g_j'(r)\Big|_{r=r_2}(z-z_0)^j+(z-z_0)^{r_2}Log(z-z_0)\sum_{j=0}^{j=+\infty}g_j(r)\Big|_{r=r_2}(z-z_0)^j$$

La condition pour laquelle il n'y a pas de terme logarithmique et alors : $\forall j \quad g_j(r)\big|_{r=r_2}$*, conséquemment étant donné que les coefficients g_j sont essentiellement des coefficients polynomiaux en r, alors* $g_j(r)\big|_{r=r_2} \propto (r-r_2)\,P(r)$*. On sait que le facteur* $f(r)=f_0(r+1)f_0(r+2)...f_0(r+k)$ *est proportionnel également à r-r_2 donc $g_0(r)$=C_0f(r) est également proportionnel à r-r_2. Il vient donc que le facteur* $\mathbf{H}_j(r_2)=\dfrac{g_j(r_2)}{g_0(r_2)}$ *doit rester fini (ou éventuellement nul). Prenons maintenant un des résultats de la récurrence vérifiée par les coefficients $\mathbf{H}_j$:*

$$\mathbf{H}_j(r)=\frac{(-1)^j\mathbf{F}_j(r)}{\prod_{i=1}^{j}f_0(r+i)}\Rightarrow \mathbf{H}_j(r)f_0(r+j)+\mathbf{H}_{j-1}(r)f_1(r+j-1)+...+\mathbf{H}_0f_j(r)=0$$

Donc par cette récurrence si les coefficients $\mathbf{H}_0(r_2),\mathbf{H}_1(r_2),...,\mathbf{H}_{j-1}(r_2)$ *sont finis alors le coefficient* $\mathbf{H}_j(r_2)f_0(r_2+j)$ *est également fini. Donc* $\mathbf{H}_j(r_2)$ *est fini si et seulement si* $f_0(r_2+j)\neq 0$*, ce qui n'arrive que si j=r_1-r_2. Donc* $\mathbf{H}_j(r_2)$ *est fini pour tous les coefficients excepté pour le coefficient j=r_1-r_2. Et la condition nécessaire et suffisante pour laquelle ce coefficient s'annule est manifestement que le déterminant* $j=r_1-r_2 \quad \mathbf{F}_j(r_2)=0$ *s'annule. Donc la seule condition pour laquelle le terme logarithmique n'apparaisse pas pour la seconde solution est que le déterminant suivant soit nul :*

$$\mathbf{F}_{r_1-r_2}(r=r_2)=\begin{bmatrix} f_1(r_1-1) & f_2(r_1-2) & f_3(r_1-3) & ... & f_{r_1-r_2-1}(r_2+1) & f_{r_1-r_2}(r_2) \\ f_0(r_1-1) & f_1(r_1-2) & f_2(r_1-3) & ... & f_{r_1-r_2-2}(r_2+1) & f_{r_1-r_2-1}(r_2) \\ 0 & f_0(r_1-2) & f_1(r_1-3) & ... & ... & ... \\ ... & 0 & ... & ... & f_2(r_2+1) & f_3(r_2) \\ ... & ... & ... & ... & f_1(r_2+1) & f_2(r_2) \\ 0 & 0 & ... & 0 & f_0(r_2+1) & f_1(r_2) \end{bmatrix}=0$$

Exemple illustratif de l'absence de terme logarithmique sur une équation différentielle du second degré

Voir le point 16.401 de l'ouvrage « Ordinary Differential Equation » page 407, E.L.Ince.

Soit l'équation différentielle d'ordre 2 : $z^2 y''(z)-\left(4z+\lambda\, z^2\right)y'(z)+\left(4-\kappa\, z\right)y(z)=0$. *z=0 est un point singulier.*

Suivant les notations on a $\begin{array}{l} y''(z)-\left(\lambda+\dfrac{4}{z}\right)y'(z)+\left(\dfrac{4}{z^2}-\dfrac{\kappa}{z}\right)y(z)=0 \\ P(z)=-\left(\lambda+\dfrac{4}{z}\right) \quad Q(z)=\dfrac{4}{z^2}-\dfrac{\kappa}{z} \Rightarrow p_0=-4 \quad q_0=4 \end{array}$.

L'équation indicielle est donc la suivante : $p_0=-4 \quad q_0=4 \Rightarrow r^2-5r+4=0 \Leftrightarrow (r-4)(r-1)=0$. *Les fonctions* f_i *sont définies comme suit :*

$$\begin{cases} f(z,r)=r(r-1)+r\, z\, P(z)+z^2Q(z)=\sum_{i=0}^{i=+\infty} f_i(r)z^i \\ z\, P(z)=-(4+\lambda\, z) \quad z^2Q(z)=4-\kappa\, z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(z,r)=(r-1)(r-4)-z(\lambda\, r+\kappa) \\ f_0(r)=(r-1)(r-4) \quad f_1(r)=-(\lambda\, r+\kappa) \\ f_i(r)=0 \quad i>1 \end{cases}$$

La relation de récurrence pour les coefficients du développement est donc la suivante :

$$C_v f_0(r+v)+C_{v-1}f_1(r+v-1)=0 \Leftrightarrow C_v(r+v-1)(r+v-4)=(\lambda\,(r+v-1)+\kappa)\,C_{v-1}$$

C'est une relation de récurrence à deux termes. Les deux racines indicielles sont $r_1=4$ *et* $r_2=1$*, soit un écart* $r_2-r_1=3$ *qui est évidemment un entier.*

La première solution pour la racine $r_1=4$*, s'écrit sous la forme :*

$$\begin{cases} y(z)=c_0z^4\left(1+\gamma_1 z+\gamma_2 z^2+....\right) \\ \dfrac{\gamma_v}{\gamma_{v-1}}=\dfrac{\lambda\,(3+v)+\kappa}{v(3+v)} \quad v\geq 1 \end{cases}$$

Les déterminants s'écrivent assez simplement comme produit de la diagonale :

$$\mathbf{F}_j(r)=\begin{bmatrix} f_1(r+j-1) & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ f_0(r+j-1) & f_1(r+j-2) & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & f_0(r+j-2) & f_1(r+j-3) & ... & ... & ... \\ ... & 0 & ... & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & f_1(r+1) & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & f_0(r+1) & f_1(r) \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \mathbf{F}_j(r)=f_1(r)f_1(r+1)...f_1(r+j-2)f_1(r+j-1)$$

La condition pour laquelle le terme logarithmique disparaît est donc la suivante :

$$\mathbf{F}_{r_1-r_2}(r_2)=0=\mathbf{F}_3(1)=f_1(1)f_1(2)f_1(3)$$
$$\Leftrightarrow(\lambda\, r_2+\kappa)(\lambda\,(r_2+1)+\kappa)(\lambda\,(r_2+2)+\kappa)=0$$
$$\Leftrightarrow(\lambda+\kappa)(2\lambda+\kappa)(3\lambda+\kappa)=0\Leftrightarrow\begin{cases}\kappa=-\lambda\\ \kappa=-2\lambda\\ \kappa=-3\lambda\end{cases}$$

Dans ces conditions la solution sur l'indice r_2=1, se développe ainsi :

$$\frac{\partial}{\partial r}\widetilde{Z}(z,r)\bigg|_{r=r_2}=z^{r_2}\sum_{j=0}^{j=+\infty}g_j\,'(r)\big|_{r=r_2}z^j$$

En déterminant la récurrence générale sur les coefficients $g'_j(r)$, on obtient les développements qui s'avèrent finis :

$$f_0(r)=(r-4)(r-1)$$
$$g_0(r)=C_0f_0(r+1)f_0(r+2)f_0(r+3)=C_0(r-3)(r-2)(r-1)r(r+1)(r+2)\Rightarrow g_0\,'(1)=12C_0$$
$$Posons\quad C_0=\frac{1}{12}\Rightarrow g_0\,'(1)=1$$
$$g_j(r)=g_{j-1}(r)\frac{\lambda\,(r+j-1)+\kappa}{f_0(r+j)}\Rightarrow\begin{cases}g_j\,'(r)=g_{j-1}\,'(r)\dfrac{\lambda\,(r+j-1)+\kappa}{f_0(r+j)}+g_{j-1}(r)h(r)\\ h(r)=\dfrac{d}{dr}\left\{\dfrac{\lambda\,(r+j-1)+\kappa}{f_0(r+j)}\right\}\end{cases}$$
$$g_1(r)=C_0(r-2)(r-1)(r+1)(r+2)(\lambda\, r+\kappa)\Rightarrow g_1(1)=0$$
$$g_2(r)=C_0(r-1)(r+2)(\lambda\, r+\kappa)(\lambda\,(r+1)+\kappa)\Rightarrow g_2(1)=0$$
$$g_3(r)=C_0(\lambda\, r+\kappa)(\lambda\,(r+1)+\kappa)(\lambda\,(r+2)+\kappa)\Rightarrow\begin{cases}\kappa=-\lambda\rightarrow g_3(1)=0\\ \kappa=-2\lambda\rightarrow g_3(1)=0\Rightarrow\forall j>3\quad g_j(1)=0\\ \kappa=-3\lambda\rightarrow g_3(1)=0\end{cases}$$
$$\kappa=-\lambda\rightarrow g_1(1)=0\qquad g_1\,'(1)=0\quad par\quad récurrence\quad\forall j>0\quad g_j\,'(1)=0\Rightarrow y(\mathrm{z})=z$$
$$\kappa=-2\lambda\rightarrow\begin{cases}g_1(1)=0\qquad g_1\,'(1)=6\lambda C_0=\dfrac{\lambda}{2}\\ g_2(1)=0\qquad g_2\,'(1)=0\end{cases}\quad par\quad récurrence\quad\forall j>1\quad g_j\,'(1)=0\Rightarrow y(\mathrm{z})=z\left(1+\frac{\lambda}{2}z\right)$$
$$\kappa=-3\lambda\rightarrow\begin{cases}g_1(1)=0\qquad g_1\,'(1)=12\lambda C_0=\lambda\\ g_2(1)=0\qquad g_2\,'(1)=6\lambda^2C_0=\dfrac{\lambda^2}{2}\\ g_3(1)=0\qquad g_3\,'(1)=6\lambda^2C_0\dfrac{3\lambda+\kappa}{f_0(r+3)}=0\end{cases}\quad par\quad récurrence\quad\forall j>2\quad g_j\,'(1)=0\Rightarrow y(\mathrm{z})=z\left(1+\lambda\, z+\frac{\lambda^2}{2}z\right)$$

Exemple illustratif de l'absence de terme logarithmique sur l'équation différentielle de Heun

Considérons l'équation de Heun :

$$y''(z)+\left(\frac{\gamma}{z}+\frac{\delta}{z-1}+\frac{\gamma}{z-a}\right)y'(z)+\frac{\alpha\beta\ z-q}{z(z-1)(z-a)}y(z)=0$$

$$\text{Condition de Fuchs}\quad \gamma+\delta+\varepsilon=\alpha+\beta+1$$

$$\text{Point singulier } z=0\quad p_0=\gamma\quad q_0=0\Rightarrow I(r)=r^2+r(\gamma-1)\Rightarrow r=0\quad r=1-\gamma$$

$$\text{Point singulier } z=1\quad p_0=\delta\quad q_0=0\Rightarrow I(r)=r^2+r(\delta-1)\Rightarrow r=0\quad r=1-\delta$$

$$\text{Point singulier } z=a\quad p_0=\varepsilon\quad q_0=0\Rightarrow I(r)=r^2+r(\varepsilon-1)\Rightarrow r=0\quad r=1-\varepsilon$$

$$\text{Point singulier } z=\infty\Rightarrow r^2+r(1-p_0)+q_0=(r-\alpha)(r-\beta)=0\Rightarrow r=\alpha\quad r=\beta$$

Et regardons spécifiquement la condition pour laquelle pour le point singulier z=a, le terme logarithmique sera absent. Étant donné qu'autour de la singularité z=a l'écart en valeur absolue entre les deux racines indicielle est de |1-ε|, il suffit que ε soit un entier négatif égal à -N pour les deux racines soit respectivement : r_1=1+N et r_2=0.

Les fonctions f_i sont définies comme suit :

$$\begin{cases} P(z)=\left(\frac{\gamma}{z}+\frac{\delta}{z-1}+\frac{\varepsilon}{z-a}\right)\quad Q(z)=\frac{\alpha\beta\ z-q}{z(z-1)(z-a)} \\ f(z-a,r)=r(r-1)+r\ (z-a)P(z)+(z-a)^2Q(z)=\sum_{i=0}^{i=+\infty}f_i(r)(z-a)^i \\ (z-a)P(z)=\varepsilon+\gamma\frac{z-a}{z}+\delta\frac{z-a}{z-1}\quad (z-a)^2Q(z)=\frac{(z-a)(\alpha\beta\ z-q)}{z(z-1)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} (z-a)P(z)=\varepsilon+\frac{z-a}{a(a-1)}\sum_{l=0}^{l=+\infty}(-1)^l\left(\gamma(a-1)^{l+1}+\delta\ a^{l+1}\right)\frac{(z-a)^l}{a^l(a-1)^l} \\ (z-a)^2Q(z)=-\frac{z-a}{a(a-1)}\sum_{l=0}^{l=+\infty}(-1)^l\left(a^{l+1}(q-\alpha\beta)-q(a-1)^{l+1}\right)\frac{(z-a)^l}{a^l(a-1)^l} \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} f(z-a,r)=r(r-1+\varepsilon)+\frac{z-a}{a(a-1)}\sum_{l=0}^{l=+\infty}(-1)^l\left[(r\ \gamma+q)(a-1)^{l+1}+(r\ \delta-q+\alpha\beta)\ a^{l+1}\right]\frac{(z-a)^l}{a^l(a-1)^l}+ \\ f_0(r)=r(r-1+\varepsilon) \\ f_l(r)=(-1)^{l-1}\frac{(r\ \gamma+q)(a-1)^l+(r\ \delta-q+\alpha\beta)\ a^l}{a^l(a-1)^l}\quad l\geq 1 \end{cases}$$

Lorsque ε=-N, r_1=1+N et r_2=0, la condition d'annulation du terme logarithmique s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{F}_{N+1}(r=r_2=0)=\begin{bmatrix} f_1(N) & f_2(N-1) & f_3(N-2) & \dots & f_N(1) & f_{N+1}(0) \\ f_0(N) & f_1(N-1) & f_2(N-2) & \dots & f_{N-1}(1) & f_N(0) \\ 0 & f_0(N-1) & f_1(N-2) & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & \dots & f_2(1) & f_3(0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & f_1(1) & f_2(0) \\ 0 & 0 & \dots & 0 & f_0(1) & f_1(0) \end{bmatrix}=0$$

$$Avec \quad \begin{cases} f_0(N)=-N \\ f_l(N)=(-1)^{l-1}\dfrac{(N\gamma+q)(a-1)^l+(N\delta-q+\alpha\beta)a^l}{a^l(a-1)^l} & l\geq 1 \end{cases}$$

Lorsque ε=0 alors $\mathbf{F}_1(0)=f_1(0)=0\Leftrightarrow q(a-1)+(-q+\alpha\beta)a=0\Leftrightarrow q=a\,\alpha\beta$.

Lorsque ε=1 alors $\mathbf{F}_2(0)=\begin{bmatrix} f_1(1) & f_2(0) \\ f_0(1) & f_1(0)\end{bmatrix}=f_1(1)f_1(0)-f_0(1)f_2(0)=0$. *Le numérateur simplifié de cette expression donne une équation du second degré en q :*

$$q^2-q(1-\gamma+a(\gamma+\delta-2+2\alpha\beta))+a\,\alpha\beta(a(\gamma+\delta-1+\alpha\beta)-\gamma)=0$$

Etant donné que la relation de Fuchs a court : $\gamma+\delta-2=\alpha+\beta$. *Cette équation devient :*

$$q^2-q(1-\gamma+a(\alpha+\beta+2\alpha\beta))+a\,\alpha\beta(a(1+\alpha)(1+\beta)-\gamma)=0$$

Pour ε=2, alors $\mathbf{F}_3(r=0)=\begin{bmatrix} f_1(2) & f_2(1) & f_3(0) \\ f_0(2) & f_1(1) & f_2(0) \\ 0 & f_0(1) & f_1(0)\end{bmatrix}=0$

il s'agit de trouver les racines d'un polynôme du troisième degré en q, sachant que la relation de Fuchs a court : $\gamma+\delta-3=\alpha+\beta$. *L'expression de polynôme en q^3 est la suivante :*

$$q^3-q^2(3\gamma-4-a(1+3(\alpha+\beta+\alpha\beta)))+q\begin{pmatrix} a^2(2\beta(1+\beta)+2\alpha(1+5\beta+3\beta^2)+\alpha^2(2+6\beta+3\beta^2))+ \\ +a(\alpha(4+4\beta-4\gamma-6\beta\gamma)-4\beta(\gamma-1))+ \\ +2(\gamma-1)(\gamma-2) \end{pmatrix}$$
$$-a\,\alpha\beta(a^2(\alpha^2+3\alpha+2)(\beta^2+3\beta+2)-a\gamma(4+4\alpha+4\beta+3\alpha\beta)+2\gamma(\gamma-1))=0$$

Cela coïncide avec l'expression (2.7) obtenue par K.Takemura dans un article de 2022 « Heun's equation, generalized hypergeometric function and exceptional Jacobi polynomial ». Cette expression peut aussi s'écrire sous la forme (voir article de 2018 T.A.Ishkhanyan, T.A.Shahverdyan, A.M.Ishkhanyan « Expansions of the Solutions of the General Heun Equation Governed by Two-Term Recurrence ») :

$$\left((q-a\,\alpha\beta)^2+(q-a\,\alpha\beta)(4a-2-a(3+\alpha+\beta)+\gamma)+2a(a-1)\alpha\beta\right)(q-a\,\alpha\beta-2a(1+\alpha+\beta)+2(\gamma-1))+$$
$$+2a(a-1)(q-a\,\alpha\beta)(1+\alpha)(1+\beta)=0$$

Pour construire les deux développements indépendants pour les deux racines indicielles r_1=1+N et r_2=0 de l'équation de Heun autour de la singularité z=a (ici apparente):

$$\begin{cases} \widetilde{Z}(z,1+N) = (z-a)^{1+N} \sum_{j=0}^{j=+\infty} g_j(r)(z-a)^j \qquad g_j(r) = C_0 f(r) \dfrac{(-1)^j \mathbf{F}_j(r)}{\prod_{i=1}^{j} f_0(r+i)} \\ \dfrac{\partial}{\partial r} \widetilde{Z}(z,r)\Big|_{r=0} = \sum_{j=0}^{j=+\infty} g_j{}'(r)\Big|_{r=0} (z-a)^j \end{cases}$$

La relation de récurrence pour les coefficients du développement est la suivante :

$$j \in \mathbf{N} \qquad g_j(r) f_0(r+\nu) + g_{j-1}(r) f_1(r+\nu-1) + \ldots + g_1(r) f_{j-1}(r+1) + C_0 f_j(r) = 0$$

Cette expression de la relation de récurrence conduit à un développement de la solution suffisamment compliqué pour ne pas poursuivre le calcul plus avant.

Mais on peut simplifier la récurrence en exprimant l'équation différentielle sous la forme suivante :

$$z(z-1)(z-a)y''(z) + z(z-1)(z-a)\left(\frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{z-1} + \frac{\gamma}{z-a}\right)y'(z) + (\alpha\beta\, z - q)y(z) = 0$$
$$\text{Soit} \quad p_0(z)y''(z) + p_1(z)y'(z) + p_2(z)y(z) = 0 \quad \text{où} \quad p_0(z), p_1(z), p_2(z) \quad \text{analytique autour de } z = a$$

Le développement de la forme : $(z-a)^r \sum_{j=0}^{j=+\infty} c_j (z-a)^j$ *conduit à une relation de récurrence à trois termes, comme suit :*

$$P_j c_{j-1} + Q_j c_j + R_j c_{j+1} = 0$$
$$\begin{cases} P_j = (r+\alpha-1+j)(r+\beta-1+j) \\ Q_j = -(r+j)^2 - q - (r+j)(r-1+\gamma+\varepsilon) + a\left(2(r+j)^2 + \alpha\beta + (r+j)(\alpha+\beta-1+\varepsilon)\right) \\ R_j = a(a-1)(r+1+j)(r+\varepsilon+j) \end{cases}$$

L'équation indicielle se retrouve en annulant le degré minimal soit celui du terme (z-a)^r :

$$\text{Terme} \quad (z-a)^r = 0 \Leftrightarrow P_{-1} = a(a-1)\, r(r+\varepsilon+1) = 0 \Leftrightarrow r(r+\varepsilon-1) = 0$$

D'autre part pour la racine indicielle r=0, le coefficient R_j s'annule lorsque j=-ε. Pour que le coefficient c_{j+1} demeure fini et que le développement d'une solution de la forme $\sum_{j=0}^{j=+\infty} c_j (z-a)^j$ *existe il convient que l'application de la relation de récurrence pour j=-ε=N (lorsque ε est un entier l'écart des racines indicielles est alors un entier) soit vérifiée :*

$$\varepsilon = -N \quad P_{-\varepsilon} c_{-\varepsilon-1} + Q_{-\varepsilon} c_{-\varepsilon} + R_{-\varepsilon} c_{-\varepsilon+1} = 0$$
$$P_{-\varepsilon} = (\alpha-1-\varepsilon)(\beta-1+\varepsilon) \qquad Q_{-\varepsilon} = a\alpha\beta - q + \varepsilon(\varepsilon+1)(2a-1) + \varepsilon(\gamma+\varepsilon-a(\alpha+\beta+1+\varepsilon)) \qquad R_{-\varepsilon} = 0$$
$$\Leftrightarrow (\alpha-1-\varepsilon)(\beta-1+\varepsilon)c_{-\varepsilon-1} + \left(a\alpha\beta - q + \varepsilon(\varepsilon+1)(2a-1) + \varepsilon(\gamma+\varepsilon-a(\alpha+\beta+1+\varepsilon))\right)c_{-\varepsilon} = 0$$

Si par construction les deux types de développement $y_1(z)=(z-a)^{1-\varepsilon}\sum_{j=0}^{j=+\infty} d_j (z-a)^j$ *et* $y_2(z)=\sum_{j=0}^{j=+\infty} c_j (z-a)^j$ *sont indépendants alors la condition précédente garantit qu'il y a absence complète du terme logarithmique dans la solution indicielle r=0 (racine la plus petite) autour de z=a.*

Il faut juste savoir qu'en réalité une solution autour de z=a peut être est construite sous la forme d'un développement fini de fonctions hypergéométriques 2F1, ce que nous verrons dans l'exposé plus détaillé consacré aux fonctions de Heun. Comme cette solution est probablement indépendante de la solution indicielle r=1-ε, alors là encore si l'on retombe sur la même condition polynomiale conduisant à des valeurs spécifiques de q racine de ce polynôme, on peut affirmer que c'est bien la condition d'absence du terme logarithmique.

Équations différentielles du n-ième degré

Approche de E.L.Ince

L'approche de E.L.Ince exposée jusqu'à présent pour les équations différentielles du second degré n'est que l'application de résultats existants pour un degré n quelconque. Dans la suite on se place sur la singularité z=0 au lieu de $z=z_0$, ce qui ne change pas la généralité du propos.

Considérations générales sur les points ordinaires, singuliers réguliers et singuliers irréguliers

L'équation différentielle du n-ième degré dont il est question est est de la forme assez générale suivante :

$$p_0(z)\,y^{(n)}(z)+p_1(z)\,y^{(n-1)}(z)+\ldots+p_{n-1}(z)\,y^{(1)}(z)+p_n(z)\,y(z)=0$$

où les fonctions $p_0(z), p_1(z),\ldots, p_n(z)$ *sont supposées être des fonctions analytiques dans tout le plan complexe.*

Les points ordinaires ou encore « non-singuliers » se définissent comme pour le cas des équations différentielle du second degré. Le point « non-singulier » est un point autour duquel la solution y(z) de l'équation différentielle peut être développée en série de Taylor, à partir de la seule connaissance de la fonction et de toutes ses dérivées jusqu'à la n-1ième en ce point :

$$\begin{cases} y(z_0), y'(z_0),\ldots y^{(n-1)}(z_0) \\ y(z)=y(z_0)+(z-z_0)y'(z_0)+\ldots+\dfrac{(z-z_0)^{n-1}}{(n-1)!}\,y^{(n-1)}(z_0)+\ldots \end{cases}$$

Autour de ce point, on peut alors construire n solutions indépendantes, comme suit :

$$\begin{cases} y(z_0)=1, y'(z_0)=0,\ldots y^{(n-1)}(z_0)=0 \\ y(z)=y(z_0)+(z-z_0)y'(z_0)+\ldots+\dfrac{(z-z_0)^{n-1}}{(n-1)!}\,y^{(n-1)}(z_0)+\ldots \end{cases}$$

$$\ldots$$

$$\begin{cases} y(z_0)=0, y'(z_0)=0,\ldots y^{(n-1)}(z_0)=1 \\ y(z)=y(z_0)+(z-z_0)y'(z_0)+\ldots+\dfrac{(z-z_0)^{n-1}}{(n-1)!}\,y^{(n-1)}(z_0)+\ldots \end{cases}$$

Autrement formulé c'est également le point autour duquel la solution du problème de Cauchy pour l'équation différentielle existe (problème aux valeurs initiales connues) :

$$\begin{cases} y(z_0)=y_0 \\ y'(z_0)=y'_0 \\ \ldots. \\ y^{(n-1)}(z_0)=y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

Les points « singuliers »

Par opposition les points « singuliers » sont ceux autour duquel on ne peut construire de série de Taylor pour la fonction y(z) (ou que l'on ne peut résoudre le problème de Cauchy). Pour caractériser ces derniers on peut supposer le plus généralement qu'il existe un développement autour du point singulier d'une forme particulière. On parle également d'une fonction solution de l'ED d'ordre fini autour du point singulier lorsque qu'il existe une valeur ρ finie telle que la limite suivante (pris dans le plan complexe) est nulle : $\lim_{z \to z_0} (z-z_0)^{\rho}\, y(z) = 0$. *Pour le point à l'infini, cette dernière est définie ainsi :* $\lim_{z \to \infty} z^{-\rho} y(z) = 0$. *Si toutes les n solutions indépendantes sont réputées d'ordre fini autour du point singulier, alors le point singulier est dit régulier et irrégulier dans le cas contraire.*

Concrétisons cela avec l'équation différentielle définie plus haut : les seuls points singuliers sont ceux pour lesquels $p_0(z)$ *s'annule dans le plan complexe, à l'exception du point à l'infini. Comme il est d'usage de placer un de ces points singuliers en z=0, sans pour cela réduire la généralité du propos. Le développement est donc supposé de la forme :* $y(z) = z^r \left(C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \ldots\right)$. *Dans ce cas il suffit de prendre ρ=1-r pour que la limite précédente s'annule et que la fonction soit réputée d'ordre finie.*

Comme les fonctions $p_0(z), p_1(z), \ldots, p_n(z)$ *sont des fonctions analytiques dans tout le plan complexe, y compris aux abords du point singuliers z, elles admettent chacune des développements de Taylor. En injectant les développements de ces fonctions et le développement de y(z) dans l'équation différentielle, et en annulant chacun des termes de puissance de z, on obtient un système infini d'équation linéaire sur les coefficients* C_i *qui s'annule. La première équation linéaire de la puissance minimale en z est appelée communément l'équation indicielle. Dans le cas d'une équation différentielle du n-ième degré c'est un polynôme de degré maximal n, noté I(r).*

Plusieurs cas permettent une première classification du point singulier z=0 :

Cas n°1 : I(r) est indépendant de l'exposant r, il n'y a pas de solution et le point est alors qualifié d'irrégulier

Cas n°2 : I(r) dépend de l'exposant r, si c'est un polynôme de degré strictement inférieur n, là encore le point z=0 est un point singulier irrégulier

Cas n°3 : I(r) dépend de l'exposant r, c'est un polynôme de degré = n, le point z=0 est un point singulier régulier. Pour le cas n°3, modifions l'équation différentielle de la façon suivante :

$$y^{(n)}(z) + P_1(z)\, y^{(n-1)}(z) + \ldots + P_{n-1}(z)\, y^{(1)}(z) + P_n(z)\, y(z) = 0$$
$$P_1(z) = \frac{p_1(z)}{p_0(z)} \quad \ldots. \quad P_n(z) = \frac{p_n(z)}{p_0(z)}$$

Pour qu'un point singulier z=0 de l'équation différentielle se trouve dans le cas n°3, il faut et il suffit que les n fonctions $P_1(z), \ldots P_n(z)$ *satisfassent aux conditions suivantes (Théorème dû à Fuchs) :*

$$P_1(z) = O\left(\frac{1}{z}\right) \quad \ldots \quad P_{n-1}(z) = O\left(\frac{1}{z^{n-1}}\right), P_n(z) = O\left(\frac{1}{z^n}\right) \rightarrow \begin{cases} P_1(z) = \dfrac{P_{1,0}}{z} + a_{1,0} + a_{1,1} z + \ldots \\ \ldots \\ P_n(z) = \dfrac{P_{n,0}}{z^n} + \dfrac{a_{n,-n+1}}{z} + \ldots. + a_{n,0} + a_{n,1} z + \ldots \end{cases}$$

Alors dans le cas n°3 l'équation indicielle est une équation du n-ième degré : $r(r-1)\times\ldots\times(r-n)+r(r-1)\times\ldots\times(r+1-n)\,P_{1,0}+\ldots+r(r-1)\,P_{n-2,0}+r\,P_{n-1,0}+P_{n,0}=0$. *Elle s'obtient facilement en injectant les développements approximées de $P_1(z)$,...,$P_n(z)$ et en annulant le coefficient d'ordre minimum en z, si l'on suppose un développement commençant par le terme z^r. On voit donc que l'équation indicielle s'obtient à partir du calcul des limites suivantes :*

$$\begin{cases} P_{1,0} = \underset{z\to 0}{Lim} \quad z\,P_1(z) = \underset{z\to 0}{Lim} \quad z\,\dfrac{p_1(z)}{p_0(z)} \\ \ldots \\ P_{n,0} = \underset{z\to 0}{Lim} \quad z^n\,P_n(z) = \underset{z\to 0}{Lim} \quad z^n\,\dfrac{p_n(z)}{p_0(z)} \end{cases}$$

Définies comme cela, on peut encore reformuler ces limites comme un calcul de résidus de fonction de valeur complexe pour un point singulier régulier quelconque z_0 :

$$\begin{cases} P_{1,0} = Residu_{\;z=z_0}\left(\dfrac{p_1(z)}{p_0(z)}\right) \\ \ldots \\ P_{n,0} = Residu_{\;z=z_0}\left((z-z_0)^{n-1}\,\dfrac{p_n(z)}{p_0(z)}\right) \end{cases}$$

L'équation indicielle admet n racines r_0,..., r_{n-1} et que l'on appelle communément <u>exposants caractéristiques de Fröbenius</u>. Plusieurs cas sont possibles pour la construction des solutions locales autour de la singularité z=0 dont nous verrons par la suite la forme.

<u>Construction des solutions régulières indépendantes autour de la singularité z_0 de l'équation</u>

D'après le théorème de Fuchs évoqué précédemment et brièvement, une équation différentielle pour laquelle z=0 est un point singulier régulier est de la forme :

$$z^n y^{(n)}(z)+z^{n-1}P_1(z)y^{(n-1)}(z)+\ldots+zP_{n-1}(z)y^{(1)}(z)+P_n(z)y(z)=0$$

où les fonctions $P_1(z),P_2(z),\ldots,P_{n-1}(z),P_n(z)$ *sont analytiques autour du point singulier régulier z=0 et qui possèdent par conséquent un développement autour de cette singularité de la forme :* $P_l(z)=\sum_{i=0}^{i=+\infty}P_{l,i}z^i$ *. Si nous recherchons les solutions de cette équation différentielle, introduisons l'opérateur différentiel suivant:*

$$L \equiv z^n\,\frac{d^n}{dz^n}+z^{n-1}P_1(z)\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}+\ldots+zP_{n-1}(z)\frac{d}{dz}+P_n(z)$$

L'équation différentielle peut alors se réécrire sous la forme : $L(y(z))=0$.

En prenant un développement en série $y(z,\rho)=z^{\rho}\sum_{j=0}^{j=+\infty}C_j z^j$ *, l'effet de l'opérateur différentiel L est le suivant :*

$$y(z,\rho)=\sum_{j=0}^{j=+\infty}C_j z^{\rho+j}\Rightarrow L(y(z,\rho))=\sum_{j=0}^{j=+\infty}C_j L\left(z^{\rho+j}\right)=\sum_{j=0}^{j=+\infty}C_j (z-z_0)^{r+j} f(z,\rho+j)$$

$$avec\quad\begin{cases} f(z,\rho+j)=[\rho+j]_n+[\rho+j]_{n-1}P_1(z)+\ldots+[\rho+j]_1 P_{n-1}(z)+P_n(z)\\ [\rho+j]_n=(\rho+j)(\rho+j-1)\ldots(\rho+j-n+1)\\ [\rho+j]_{n-1}=(\rho+j)(\rho+j-1)\ldots(\rho+j-n+2)\\ \ldots\\ [\rho+j]_1=(\rho+j)\end{cases}$$

Autour de la singularité z=0 la fonction f(z,ρ+j) est analytique et peut donc se développer en série :

$$f(z,\rho+j)=[\rho+j]_n+[\rho+j]_{n-1}P_1(z)+\ldots+[\rho+j]_1 P_{n-1}(z)+P_n(z)=\sum_{i=0}^{i=+\infty}f_i(\rho+j)\,z^i$$

$$\Rightarrow L(y(z,\rho))=\sum_{j=0}^{j=+\infty}C_j z^{\rho+j}\sum_{i=0}^{i=+\infty}f_i(\rho+j)z^i=\sum_{j=0}^{j=+\infty}\sum_{i=0}^{i=+\infty}C_j f_i(\rho+j)z^{\rho+j+i}$$

$$De\ plus\quad P_l(z)=\sum_{i=0}^{i=+\infty}P_{l,i}z^i\Rightarrow f(z,\rho+j)=[\rho+j]_n+[\rho+j]_{n-1}\sum_{i=0}^{i=+\infty}P_{1,i}z^i+\ldots+[\rho+j]_1\sum_{i=0}^{i=+\infty}P_{n-1,i}z^i+\sum_{i=0}^{i=+\infty}P_{n,i}z^i$$

$$\begin{cases} f_0(\rho+j)=[\rho+j]_n+[\rho+j]_{n-1}P_{1,0}+\ldots+[\rho+j]_1 P_{n-1,0}+P_{n,0}\\ f_1(\rho+j)=[\rho+j]_{n-1}P_{1,1}+\ldots+[\rho+j]_1 P_{n-1,1}+P_{n,1}\\ \ldots\\ f_i(\rho+j)=[\rho+j]_{n-1}P_{1,i}+\ldots+[\rho+j]_1 P_{n-1,i}+P_{n,i}\\ \ldots\end{cases}$$

En réarrangeant la sommation de telle sorte que l'on rassemble les mêmes puissances de z, il vient :

$$L(y(z,\rho))=\sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty}z^{\rho+\nu}\left\{C_\nu f_0(\rho+\nu)+C_{\nu-1}f_1(\rho+\nu-1)+\ldots+C_0 f_\nu(\rho)\right\}$$

$$\Leftrightarrow L(y(z,\rho))=\sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty}z^{\rho+\nu}\left\{C_0 f_\nu(\rho)+C_1 f_{\nu-1}(\rho)+\ldots+C_{\nu-1}f_1(\rho+\nu-1)+C_\nu f_0(\rho+\nu)\right\}$$

Si la série est solution de l'équation différentielle, alors chaque terme de même puissance doit s'annuler ce qui conduit à résoudre un système d'équations linéaires sur les coefficients :

$$\forall\nu\quad C_\nu f_0(\rho+\nu)+C_{\nu-1}f_1(\rho+\nu-1)+\ldots+C_0 f_\nu(\rho)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases} C_0 f_0(\rho)=0\\ C_1 f_0(\rho+1)+C_0 f_1(\rho)=0\\ C_2 f_0(\rho+2)+C_1 f_1(\rho+1)+C_0 f_2(\rho)=0\\ \ldots\\ C_\nu f_0(\rho+\nu)+C_{\nu-1}f_1(\rho+\nu-1)+\ldots+C_0 f_\nu(\rho)=0\\ \ldots\end{cases}$$

La première équation est l'équation indicielle. C'est une équation polynomiale de degré n dont les racines sont les exposants ρ recherchée. Supposons que toutes les racines soit réelles et que pour un couple quelconque de ces racines la différence ne soit jamais un entier, alors dans ce cas les coefficients se déduisent par l'expression suivante qui résulte de la résolution du système linéaire :

$$\rho \quad tq \quad f_0(\rho)=0 \quad \textit{équation indicielle} \Rightarrow \rho \in \{\rho_1, \rho_2, ..., \rho_n\} \quad \rho_1 > \rho_2 > ... > \rho_n$$

$$C_j(\rho) = C_0 \frac{(-1)^j \Delta_j(\rho)}{f_0(\rho+1) f_0(\rho+2) ... f_0(\rho+j)} = C_0 \frac{(-1)^j \Delta_j(\rho)}{\prod_{i=1}^{j} f_0(\rho+i)}$$

$$\Delta_j(\rho) = \begin{bmatrix} f_1(\rho) & f_0(\rho+1) & 0 & 0 & ... & 0 \\ f_2(\rho) & f_1(\rho+1) & f_0(\rho+2) & 0 & ... & 0 \\ f_3(\rho) & f_2(\rho+1) & f_1(\rho+2) & f_0(\rho+3) & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & 0 \\ f_{j-1}(\rho) & f_{j-2}(\rho+1) & f_{j-3}(\rho+2) & f_{j-4}(\rho+3) & ... & f_0(\rho+j-1) \\ f_j(\rho) & f_{j-1}(\rho+1) & f_{j-2}(\rho+2) & f_{j-3}(\rho+3) & ... & f_1(\rho+j-1) \end{bmatrix}$$

Comme le déterminant en question est identique si l'on range ligne et colonne en ordre inversé, alors le déterminant peut aussi s'écrire :

$$C_j(\rho) = C_0 \frac{(-1)^j \Delta_j(\rho)}{\prod_{i=1}^{j} f_0(\rho+i)} \qquad \Delta_j(r) = \begin{bmatrix} f_1(\rho+j-1) & f_2(\rho+j-2) & f_3(\rho+j-3) & ... & f_{j-1}(\rho+1) & f_j(\rho) \\ f_0(\rho+j-1) & f_1(\rho+j-2) & f_2(\rho+j-3) & ... & f_{j-2}(\rho+1) & f_{j-1}(\rho) \\ 0 & f_0(\rho+j-2) & f_1(\rho+j+3) & ... & ... & ... \\ ... & 0 & ... & ... & f_2(\rho+1) & f_3(\rho) \\ ... & ... & ... & f_0(\rho+2) & f_1(\rho+1) & f_2(\rho) \\ 0 & 0 & ... & 0 & f_0(\rho+1) & f_1(\rho) \end{bmatrix}$$

$$\Delta_j(\rho) = \mathbf{F}_j(\rho) \quad \textit{Notation de E.L.Ince}$$

C'est exactement la notation et l'ordre du déterminant utilisée par E.L.Ince (page 397).

Si l'un des couples de racines est séparé par un entier (éventuellement nul dans le cas de racines multiples), alors cela signifie que le dénominateur $\prod_{i=1}^{j} f_0(\rho+i)$ *va s'annuler dans le calcul d'un des coefficients* C_j *et dans ce cas la construction devient invalide. Et il faut procéder autrement. C'est ce que nous allons voir dans ce qui suit.*

Notons également que le système d'équation linéaire, revient au schéma de récurrence suivant :

$$C_0 = 1 \quad f_0(\rho)=0 \Rightarrow \rho \in \{\rho_0, \rho_1, ..., \rho_{n-1}\}$$
$$\forall j \in \mathbf{N}^+ \quad C_j = -\frac{C_{j-1} f_1(\rho+j-1) + ... + C_0 f_j(\rho)}{f_0(\rho+j)}$$

Si toutes les racines sont distinctes et non séparées une à une par une différence entière ou nul (racines multiples) alors toutes les solutions indépendantes locales autour de z=0 sont décrites soit par le schéma de récurrence, soit par la formule mettant en jeu les déterminants $\Delta_j(\rho)$.

L'équation indicielle s'écrit donc : $f_0(\rho)=[\rho]_n+[\rho]_{n-1}P_{1,0}+\ldots+[\rho]_1 P_{n-1,0}+P_{n,0}=0$ *avec* $\begin{array}{l} P_{1,0}=P_1(0) \\ P_{2,0}=P_2(0) \\ \ldots \\ P_{n,0}=P_n(0) \end{array}$.

Imaginons que l'équation différentielle s'exprime maintenant sous la forme générale : $y^{(n)}(z)+p_1(z)y^{(n-1)}(z)+\ldots+p_{n-1}(z)y^{(1)}(z)+p_n(z)y(z)=0$ *pour laquelle z=0 est un point singulier régulier. Alors cela signifie que les limites successives suivantes doivent exister :*

$$\begin{array}{l} P_{1,0}=\underset{z\to 0}{Lim}\ z\ p_1(z) \\ P_{2,0}=\underset{z\to 0}{Lim}\ z^2 p_2(z) \\ \ldots \\ P_{n-1,0}=\underset{z\to 0}{Lim}\ z^{n-1} p_{n-1}(z) \\ P_{n,0}=\underset{z\to 0}{Lim}\ z^n p_n(z) \end{array}$$

Si l'expression de l'équation différentielle est la suivante :

$$p_0(z)y^{(n)}(z)+p_1(z)y^{(n-1)}(z)+\ldots+p_{n-1}(z)y^{(1)}(z)+p_n(z)y(z)=0$$

alors ce sont les limites suivantes qui doivent être calculées : $\begin{array}{l} P_{1,0}=\underset{z\to 0}{Lim}\ z\ \dfrac{p_1(z)}{p_0(z)} \\ P_{2,0}=\underset{z\to 0}{Lim}\ z^2\ \dfrac{p_2(z)}{p_0(z)} \\ \ldots \\ P_{n-1,0}=\underset{z\to 0}{Lim}\ z^{n-1}\ \dfrac{p_{n-1}(z)}{p_0(z)} \\ P_{n,0}=\underset{z\to 0}{Lim}\ z^n\ \dfrac{p_n(z)}{p_0(z)} \end{array}$

Ce qui peut également s'exprimer sous la forme du calcul d'un résidu : $\begin{array}{l} P_{1,0}=\underset{z\to 0}{Résidu}\left(\dfrac{p_1(z)}{p_0(z)}\right) \\ P_{2,0}=\underset{z\to 0}{Résidu}\left(z\ \dfrac{p_2(z)}{p_0(z)}\right) \\ \ldots \\ P_{n-1,0}=\underset{z\to 0}{Résidu}\left(z^{n-2}\ \dfrac{p_{n-1}(z)}{p_0(z)}\right) \\ P_{n,0}=\underset{z\to 0}{Résidu}\left(z^{n-1}\ \dfrac{p_n(z)}{p_0(z)}\right) \end{array}$

Dans toutes ces formules on peut substituer à z=0, $z=z_0$ *, lorsque* z_0 *est le point singulier régulier en question.*

Équation indicielle pour le point singulier régulier à l'infini

Pour tout point régulier z=z_0, l'équation indicielle s'écrit:

$$\begin{cases} y^{(n)}(z)+p_1(z)y^{(n-1)}(z)+\ldots+p_{n-1}(z)y^{(1)}(z)+p_n(z)y(z)=0 \\ f_0(\rho)=[\rho]_n+[\rho]_{n-1}P_{1,0}+\ldots+[\rho]_1 P_{n-1,0}+P_{n,0}=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} P_{1,0}=\underset{z\to 0}{Lim}\,(z-z_0)\,p_1(z) \\ P_{2,0}=\underset{z\to 0}{Lim}\,(z-z_0)^2\,p_2(z) \\ \ldots \\ P_{n-1,0}=\underset{z\to 0}{Lim}\,(z-z_0)^{n-1}\,p_{n-1}(z) \\ P_{n,0}=\underset{z\to 0}{Lim}\,(z-z_0)^n\,p_n(z) \end{cases}$$

Le point z=∞ est un point singulier particulier, il peut se rapprocher de z=0 par une transformation z->1/z. La condition de Fuchs pour la régularité au point z=z_0, consiste en l'existence et la finitude de toutes les limites définies plus haut. Cette condition est identique pour z=∞ à savoir :

$$\begin{cases} P_{1,\infty}=\underset{z\to\infty}{Lim}\,z\;p_1(z) \\ P_{2,\infty}=\underset{z\to\infty}{Lim}\,z^2\,p_2(z) \\ \ldots \\ P_{n-1,\infty}=\underset{z\to\infty}{Lim}\,z^{n-1}\,p_{n-1}(z) \\ P_{n,\infty}=\underset{z\to\infty}{Lim}\,z^n\,p_n(z) \end{cases}$$

Ces conditions de finitude signifie que la forme générale du développement des coefficients pl(z) de l'équation différentielle autour de z=∞ est de la forme :

$$p_l(z)=z^{-K_l}\left(a_0+\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\ldots\right)\to K_l\geq l\Rightarrow \underset{z\to\infty}{Lim}\,z^l\,p_l(z)=\underset{z\to\infty}{Lim}\,z^{l-K_l}\left(a_0+\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\ldots\right)=\underset{z\to\infty}{Lim}\,z^{l-K_l}=a_0\,\underset{z\to\infty}{Lim}\,z^{l-K_l}\quad fini$$

En posant la racine indicielle modifiée l'équation éponyme s'écrit alors :

$$\tilde{\rho}=-\rho \quad f_0(\tilde{\rho})=[\tilde{\rho}]_n+[\tilde{\rho}]_{n-1}P_{1,0}+\ldots+[\tilde{\rho}]_1 P_{n-1,0}+P_{n,0}=0$$

En d'autre termes on écrirais :

$$f_0(\rho)=[\tilde{\rho}]_n+[\tilde{\rho}]_{n-1}P_{1,0}+\ldots+[\tilde{\rho}]_1 P_{n-1,0}+P_{n,0}=0$$

$$\begin{cases} [\tilde{\rho}]_n=(-\rho)(-\rho-1)\ldots(-\rho-(n-1))=(-1)^n\,\rho\,(\rho+1)\ldots(\rho+(n-1)) \\ [\tilde{\rho}]_{n-1}=(-1)^{n-1}\,\rho\,(\rho+1)\ldots(\rho+(n-2)) \\ \ldots \\ [\tilde{\rho}]_1=-\rho \\ [\tilde{\rho}]_0=1 \end{cases}$$

Pour obtenir ce résultat, il suffit de considérer un développement de Fröbenius sous la forme, sachant les développements à l'infini des coefficients de l'équation différentielle :

$$y(z,\rho)=z^{-\rho}\left(c_0+\frac{c_1}{z}+\frac{c_2}{z}+\ldots.\right) \qquad p_l(z)=z^{-l}\times\left(P_{l,\infty}+\frac{p_{l,1}}{z}+\frac{p_{l,2}}{z^2}+\ldots\right)$$

On peut retrouver ce même résultat simple par un moyen plus compliqué consistant à effectuer le changement de variable t=1/z dans l'équation différentielle de départ. Pour cela notons tout d'abord les modifications apportées aux différentiation selon le nouveau paramètre t :

$$\begin{cases} y'(x) = -t^2 y'(t) \\ y''(x) = t^3\left(2y'(t) + t\ y''(t)\right) \\ y^{(3)}(x) = -t^4\left(6y'(t) + 6\ t\ y''(t) + t^2 y^{(3)}(t)\right) \\ y^{(4)}(x) = t^5\left(24y'(t) + 36\ t\ y''(t) + 12t^2 y^{(3)}(t) + t^3 y^{(4)}(t)\right) \\ y^{(5)}(x) = -t^6\left(120y'(t) + 240\ t\ y''(t) + 120t^2 y^{(3)}(t) + 20t^3 y^{(4)}(t) + t^4 y^{(5)}(t)\right) \\ \ldots \\ y^{(n)}(x) = (-1)^n t^{n+1}\left(n!\, y'(t) + \frac{n!\,(n-1)}{2!\,1!}\ t\ y''(t) + \frac{n!\,(n-1)(n-2)}{3!\,2!}\ t^2 y^{(3)}(t) + \ldots + \frac{n!}{(n-2)!} t^{n-2} y^{(n-1)}(t) + t^{n-1} y^{(n)}(t)\right) \end{cases}$$

Pour la dérivée n-ième, il vient :

$$y^{(n)}(x) = (-1)^n t^{n+1}\left(n!\, y'(t) + \frac{n!\,(n-1)!}{!2!\,1!\,(n-2)!}\ t\ y''(t) + \frac{n!\,(n-1)!}{3!\,2!\,(n-3)!}\ t^2 y^{(3)}(t) + \ldots + \frac{n!\,(n-1)!}{i!\,(i-1)!\,(n-i)!}\ t^{i-1} y^{(i)}(t) + \ldots + \frac{n!}{(n-2)!} t^{n-2} y^{(n-1)}(t) + t^{n-1} y^{(n)}(t)\right)$$

$$\Rightarrow y^{(n)}(x) = (-1)^n t^{n+1} \times \sum_{i=1}^{i=n} \frac{n!\,(n-1)!}{i!\,(i-1)!\,(n-i)!}\ t^{i-1} y^{(i)}(t)$$

L'équation différentielle en z : $P_0(z)y^{(n)}(z) + P_1(z)y^{(n-1)}(z) + \ldots + P_{n-1}(z)y^{(1)}(z) + P_n(z)y(z) = 0$ *devient alors*

l'équation différentielle en t :

$$y(t)P_n\left(\frac{1}{t}\right) + \sum_{l=0}^{l=n-1}(-1)^{n-l} t^{n-l+1} P_l\left(\frac{1}{t}\right)\left(\sum_{i=1}^{i=n-l}\frac{(n-l)!\,(n-l-1)!}{i!\,(i-1)!\,(n-l-i)!}\ t^{i-1} y^{(i)}(t)\right)$$

$$\Leftrightarrow y(t)P_n\left(\frac{1}{t}\right) + \sum_{l=0}^{l=n-1}\sum_{i=1}^{i=n-l}(-1)^{n-l} P_l\left(\frac{1}{t}\right) t^{n-l+i}\ \frac{(n-l)!\,(n-l-1)!}{i!\,(i-1)!\,(n-l-i)!}\ y^{(i)}(t)$$

$$\Leftrightarrow y(t)P_n\left(\frac{1}{t}\right) + \sum_{i=1}^{i=n} y^{(i)}(t) \sum_{l=0}^{l=n-i}(-1)^{n-l} t^{n-l+i} P_l\left(\frac{1}{t}\right)\frac{(n-l)!\,(n-l-1)!}{i!\,(i-1)!\,(n-l-i)!}$$

Soit les nouveaux coefficients de l'équation différentielle en t :

$$y(t)P_n\left(\frac{1}{t}\right) + \sum_{i=1}^{i=n} y^{(i)}(t) \sum_{l=0}^{l=n-i}(-1)^{n-l} t^{n-l+i} P_l\left(\frac{1}{t}\right)\frac{(n-l)!\,(n-l-1)!}{i!\,(i-1)!\,(n-l-i)!} = 0 \Leftrightarrow y(t)\,Q_n(t) + \sum_{i=1}^{i=n} Q_{n-i}(t) y^{(i)}(t) = 0$$

$$\Rightarrow Q_{n-i}(t) = \sum_{l=0}^{l=n-i}(-1)^{n-l} t^{n-l+i} P_l\left(\frac{1}{t}\right)\frac{(n-l)!\,(n-l-1)!}{i!\,(i-1)!\,(n-l-i)!}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Q_0(t) = (-1)^n t^{2n} P_0\left(\frac{1}{t}\right) \\ Q_i(t) = \sum_{l=0}^{l=i}(-1)^{n-l} t^{2n-l-i} P_l\left(\frac{1}{t}\right)\frac{(n-l)!\,(n-l-1)!}{(n-i)!\,(n-i-1)!\,(i-l)!} \quad i \in \{0, n-1\} \Rightarrow \frac{Q_i(t)}{Q_0(t)} = \sum_{l=0}^{l=i}\frac{(-1)^l}{t^{l+i}}\frac{P_l\left(\frac{1}{t}\right)}{P_0\left(\frac{1}{t}\right)}\frac{(n-l)!\,(n-l-1)!}{(n-i)!\,(n-i-1)!\,(i-l)!} \\ Q_n(t) = P_n\left(\frac{1}{t}\right) \end{cases}$$

Dans ces conditions l'équation indicielle pour le point singulier régulier t=0, s'écrit :

$$f_0(\rho) = [\rho]_n Q_{0,0} + [\rho]_{n-1} Q_{1,0} + \ldots + [\rho]_{n-i} Q_{i,0} + \ldots + [\rho]_1 Q_{n-1,0} + Q_{n,0} = 0 \qquad \begin{cases} [\rho]_n = \rho(\rho-1)\ldots(\rho-(n-1)) \\ [\rho]_{n-1} = \rho\,(\rho-1)\ldots(\rho-(n-2)) \\ \ldots \\ [\rho]_1 = \rho\,(\rho-1) \\ [\rho]_0 = 1 \end{cases}$$

Avec les valeurs des nouveaux et des anciens coefficients de l'équation indicielle :

$$\begin{cases} Q_{1,0} = \underset{t\to 0}{Lim} \quad t\,\dfrac{Q_1(t)}{Q_0(t)} \\ \ldots \\ Q_{i,0} = \underset{t\to 0}{Lim} \quad t^i\,\dfrac{Q_i(t)}{Q_0(t)} \\ \ldots \\ Q_{n-1,0} = \underset{t\to 0}{Lim} \quad t^{n-1}\,\dfrac{Q_{n-1}(t)}{Q_0(t)} \\ Q_{n,0} = \underset{t\to 0}{Lim} \quad t^n\,\dfrac{Q_n(t)}{Q_0(t)} \end{cases} \qquad \begin{cases} P_{1,\infty} = \underset{z\to \infty}{Lim} \quad z\,\dfrac{P_1(z)}{P_0(z)} \\ \ldots \\ P_{i,\infty} = \underset{z\to \infty}{Lim} \quad z^i\,\dfrac{P_i(z)}{P_0(z)} \\ \ldots \\ P_{n-1,\infty} = \underset{z\to \infty}{Lim} \quad z^{n-1}\,\dfrac{P_{n-1}(z)}{P_0(z)} \\ P_{n,\infty} = \underset{z\to \infty}{Lim} \quad z^n\,\dfrac{P_n(z)}{P_0(z)} \end{cases}$$

La limite à calculer pour l'indice i s'avère être :

$$Q_{0,0} = 1 \quad Q_{i,0} = \underset{t\to 0}{Lim}\, t^i\,\frac{Q_i(t)}{Q_0(t)} = \underset{t\to 0}{Lim} \sum_{l=0}^{l=i} (-1)^l \frac{P_l\left(\frac{1}{t}\right)}{t^l P_0\left(\frac{1}{t}\right)} \frac{(n-l)!\,(n-l-1)!}{(n-i)!\,(n-i-1)!\,(i-l)!} \quad Q_{n,0} = \underset{t\to 0}{Lim} \quad t^n\,\frac{Q_n(t)}{Q_0(t)} = (-1)^n \underset{t\to 0}{Lim} \quad \frac{P_n\left(\frac{1}{t}\right)}{t^n P_0\left(\frac{1}{t}\right)}$$

$$Or \quad \underset{t\to 0}{Lim} \quad \frac{P_l\left(\frac{1}{t}\right)}{t^l P_0\left(\frac{1}{t}\right)} = \underset{z\to \infty}{Lim} \quad z^l\,\frac{P_l(z)}{P_0(z)} = P_{l,\infty} \Rightarrow Q_{n,0} = (-1)^n \underset{z\to \infty}{Lim} \quad z^n\,\frac{P_n(z)}{P_0(z)} = (-1)^n P_{n,\infty} \qquad i \in \{1,\ldots,n-1\} \quad Q_{i,0} = \sum_{l=0}^{l=i} (-1)^l P_{l,\infty} \frac{(n-l)!\,(n-l-1)!}{(n-i)!\,(n-i-1)!\,(i-l)!}$$

Exemple n=2 : $Q_{0,0} = 1 \qquad Q_{1,0} = 2 - P_{1,\infty} \qquad Q_{2,0} = P_{2,\infty}$. *L'équation indicielle est donc la suivante :*

$$\rho(\rho-1) + \rho(2 - P_{1,\infty}) + P_{2,\infty} = 0 \Leftrightarrow \rho(\rho-1) + 2\rho - \rho\ P_{1,\infty} + P_{2,\infty} = 0 \Leftrightarrow \rho(\rho+1) - \rho\ P_{1,\infty} + P_{2,\infty}$$

Exemple n=3 : $Q_{0,0} = 1 \qquad Q_{1,0} = 6 - P_{1,\infty} \qquad Q_{2,0} = 6 - 2P_{1,\infty} + P_{2,\infty} \qquad Q_{3,0} = -P_{3,\infty}$. *L'équation indicielle est donc la suivante :*

$$\begin{aligned} &\rho(\rho-1)(\rho-2) + \rho(\rho-1)(6 - P_{1,\infty}) + \rho(6 - 2P_{1,\infty} + P_{2,\infty}) - P_{3,\infty} = 0 \\ &\Leftrightarrow \rho(\rho-1)(\rho-2) + 6\rho^2 - P_{1,\infty}\rho(\rho+1) + \rho\ P_{2,\infty} - P_{3,\infty} = 0 \\ &\Leftrightarrow -\rho(\rho+1)(\rho+2) + \rho(\rho+1)P_{1,\infty} - \rho\ P_{2,\infty} + P_{3,\infty} = 0 \end{aligned}$$

Exemple n=4 : $Q_{0,0} = 1 \qquad Q_{1,0} = 12 - P_{1,\infty} \qquad Q_{2,0} = 36 - 6P_{1,\infty} + P_{2,\infty} \qquad Q_{3,0} = 24 - 6P_{1,\infty} + 2P_{2,\infty} - P_{3,\infty} \qquad Q_{4,0} = P_{4,\infty}$. *L'équation indicielle est donc la suivante :*

$$\begin{aligned} &\rho(\rho-1)(\rho-2)(\rho-3) + \rho(\rho-1)(\rho-2)(12 - P_{1,\infty}) + \rho(\rho-1)(36 - 6P_{1,\infty} + P_{2,\infty}) + \rho(24 - 6P_{1,\infty} + 2P_{2,\infty} - P_{3,\infty}) + P_{4,\infty} = 0 \\ &\Leftrightarrow \rho(\rho-1)(\rho-2)(\rho-3) + 12\rho(\rho-1)(\rho-2) + 36\rho(\rho-1) + 24\rho - \rho(\rho+1)(\rho+2)P_{1,\infty} + \rho(\rho+1)P_{2,\infty} - \rho P_{3,\infty} + P_{4,\infty} \\ &\Leftrightarrow \rho\left((\rho-1)(\rho^2 + 7\rho + 18) + 24\right) - \rho(\rho+1)(\rho+2)P_{1,\infty} + \rho(\rho+1)P_{2,\infty} - \rho P_{3,\infty} + P_{4,\infty} \\ &\Leftrightarrow \rho(\rho+1)(\rho+2)(\rho+3) - \rho(\rho+1)(\rho+2)P_{1,\infty} + \rho(\rho+1)P_{2,\infty} - \rho P_{3,\infty} + P_{4,\infty} \end{aligned}$$

Ces trois exemples confirment bien la forme prise par l'équation indicielle au point singulier régulier z=∞.

Autre exemple de détermination de l'équation indicielle au point z=∞

Soit l'équation différentielle : $y''(z)=\left(\frac{\alpha}{z^4}+\frac{\beta}{z^3}+\frac{\gamma}{z^2}\right)y(z)$*, par le changement de variable t=1/z, elle devient l'équation :* $t\,y''(t)+2\,y'(t)=t^{-3}\left(\alpha\,t^4+\beta\,t^3+\gamma\,t^2\right)y(t)\Leftrightarrow y''(t)+\frac{2}{t}y'(t)-\left(\alpha+\frac{\beta}{t}+\frac{\gamma}{t^2}\right)y(t)=0$.

L'équation indicielle est déterminée par les deux limites :

$$Q_{1,0}=2\quad Q_{2,0}=-\gamma\Rightarrow\rho(\rho-1)+2\rho-\gamma=0\Rightarrow\rho(\rho+1)-\gamma=0$$

Avec les limites calculer en z=+∞, il vient la même équation : $P_{1,\infty}=0\quad P_{1,\infty}=-\gamma\Rightarrow\Rightarrow-\rho(-\rho-1)-\gamma=0$

Construction des fonctions indicielles $f_i(\rho)$ dans le cas de l'équation différentielle d'ordre n

Les fonctions $f_i(\rho)$ sont une extension de l'équation indicielle. Pour l'équation différentielle de utilisée par E.L.Ince autour du point z=0 régulier sous la forme :

$$z^n y^{(n)}(z)+z^{n-1}P_1(z)y^{(n-1)}(z)+\ldots+zP_{n-1}(z)y^{(1)}(z)+P_n(z)y(z)=0$$

Il s'agit des coefficients de la série de Mac-Laurin de la fonction :

$$\begin{cases} f(z,\rho)=[\rho]_n+[\rho]_{n-1}P_1(z)+\ldots+[\rho]_1P_{n-1}(z)+P_n(z)=\sum_{i=0}^{i=+\infty}f_i(\rho)z^i \\ [\rho]_n=\prod_{l=0}^{l=n-1}(\rho-l)\qquad[\rho]_1=\rho\qquad[\rho]_0=1\end{cases}$$

Dans la première forme de l'équation différentielle l'hypothèse réside dans l'analyticité des fonctions $P_1(z),P_2(z),\ldots,P_{n-1}(z),P_n(z)$*. Avec la forme suivante de l'équation différentielle :*

$$y^{(n)}(z)+p_1(z)y^{(n-1)}(z)+\ldots+p_{n-1}(z)y^{(1)}(z)+p_n(z)y(z)=0$$

il s'agit de considérer que les fonctions $zp_1(z),z^2p_2(z),\ldots,z^{n-1}p_{n-1}(z),z^np_n(z)$ *soit analytiques (holomorphes) également autour de la singularité. Si maintenant on considère la forme suivante de l'équation différentielle et un point singulier régulier $z=z_0$ autre que z=0 :*

$$p_0(z)y^{(n)}(z)+p_1(z)y^{(n-1)}(z)+\ldots+p_{n-1}(z)y^{(1)}(z)+p_n(z)y(z)=0$$

pour laquelle la fonction $z=z_0$ est une racine de la fonction $p_0(z)$ il s'agit de considérer l'hypothèse que les fonctions $(z-z_0)\frac{p_1(z)}{p_0(z)},(z-z_0)^2\frac{p_2(z)}{p_0(z)},\ldots,(z-z_0)^{n-1}\frac{p_{n-1}(z)}{p_0(z)},(z-z_0)^n\frac{p_n(z)}{p_0(z)}$ *soit toutes analytiques autour de la singularité $z=z_0$. Aussi la fonction f(z,ρ) s'écrit ici dans le cas plus général :*

$$\begin{cases} f(z,\rho)=[\rho]_n+[\rho]_{n-1}(z-z_0)\frac{p_1(z)}{p_0(z)}+[\rho]_{n-2}(z-z_0)^2\frac{p_2(z)}{p_0(z)}+\ldots+[\rho]_1(z-z_0)^{n-1}\frac{p_{n-1}(z)}{p_0(z)}+(z-z_0)^n\frac{p_n(z)}{p_0(z)} \\ f(z,\rho)=\sum_{i=0}^{i=+\infty}f_i(\rho)(z-z_0)^i\qquad[\rho]_n=\prod_{l=0}^{l=n-1}(\rho-l)\qquad[\rho]_1=\rho\qquad[\rho]_0=1\end{cases}$$

La manière la plus simple de calculer les fonctions $f_i(\rho)$ est de construire la fonction f(z,ρ) et de calculer formellement ou numériquement ses dérivées successives au point singulier $z=z_0$ soit :

$$f(z,\rho)=\sum_{i=0}^{i=+\infty}\frac{f^{(i)}(z,\rho)}{i\,!}(z-z_0)^i=\sum_{i=0}^{i=+\infty}f_i(\rho)(z-z_0)^i\Rightarrow f_i(\rho)=\frac{f^{(i)}(z_0,\rho)}{i\,!}=\frac{1}{i\,!}\times\left.\frac{\partial^i f(z,\rho)}{\partial z^i}\right|_{z=z_0}$$

Modification formelle des fonctions construites

Considérons maintenant que la fonction $y(z,\rho)=z^{\rho}\sum_{j=0}^{j=+\infty}C_j z^j$ *soit construite de la même manière sans que ρ soit une racine de l'équation indicielle, mais que ρ soit dans un rayon suffisamment proche d'une racine de l'équation sans en contenir aucune autre. Les coefficients suivent également le même schéma de récurrence :*

$$\begin{cases} C_0 \quad donné \\ C_1 f_0(\rho+1)+C_0 f_1(\rho)=0 \\ C_2 f_0(\rho+2)+C_1 f_1(\rho+1)+C_0 f_2(\rho)=0 \\ \ldots \\ C_\nu f_0(\rho+\nu)+C_{\nu-1} f_1(\rho+\nu-1)+\ldots+C_0 f_\nu(\rho)=0 \\ \ldots \end{cases}$$

Alors l'action de l'opérateur différentielle est la suivante :

$$L(y(z,\rho))=\sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty}z^{\rho+\nu}\{C_0 f_\nu(\rho)+C_1 f_{\nu-1}(\rho)+\ldots+C_{\nu-1}f_1(\rho+\nu-1)+C_\nu f_0(\rho+\nu)\}=z^{\rho}C_0 f_0(\rho)$$

Car tous les termes s'annulent à l'exception du premier.

Construction des solutions pour les racines indicielles séparées par un entier ou multiple

On va donc supposer qu'il existe parmi toutes les racines de l'équation indicielle des racines dont la différence est entière. C'est donc la situation dans laquelle dans les deux formules alternatives :

$$C_j(\rho)=C_0\frac{(-1)^j\Delta_j(\rho)}{\prod_{i=1}^{j}f_0(\rho+i)} \qquad ou \qquad C_j=-\frac{C_{j-1}f_1(\rho+j-1)+\ldots+C_0 f_j(\rho)}{f_0(\rho+j)}$$

les dénominateurs s'annulent à un certain indice.

Au préalable il convient de modifier l'ordre des racines de l'équation indicielle. Il suffit pour cela de mettre en ordre décroissant toutes les racines, puis de permuter les racines de telle manière que celles séparées par un entier forme un groupe. Dans le groupe l'ordre décroissant est préserver, mais évidemment par d'un groupe à l'autre. Dans chaque groupe indexons les racines de la même manière ρ_0, $\rho_1,\ldots,$ $\rho_{\alpha-1}$*, où α est la cardinalité du groupe de racine. Dans ces conditions pour la première racine de chaque groupe* ρ_0*, la solution locale de Fröbenius se construit par exemple par la formule précédente* $y(z,\rho)\big|_{\rho=\rho_0}=\sum_{j=0}^{j=+\infty}C_j z^{\rho_0+j}$ $\quad C_j(\rho_0)=C_0\frac{(-1)^j\Delta_j(\rho_0)}{\prod_{i=1}^{j}f_0(\rho_0+i)}$ *car dans ce cas le dénominateur* $\prod_{i=1}^{j}f_0(\rho_0+i)$ *ne peut être nul pour aucun des coefficients* C_j *car les racines dans le groupe ont été rangées préalablement par ordre décroissant, et aucune autre racines dans les autres groupes ne peut être atteinte.*

Par contre pour toutes les autres racines d'un même groupe il en est autrement et l'on doit procéder différemment pour la construction formelle. Tout d'abord comme dans le groupe toutes les racines sont séparées par une valeur entière ou nulle, on peut écrire : $\rho_0 = \omega + \rho_{\alpha-1} \qquad \omega \in \mathbf{N}$

Comme pour la fonction $y(z,\rho) = \sum_{j=0}^{j=+\infty} C_j z^{\rho+j}$ *elle comporte des coefficients avec les dénominateur s* $\prod_{i=1}^{j} f_0(\rho+i)$*, multiplions cette fonction par le coefficient :* $f(\rho) = \prod_{i=1}^{\omega} f_0(\rho+i)$ *et formons la nouvelle fonction formelle :* $\tilde{y}(z,\rho) = f(\rho)\, y(z,\rho) = f(\rho) \sum_{j=0}^{j=+\infty} C_j z^{\rho+j} = \sum_{j=0}^{j=+\infty} g_j(\rho)\, z^{\rho+j} \quad avec \quad g_j(\rho) = C_j f(\rho)$.

Passons cette fonction à l'opérateur différentielle L, il vient :

$$L(y(z,\rho)) = z^\rho C_0 f_0(\rho) \Rightarrow L(\tilde{y}(z,\rho)) = z^\rho C_0 f_0(\rho) f(\rho) = z^\rho C_0 \mathbf{F}(\rho)$$
$$avec \quad \mathbf{F}(\rho) = f_0(\rho) f(\rho) = \prod_{i=0}^{\omega} f_0(\rho+i)$$

*Il faut se rendre compte que la fonction **F(ρ)** est un polynôme de ρ lui même produit des polynômes indicielles* $f_0(\rho+i)$*. S'agissant d'une de ces racines* ρ_μ *dans le groupe de racine étudiés, supposons que m est le degré du polynôme **F(ρ)** en* $\rho-\rho_\mu$*, soit à écrire* $\mathbf{F}(\rho) = (\rho-\rho_\mu)^m P(\rho)$ *et formons toutes les dérivées partielles de la fonction* $\tilde{y}(z,\rho)$ *:* $\dfrac{\partial^s \tilde{y}(z,\rho)}{\partial \rho^s} \quad pour \quad s = 1,....,m-1$*. L'action de l'opérateur différentiel est alors la suivante :*

$$L(y(z,\rho)) = z^\rho C_0 f_0(\rho) \Rightarrow L\left(\frac{\partial^s \tilde{y}(z,\rho)}{\partial \rho^s}\right) = \frac{\partial^s L(\tilde{y}(z,\rho))}{\partial \rho^s} = C_0 \frac{\partial^s z^\rho \mathbf{F}(\rho)}{\partial \rho^s}$$

Alors si ces dérivées partielles sont toutes calculées à la valeur de la racine ρ_μ *alors ces dernières s'annulent toutes et nous avons donc :* $Pour \quad s = 1,....,m-1 \quad L\left(\left.\dfrac{\partial^s \tilde{y}(z,\rho)}{\partial \rho^s}\right|_{\rho=\rho_\mu}\right) = 0$ *, autrement dit toutes les dérivées partielles de la fonction* $\tilde{y}(z,\rho)$ *en* $\rho=\rho_\mu$ *sont solutions de l'équation différentielle. Écrivons ce résultat différemment en utilisant la formule de dérivation de Leibniz :*

$$\tilde{y}(z,\rho) = z^\rho \sum_{j=0}^{j=+\infty} g_j(\rho)\, z^j = e^{\rho\, Log(z)} \sum_{j=0}^{j=+\infty} g_j(\rho)\, z^j$$

$$Formule\ de\ Leibniz\ pour\ la\ dérivation\ d'ordre\ s \rightarrow \frac{\partial^s\,(f(\rho)g(\rho))}{\partial \rho^s} = \sum_{l=0}^{l=s} C_l^s f^{(l)}(\rho) g^{(s-l)}(\rho) \quad C_l^s = \frac{s!}{l!(s-l)!}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial^s \tilde{y}(z,\rho)}{\partial \rho^s}\right|_{\rho=\rho_\mu} = e^{\rho\, Log(z)} \sum_{j=0}^{j=+\infty} g_j^{(s)}(\rho)\, z^j + s\, Log(z)\, e^{\rho\, Log(z)} \sum_{j=0}^{j=+\infty} g_j^{(s-1)}(\rho)\, z^j + ... + s\,(Log(z))^{s-1} e^{\rho\, Log(z)} \sum_{j=0}^{j=+\infty} g_j^{(1)}(\rho)\, z^j + (Log(z))^s e^{\rho\, Log(z)} \sum_{j=0}^{j=+\infty} g_j(\rho)\, z^j$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial^s \tilde{y}(z,\rho)}{\partial \rho^s}\right|_{\rho=\rho_\mu} = \sum_{j=0}^{j=+\infty} g_j^{(s)}(\rho)\, z^{\rho+j} + s\, Log(z) \sum_{j=0}^{j=+\infty} g_j^{(s-1)}(\rho)\, z^{\rho+j} + ... + s\,(Log(z))^{s-1} \sum_{j=0}^{j=+\infty} g_j^{(1)}(\rho)\, z^{\rho+j} + (Log(z))^s \sum_{j=0}^{j=+\infty} g_j(\rho)\, z^{\rho+j}$$

$$\Rightarrow \mathbf{Y}_s(z,\rho) = \left.\frac{\partial^s \tilde{y}(z,\rho)}{\partial \rho^s}\right|_{\rho=\rho_\mu} = w_s(z,\rho) + s\, Log(z)\, w_{s-1}(z,\rho) + ... + C_l^s (Log(z))^{s-l} w_l(z,\rho) + ... + s\,(Log(z))^{s-1}\ w_1(z,\rho) + (Log(z))^s\ w_0(z,\rho)$$

$$Avec \quad w_l(z,\rho) = \sum_{j=0}^{j=+\infty} g_j^{(l)}(\rho)\, z^{\rho+j} \quad l \in \{0,...,s\}$$

Avant d'appliquer ce résultat important, rappelons que la structure du premier groupe de racines étudiées est lui même un peu plus complexe qu'il n'y paraît car il comporte des racines multiples et des racines simples, toutes ordonnées de manière décroissante. Aussi il convient de séparer le premier groupe en sous-groupe de racines multiples (ou simples), comme suit :

$$\{\rho_0,\rho_1,...,\rho_{\alpha-1}\}=\bigcup\begin{Bmatrix}\{\rho_0=...=\rho_{i-1}\}\\ \{\rho_i=...=\rho_{j-1}\}\\ ....\\ \{\rho_l=...=\rho_{\alpha-1}\}\end{Bmatrix}\qquad\begin{cases}\{\rho_0=...=\rho_{i-1}\} & multiplicit\acute{e}\quad i\\ \{\rho_i=...=\rho_{j-1}\} & multiplicit\acute{e}\quad j-i\\ .... & \\ \{\rho_l=...=\rho_{\alpha-1}\} & multiplicit\acute{e}\quad \alpha-l\end{cases}$$

*Avec ce type de découpage E.L.Ince démontre facilement quels sont les degrés polynomiaux de la fonction **F**(ρ) respectivement aux monômes $\rho-\rho_\mu$ où ρ_μ est une des racines quelconque du premier groupe :* $\mathbf{F}(\rho)=\prod_{l=0}^{\omega} f_0(\rho+i)\propto(\rho-\rho_0)^i\times(\rho-\rho_i)^j\times...\times(\rho-\rho_{\alpha-1})^l$ *. On peut aussi définir les multiplicités respectives des racines respectives des sous-groupes.*

$$\begin{cases}\rho_0\rightarrow multiplicit\acute{e}\quad \mu_0\\ \rho_i\rightarrow multiplicit\acute{e}\quad \mu_i\\ ...\\ \rho_{\alpha-1}\rightarrow multiplicit\acute{e}\quad \mu_{\alpha-1}\end{cases}\qquad \mathbf{F}(\rho)=\prod_{l=0}^{\omega} f_0(\rho+i)\propto(\rho-\rho_0)^{\mu_0}\times(\rho-\rho_i)^{\mu_0+\mu_j}\times...\times(\rho-\rho_{\alpha-1})^{\alpha-\mu_{\alpha-1}}$$

Alors les premières solutions de l'équation différentielle liées au premier sous-groupe de racine peuvent s'écrire :

$$\begin{cases}\widetilde{\mathbf{Y}}_0(z,\rho_0)=w_0(z,\rho_0)\\ \widetilde{\mathbf{Y}}_1(z,\rho_0)=Log(z)\,w_0(z,\rho_0)+w_1(z,\rho_0)\\ \widetilde{\mathbf{Y}}_2(z,\rho_0)=(Log(z))^2\;\;w_0(z,\rho_0)+2\,Log(z)\,w_1(z,\rho_0)+w_2(z,\rho_0)\\ ...\\ \widetilde{\mathbf{Y}}_{i-1}(z,\rho_0)=(Log(z))^{i-1}\;\;w_0(z,\rho_0)+(i-1)(Log(z))^{i-2}\;\;w_1(z,\rho_0)+....+C_l^{i-1}(Log(z))^{i-1-l}w_l(z,\rho_0)+....+(i-1)\,Log(z)\,w_{i-2}(z,\rho_0)+w_{i-1}(z,\rho_0)\end{cases}$$

$$Avec\quad w_l(z,\rho_0)=\sum_{j=0}^{j=+\infty} g_j^{(l)}(\rho)\Big|_{\rho=\rho_0}\;z^{\rho_0+j}\quad l\in\{0,...,i-1\}$$

Les solutions locales de ce premier sous-groupe sont indépendantes. Considérons la deuxième racine formant le deuxième sous-groupe. Pour ce deuxième sous-groupe, E.L.Ince montre que les (i-1)-ième premières dérivées sont des combinaisons linéaires des fonctions $\widetilde{\mathbf{Y}}_0(z,\rho_0),\widetilde{\mathbf{Y}}_1(z,\rho_0),\widetilde{\mathbf{Y}}_2(z,\rho_0),...,\widetilde{\mathbf{Y}}_{i-1}(z,\rho_0)$. *Ce sont les j-i dérivées suivantes qui forment un système de fonctions indépendantes :*

$$\begin{cases}\widetilde{\mathbf{Y}}_i(z,\rho_i)=(Log(z))^i\;\;w_0(z,\rho_i)+i\,(Log(z))^{i-1}\;\;w_1(z,\rho_i)+....+i\,Log(z)\,w_{i-1}(z,\rho_i)+w_i(z,\rho_i)\\ \widetilde{\mathbf{Y}}_{i+1}(z,\rho_i)=(Log(z))^{i+1}\;\;w_0(z,\rho_i)+i\,(Log(z))^i\;\;w_1(z,\rho_i)+....+i\,Log(z)\,w_i(z,\rho_i)+w_{i+1}(z,\rho_i)\\ ...\\ \widetilde{\mathbf{Y}}_{j-1}(z,\rho_i)=(Log(z))^{j-1}\;\;w_0(z,\rho_i)+(j-1)(Log(z))^{j-2}\;\;w_1(z,\rho_i)+....+C_l^{j-1}(Log(z))^{j-1-l}w_l(z,\rho_i)+....+(j-1)\,Log(z)\,w_{j-2}(z,\rho_i)+w_{j-1}(z,\rho_i)\end{cases}$$

$$Avec\quad w_l(z,\rho_i)=\sum_{j=0}^{j=+\infty} g_j^{(l)}(\rho)\Big|_{\rho=\rho_i}\;z^{\rho_i+j}\quad l\in\{0,...,j-1\}$$

Et ainsi de suite de sous-groupe en sous-groupe suivant et avec à chaque des fonctions indépendantes formés par les dérivées d'ordres immédiatement supérieurs à celui de l'ordre maximal du sous-groupe précédent et dont le nombre correspond à la multiplicité de la racine du sous-groupe.

E.L.Ince montrent ensuite que les fonctions d'un sous-groupe à l'autre sont également indépendantes.

J'illustrerais cette construction formelle par des exemples concrets tirés de l'ouvrage de A.R.Forsyth « Vol 4 Theory Of Differential Equations ».

A titre d'illustration : proportionnalité de la première solution locale de la deuxième racine indicielle séparée par un entier avec la première solution locale de la première racine indicielle

Considérons la deuxième racine ρ_i formant le deuxième sous-groupe. Disons que la première racine est de multiplicité i selon l'hypothèse de E.L.Ince. Le coefficient qui comporte un pôle est celui telle que : $\rho_i + j = \rho_0 \Rightarrow j = \rho_0 - \rho_i$. On peut simplifier le facteur multiplicatif pour neutraliser le pôle dans la récurrence : $C_j = -\frac{C_{j-1} f_1(\rho + j - 1) + \ldots + C_0 f_j(\rho)}{f_0(\rho + j)}$. Car il est finalement de la forme $(\rho + \rho_0 - \rho_i)^i$. Partons de la récurrence modifiée :

$$\widetilde{C}_0(\rho) = (\rho - \rho_i)^i \qquad \ldots \qquad \widetilde{C}_j(\rho) = -\frac{\widetilde{C}_{j-1}(\rho) f_1(\rho + j - 1) + \ldots + \widetilde{C}_0(\rho) f_j(\rho)}{f_0(\rho + j)}$$

On peut toujours écrire : $\widetilde{C}_j(\rho) = A_j(\rho)\widetilde{C}_0(\rho)$ en factorisant le premier coefficient de la récurrence.

Dans ces conditions tous les termes d'indices : $j < \rho_0 - \rho_i$ sont effectivement nuls :

$$\widetilde{C}_0(\rho)\Big|_{\rho \to \rho_i} = 0 \qquad \ldots \qquad \widetilde{C}_{\rho_0 - \rho_i - 1}(\rho)\Big|_{\rho \to \rho_i} = 0 = -\frac{\widetilde{C}_{\rho_0 - \rho_i - 2}(\rho_i) f_1(\rho_0 - 2) + \ldots + \widetilde{C}_0(\rho) f_{\rho_0 - \rho_i - 1}(\rho_i)}{f_0(\rho_0 - 1)}$$

Et pour le terme $j = \rho_0 - \rho_i$, il est effectivement non nul et fini :

$$\widetilde{C}_{\rho_0 - \rho_i}(\rho)\Big|_{\rho \to \rho_i} = \lim_{\rho \to \rho_i} -\frac{\widetilde{C}_{\rho_0 - \rho_i - 1}(\rho) f_1(\rho_0 - 1) + \ldots + \widetilde{C}_0(\rho) f_{\rho_0 - \rho_i}(\rho_i)}{f_0(\rho + \rho_0 - \rho_i)} = -\left(A_{\rho_0 - \rho_i - 1}(\rho_i) f_1(\rho_0 - 1) + \ldots + f_{\rho_0 - \rho_i}(\rho_i)\right) \times \lim_{\rho \to \rho_i} \frac{(\rho + \rho_0 - \rho_i)^i}{f_0(\rho + \rho_0 - \rho_i)}$$

Ce terme $\widetilde{C}_{\rho_0 - \rho_i}(\rho)\Big|_{\rho \to \rho_i}$ sert finalement de départ à la récurrence modifiée, le terme suivant s'écrit ainsi : $\widetilde{C}_{\rho_0 - \rho_i + 1}(\rho)\Big|_{\rho \to \rho_i} = -\frac{f_1(\rho_0)}{f_0(\rho_0 + 1)} \Rightarrow \frac{\widetilde{C}_{\rho_0 - \rho_i + 1}(\rho)\Big|_{\rho \to \rho_i}}{\widetilde{C}_{\rho_0 - \rho_i}(\rho)\Big|_{\rho \to \rho_i}} = -\frac{f_1(\rho_0)}{f_0(\rho_0 + 1)}$. Notons ce rapport comme suit :

$$B_0 = 1 \quad B_1 = \frac{\widetilde{C}_{\rho_0 - \rho_i + 1}(\rho)\Big|_{\rho \to \rho_i}}{\widetilde{C}_{\rho_0 - \rho_i}(\rho)\Big|_{\rho \to \rho_i}} = -\frac{f_1(\rho_0)}{f_0(\rho_0 + 1)} \quad B_2 = \frac{\widetilde{C}_{\rho_0 - \rho_i + 2}(\rho)\Big|_{\rho \to \rho_i}}{\widetilde{C}_{\rho_0 - \rho_i}(\rho)\Big|_{\rho \to \rho_i}} \quad \ldots$$

Or dans la récurrence les premiers termes pour la racine ρ_0 s'écrivent :

$$C_0 = 1 \quad C_1 = -\frac{C_0 f_1(\rho_0)}{f_0(\rho_0 + 1)} \quad C_2 = -\frac{C_1 f_1(\rho_0 + 1) + C_0 f_2(\rho_0)}{f_0(\rho_0 + 2)} \quad \ldots \quad C_j = -\frac{C_{j-1} f_1(\rho_0 + j - 1) + \ldots + C_0 f_j(\rho_0)}{f_0(\rho_0 + j)}$$

Prenons donc le terme suivant : $B_2 = \dfrac{\left.\widetilde{C}_{\rho_0-\rho_i+2}(\rho)\right|_{\rho\to\rho_i}}{\left.\widetilde{C}_{\rho_0-\rho_i}(\rho)\right|_{\rho\to\rho_i}} = -\dfrac{B_1 f_1(\rho_0+1) + B_0 f_2(\rho_0)}{f_0(\rho_0+2)}$*. Donc cette récurrence*

est identique à la récurrence de départ pour la racine indicielle ρ_0 et donc la première fonction locale de la racine indicielle ρ_i est strictement proportionnelle à la première fonction locale de la racine indicielle ρ_0 . En l'occurrence :

$$w_0(x,\rho_0) = x^{\rho_0}\sum_{j=0}^{j=+\infty} C_j(\rho_0)x^j \quad w_0(x,\rho_i) = x^{\rho_0}\sum_{j=0}^{j=+\infty}\widetilde{C}_j(\rho_i)x^j \to w_0(x,\rho_i) = \left.\widetilde{C}_{\rho_0-\rho_i}(\rho)\right|_{\rho\to\rho_i} \times w_0(x,\rho_0)$$

$$Avec \quad \left.\widetilde{C}_{\rho_0-\rho_i}(\rho)\right|_{\rho\to\rho_i} = -\left(A_{\rho_0-\rho_i-1}(\rho_i)f_1(\rho_0-1) + \ldots + A_0(\rho_i)f_{\rho_0-\rho_i}(\rho_i)\right) \times \underset{\rho\to\rho_i}{Lim} \frac{(\rho+\rho_0-\rho_i)^i}{f_0(\rho+\rho_0-\rho_i)}$$

$$A_0(\rho_i) = 1 \quad A_1(\rho_i) = -\frac{A_0(\rho_i)f_1(\rho_i)}{f_0(\rho_i+1)} \quad A_2(\rho_i) = -\frac{A_1(\rho_i)f_1(\rho_i+1) + A_0(\rho_i)f_2(\rho_i)}{f_0(\rho_i+2)} \quad \ldots \quad A_{\rho_0-\rho_i-1}(\rho_i) = -\frac{A_{\rho_0-\rho_i-2}(\rho_i)f_1(\rho_0-2) + \ldots + A_0(\rho_i)f_{\rho_0-\rho_i-1}(\rho_i)}{f_0(\rho_0-1)}$$

Particularité sur la construction des solutions dans le cas d'une racine multiple

La méthode d'E.L.Ince consiste à multiplier le plan de récurrence initial de Fröbenius par un facteur multiplicatif qui « neutralise » le pôle présent dans la récurrence lorsque certaines des racines inférieures à la racine de valeur maximum lui sont séparées par une valeur entière. Puis l'on effectue une ou plusieurs dérivations par rapport au paramètre indiciel ρ sur le schéma de récurrence, fixées à la valeur d'une des racines indicielles (séparées par un entier). Toutes les configurations sont alors possibles par exemple que ce ne soit la plus grande racine indicielle qui soit séparée des autres racines par un entier, mais les racines inférieurs entre elles, ou même que la racine multiple soit parmi les racines inférieures. Une première réorganisation consiste à isoler les racines qui ne posent aucun problème, dans le sens où elles ne génèrent aucun terme logarithmique. A l'inverse on isole les seules racines multiples et/ou séparées par un entier et l'on retrouve le schéma proposé par E.L.Ince.

En général on peut adapter la méthode proposée par E.L.Ince pour le facteur multiplicatif « neutralisant » en analysant directement la récurrence de Fröbenius sur l'équation différentielle étudiée sans avoir à opérer la multiplication formelle proposée par E.L.Ince.

Par ailleurs pour le premier groupe de racines, correspondant à la racine de valeur maximale et à la condition que cette dernière soit multiple, alors aucun facteur multiplicatif n'est réellement nécessaire, il suffit de garder la récurrence formelle de Fröbenius et d'effectuer les dérivations successives sur le paramètre indicielle. Prenons comme exemple la seule racine indicielle de valeur maximum de multiplicité $1 \le i \le n$ *(correspondant au premier groupe de racines de E.L.Ince) et rappelons la récurrence formelle de Fröbenius :*

$$\begin{cases} f_0(\rho) \propto (\rho-\rho_0)^i \quad y(z,\rho)=\sum_{j=0}^{j=+\infty} C_j(\rho)\, z^{\rho+l} \\ C_0(\rho)=1 \quad C_j(\rho)=-\dfrac{C_{j-1}(\rho)f_1(\rho+j-1)+\ldots+C_0(\rho)f_j(\rho)}{f_0(\rho+j)} \end{cases}$$

Il est clair qu'aucun des facteurs $f_0(\rho+j)$ *ne vas donc s'annuler et qu'il n'y a pas besoin de facteur multiplicatif. Et dans ce cas la construction des solutions indépendantes comprenant des termes logarithmiques est la suivante :*

$$\begin{cases} \mathbf{Y}_0(z,\rho_0)=w_0(z,\rho_0) \\ \mathbf{Y}_1(z,\rho_0)=Log(z)\,w_0(z,\rho_0)+w_1(z,\rho_0) \\ \mathbf{Y}_2(z,\rho_0)=(Log(z))^2\ w_0(z,\rho_0)+2\,Log(z)\,w_1(z,\rho_0)+w_2(z,\rho_0) \\ \ldots \\ \mathbf{Y}_{i-1}(z,\rho_0)=(Log(z))^{i-1}\ w_0(z,\rho_0)+(i-1)(Log(z))^{i-2}\ w_1(z,\rho_0)+\ldots.+C_l^{i-1}(Log(z))^{i-1-l}w_l(z,\rho_0)+\ldots.+(i-1)\,Log(z)\,w_{i-2}(z,\rho_0)+w_{i-1}(z,\rho_0) \end{cases}$$

$$Avec\quad \begin{cases} C_0(\rho)=1 \quad C_j(\rho)=-\dfrac{C_{j-1}(\rho)f_1(\rho+j-1)+\ldots+C_0(\rho)f_j(\rho)}{f_0(\rho+j)} \\ w_l(z,\rho_0)=\sum_{j=0}^{j=+\infty} C_j^{(l)}(\rho)\Big|_{\rho=\rho_0} z^{\rho_0+j} \quad l\in\{0,\ldots,i-1\} \end{cases}$$

<u>Conditions nécessaires sur l'absence de termes logarithmiques dans les solutions locales pour une racine donnée</u>

<u>La première des conditions</u> *est que la racine indicielle soit simple car si la racine est multiple alors il y a obligatoirement un terme logarithmique.*

Cette racine simple étant identifiée, rappelons que les racines ont été ordonnées de la plus grande à la plus petite, et que les racines dont les écarts sont des valeurs entières ont été isolées de toutes les autres racines indicielles dont la construction de Fröbenius ne pose aucun problème.

Soit ces racines ordonnées jusqu'à la racine ρ_μ *donnée :* $\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_\mu$*, avec* $\rho_0 \geq \rho_1 \geq \ldots \geq \rho_\mu$ *comme les µ-1 premières racines les solutions locales sont également solutions indicielles de la racine* ρ_μ *alors ces mêmes solutions doivent être absente de terme logarithmique, c e qui impose de facto que finalement toutes les autres racines de valeurs supérieures sont également des racines simples.*

Il en résulte que la première condition nécessaire pour l'absence de terme logarithmique pour une racine indicielle est que les racines supérieures en valeurs $\rho_0 > \rho_1 > \ldots > \rho_\mu$ *soit toutes strictement ordonnées, simple et évidement séparées par une valeur entière*

La deuxième condition porte maintenant sur la µ-ième solution locale de la racine indicielle ρ_μ *. Comme cette dernière est définie par la µ-ième dérivée sur le paramètre indicielle par :*

$$W_\mu(x,\rho) = \frac{\partial^\mu}{\partial \rho^\mu}\left\{ x^\rho \sum_{j=0}^{j=+\infty} g_j(\rho)\, x^j \right\}\Bigg|_{\rho=\rho_\mu}$$

En développant cette expression, il vient :

$$W_\mu(x,\rho) = \frac{\partial^\mu}{\partial \rho^\mu}\left\{ x^\rho \sum_{j=0}^{j=+\infty} g_j(\rho)\, x^j \right\}\Bigg|_{\rho=\rho_\mu} =$$

$$= x^{\rho_\mu} \times \left\{ (Log(x))^\mu \sum_{j=0}^{j=+\infty} g_j(\rho)\, x^j\Big|_{\rho=\rho_\mu} + \mu\, (Log(x))^{\mu-1} \sum_{j=0}^{j=+\infty} g_j^{(1)}(\rho)\Big|_{\rho=\rho_\mu} x^j + \ldots + \mu\, Log(x) \sum_{j=0}^{j=+\infty} g_j^{(\mu-1)}(\rho)\Big|_{\rho=\rho_\mu} x^j + \sum_{j=0}^{j=+\infty} g_j^{(\mu)}(\rho)\Big|_{\rho=\rho_\mu} x^j \right\}$$

Les conditions d'absence de ces termes logarithmiques sont donc que les dérivées successives des coefficients soient nulles jusqu'à l'ordre µ-1 : $\forall l \in \{0,1,\ldots,\mu-1\} \quad g_j^{(l)}(\rho)\Big|_{\rho=\rho_\mu}$ *pour toutes les valeurs des indices j.*

Concrètement selon le schéma initial d'E.L.Ince :

$$\forall j \in \mathbf{N}^+ \quad C_j(\rho) = \frac{(-1)^j \mathbf{F}_j(\rho)}{\prod_{i=1}^{j} f_0(\rho+i)} \qquad C_0(\rho) = 1 \Leftrightarrow C_j(\rho) = -\frac{C_{j-1}(\rho) f_1(\rho+j-1) + \ldots + C_0(\rho) f_j(\rho)}{f_0(\rho+j)}$$

$$\mathbf{F}_j(\rho) = \begin{bmatrix} f_1(\rho+j-1) & f_2(\rho+j-2) & f_3(\rho+j-3) & \ldots & f_{j-1}(\rho+1) & f_j(\rho) \\ f_0(\rho+j-1) & f_1(\rho+j-2) & f_2(\rho+j-3) & \ldots & f_{j-2}(\rho+1) & f_{j-1}(\rho) \\ 0 & f_0(\rho+j-2) & f_1(\rho+j+3) & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & 0 & \ldots & \ldots & f_2(\rho+1) & f_3(\rho) \\ \ldots & \ldots & \ldots & f_0(\rho+2) & f_1(\rho+1) & f_2(\rho) \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & f_0(\rho+1) & f_1(\rho) \end{bmatrix}$$

Le rapport $\frac{g_j(\rho)}{g_0(\rho)}$ *suit par construction la même récurrence :*

$$\frac{g_j(\rho)}{g_0(\rho)} = \frac{(-1)^j \mathbf{F}_j(\rho)}{\prod_{i=1}^{j} f_0(\rho+i)} = \mathbf{H}_j(\rho) \Leftrightarrow \mathbf{H}_0(\rho) = 1 \quad et \quad \mathbf{H}_j(\rho) f_0(\rho+j) + \mathbf{H}_{j-1}(\rho) f_1(\rho+j-1) + \ldots + \mathbf{H}_0(\rho) f_j(\rho) = 0$$

Comme prévu la récurrence n'est pas définie (comporte un pôle) lorsque ρ_μ+j rencontre la valeur d'une des autres racines parmi celles supérieures : $\rho_0 > \rho_1 > \ldots > \rho_{\mu-1}$*. Aussi le premier indice qui se rencontre dans cette suite d'indice j est effectivement* $j = \rho_{\mu-1} - \rho_\mu$ *et pour cette indice il convient que :* $\mathbf{H}_j(\rho)\big|_{\rho=\rho_\mu} = 0 \quad j = \rho_{\mu-1} - \rho_\mu \Rightarrow \mathbf{F}_j(\rho)\big|_{\rho=\rho_\mu} = 0 \quad j = \rho_{\mu-1} - \rho_\mu$*. Le deuxième indice rencontrée est* $j = \rho_{\mu-2} - \rho_\mu$ *conduit aux deux conditions :* $\mathbf{F}_j(\rho)\big|_{\rho=\rho_\mu} = 0 \qquad \left.\frac{\partial \mathbf{F}_j(\rho)}{\partial \rho}\right|_{\rho=\rho_\mu} = 0 \qquad j = \rho_{\mu-2} - \rho_\mu$.

Pour l'indice suivant : est $j = \rho_{\mu-3} - \rho_\mu$ *conduit à trois conditions :*

$$\mathbf{F}_j(\rho)\big|_{\rho=\rho_\mu} = 0 \qquad \left.\frac{\partial \mathbf{F}_j(\rho)}{\partial \rho}\right|_{\rho=\rho_\mu} = 0 \qquad \left.\frac{\partial^2 \mathbf{F}_j(\rho)}{\partial \rho^2}\right|_{\rho=\rho_\mu} = 0 \qquad j = \rho_{\mu-3} - \rho_\mu$$

Et ainsi de suite, ce qui conduit à la suite des conditions nécessaires suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{F}_j(\rho)\Big|_{\rho=\rho_\mu}=0 & pour \quad j=\rho_{\mu-1}-\rho_\mu \\ \mathbf{F}_j(\rho)\Big|_{\rho=\rho_\mu}=0 \quad \dfrac{\partial \mathbf{F}_j(\rho)}{\partial\rho}\Big|_{\rho=\rho_\mu}=0 & pour \quad j=\rho_{\mu-2}-\rho_\mu \\ \mathbf{F}_j(\rho)\Big|_{\rho=\rho_\mu}=0 \quad \dfrac{\partial \mathbf{F}_j(\rho)}{\partial\rho}\Big|_{\rho=\rho_\mu}=0 \quad \dfrac{\partial^2 \mathbf{F}_j(\rho)}{\partial\rho^2}\Big|_{\rho=\rho_\mu}=0 & pour \quad j=\rho_{\mu-3}-\rho_\mu \\ \ldots & \\ \mathbf{F}_j(\rho)\Big|_{\rho=\rho_\mu}=0 \quad \dfrac{\partial \mathbf{F}_j(\rho)}{\partial\rho}\Big|_{\rho=\rho_\mu}=0 \quad \ldots. \quad \dfrac{\partial^\mu \mathbf{F}_j(\rho)}{\partial\rho^\mu}\Big|_{\rho=\rho_\mu}=0 & pour \quad j=\rho_0-\rho_\mu \end{cases}$$

Il y a donc en tout $\frac{\mu(\mu+1)}{2}$ conditions nécessaires pour l'absence de terme logarithmique sur la racine indicielle simple ρ_μ.

<u>*Conditions pour qu'une singularité soit réelle ou apparente pour une racine donnée*</u>

Quelques définitions simples : un point singulier d'une équation différentielle en général conduit à une singularité dans sa solution. C'est à dire qu'en ce point la solution n'est pas définie, par exemple diverge. Pour un point singulier régulier le développement de Fröbenius peut faire apparaître une racine indicielle négative et même « fractionnaire », ainsi que des termes logarithmique liés au fait que les racines peuvent être multiple et/ou séparée par des valeurs entières . Dans ce cas on dit que la singularité en ce point est dîtes réelle.

A contrario si dans certaines circonstances toutes les solutions autour du point singulier sont continues et infiniment dérivables, et par extension sur le plan complexe dîtes analytiques (holomorphes), alors on dit que la singularité en ce point n'est qu'apparente.

La première des conditions nécessaires énoncés par E.L.Ince est que toutes les racines indicielles $\rho_0>\rho_1>\ldots>\rho_{n-1}$ sont toutes entières et simple.

La deuxième condition est liée au point précédent : il convient de cumuler pour chaque racine ρ_μ les $\frac{\mu(\mu+1)}{2}$ conditions définies ci-avant pour toutes racines indicielles : $\rho_0>\rho_1>\ldots>\rho_{n-1}$.

Pour la première il n'y en a pas, pour la deuxième 1, etc, cela donne finalement le nombre suivant de conditions nécessaires :

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=n-1}\frac{\mu(\mu+1)}{2}=\frac{1}{2}\times\left(\sum_{\mu=1}^{\mu=n-1}\mu+\sum_{\mu=1}^{\mu=n-1}\mu^2\right)=\frac{(n-1)\,n\,(n+1)}{6}$$

Exemple : 2 racines conduisent à une condition, 3 racines conduisent à 4 conditions, 4 racines conduisent à 10 conditions distinctes.

Exemple de solutions locales tirés de l'ouvrage de A.R.Forsythe « Vol 4 Theory Of Differential Equations »

Exercice 1 A.R.Forsythe paragraphe 40, page 97

Soit l'équation du second degré $x(2-x^2)y''(x)-(x^2+4x+2)((1-x)y'(x)+y(x))=0$ *dont on cherche les deux solutions locales autour de l'origine x=0. L'équation indicielle est ρ(ρ-2)=0. Les deux racines sont distinctes et non multiples, mais séparées par un entier.*

L'injection du développement de Fröbenius conduit à la récurrence à 4 termes suivante sur les coefficients :

$$y(x,\rho)=x^\rho\sum_{n=0}^{n=+\infty}g_n\,x^n \Rightarrow \begin{cases}(\rho-1)g_1-g_0=0\Rightarrow g_1=\dfrac{g_0}{\rho-1}\\ 2\rho\,(\rho+2)\,g_2-2\,(\rho+2)\,g_1-(\rho-2)^2g_0=0\Rightarrow g_2=\dfrac{g_1}{\rho}+\dfrac{g_0(\rho-2)^2}{2\rho(\rho+2)}\Rightarrow g_2=g_0\times\dfrac{(\rho^2-5\rho+10)}{2(\rho-1)(\rho+2)}\\ \ldots\\ 2(n+\rho+1)((n+\rho-1)g_{n+1}-g_n)=(n+\rho-3)((n+\rho-3)g_{n-1}-g_{n-2})\end{cases}$$

Lorsque ρ=2, la récurrence devient la suivante :

$$\begin{cases}g_1=g_0\\ g_2=\dfrac{g_1}{2}\\ \ldots\\ 2(n+3)((n+1)g_{n+1}-g_n)=(n-1)((n-1)g_{n-1}-g_{n-2})\end{cases}.$$

$$\textit{Définissons}\quad u_{n+1}=(n+1)g_{n+1}-g_n\to u_{n-1}=(n-1)g_{n-1}-g_{n-2}\Rightarrow 2(n+3)u_{n+1}=(n-1)u_{n-1}$$

Cela équivaut finalement à une récurrence à deux termes extrêmement simple puisque les coefficients u_n *sont finalement tous nuls.*

$$\begin{aligned}&u_1=g_1-g_0=0\\ &u_2=2g_2-g_1=0\\ &10\,u_3=u_2\Rightarrow u_3=3g_3-g_2=0\quad\ldots\quad u_n=0=ng_n-g_{n-1}\end{aligned}$$

Et pour les coefficients g_n *ce sont finalement ceux du développement exponentiel. La première solution locale est alors par évidence :* $y(x,2)=x^2e^x$.

Reprenons la récurrence quelque soit la valeur de ρ :

$$u_{n+1}=(n+\rho-1)g_{n+1}-g_n \Rightarrow u_{n-1}=(n+\rho-3)g_{n-1}-g_{n-3} \Rightarrow u_n=\frac{(n+\rho-4)}{2(n+\rho)}u_{n-2} \quad et \quad u_{n+1}=\frac{(n+\rho-3)}{2(n+\rho+1)}u_{n-1}$$

$$Comme \quad u_1=(\rho-1)g_1-g_0=0 \Rightarrow \forall n\geq 0 \quad u_{2n+1}=0 \quad et \quad u_0=(\rho-2)\,g_0 \quad u_{2n}=\frac{(2n+\rho-4)}{2\,(2n+\rho)}u_{2n-2}=\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{2n+\rho}\right)u_{2n-2}$$

$$g_1=\frac{g_0}{\rho-1} \qquad g_2=g_0\times\frac{(\rho^2-5\rho+10)}{2(\rho-1)(\rho+2)} \qquad u_{2n+1}=0 \qquad et \qquad u_{2n+2}=g_0\,\frac{(\rho-2)^2}{2^{n+1}}\times\frac{\rho}{(\rho+2n)(\rho+2n+2)} \Rightarrow g_{2n+1}=\frac{g_{2n}}{\rho+2n-1}$$

$$u_{2n+2}=(2n+\rho)g_{2n+2}-g_{2n+1}=g_0\,\frac{(\rho-2)^2}{2^{n+1}}\times\frac{\rho}{(\rho+2n)(\rho+2n+2)} \Rightarrow g_{2n+2}=\frac{g_{2n+1}}{\rho+2n}+\frac{g_0}{2^{n+1}}\times\frac{\rho(\rho-2)^2}{(\rho+2n)^2(\rho+2(n+1))}$$

$$g_3=\frac{g_2}{\rho+1} \quad g_4=\frac{g_3}{\rho+2}+\frac{g_0}{2^2}\times\frac{\rho(\rho-2)^2}{(\rho+2)^2(\rho+4)}=\frac{g_2}{(\rho+1)(\rho+2)}+\frac{g_0}{2^2}\times\frac{\rho(\rho-2)^2}{(\rho+2)^2(\rho+4)}$$

$$g_5=\frac{g_4}{\rho+3}=\frac{g_2}{(\rho+1)(\rho+2)(\rho+3)}+\frac{g_0}{2^2}\times\frac{\rho(\rho-2)^2}{(\rho+2)^2(\rho+3)(\rho+4)}$$

On a donc un développement respectant la récurrence quelque soit la valeur de ρ de la forme :

$$\begin{cases} y(x,\rho)=g_0\,x^{\rho}\times\left(1+\dfrac{x}{\rho-1}\right)+x^{\rho+2}\displaystyle\sum_{n=0}^{n=+\infty}g_{n+2}\,x^n \\ y(x,\rho)=g_0\,x^{\rho}\times\left(1+\dfrac{x}{\rho-1}\right)+g_2\,x^{\rho+2}\times\left(1+\dfrac{x}{\rho+1}+\dfrac{x^2}{(\rho+1)(\rho+2)}+....\right)+g_0\rho\,R(x,\rho) \\ Avec \quad g_2=g_0\times\dfrac{(\rho^2-5\rho+10)}{2(\rho-1)(\rho+2)} \quad et \quad R(x,\rho)=r_0(x)+\rho\,r_1(x)+\rho^2 r_2(x)+... \end{cases}$$

Comme les deux racines sont distinctes, non multiples et séparées par un entier, par la théorie de Frobënius le deuxième développement local autour de la singularité est de la forme :

$$\tilde{\mathbf{Y}}_1(z,\rho_0=0)=\left.\frac{\partial y(x,\rho)}{\partial\rho}\right|_{\rho=0}=(Log(z))\;w_0(x,\rho_0=0)+w_1(x,\rho_0=0)$$

$$Avec \quad w_0(x,\rho_0=0)=\sum_{j=0}^{j=+\infty}\left.g_j(\rho)\right|_{\rho=0}z^j \quad et \quad w_1(x,\rho_0=0)=\sum_{j=0}^{j=+\infty}\left.g_j^{(1)}(\rho)\right|_{\rho=0}z^j$$

Et en prenant $g_0(\rho)=C\,\rho \quad C\neq 0$*, il vient :* $w_0(x,\rho_0=0)=0 \qquad \left.\dfrac{\partial y(x,\rho)}{\partial\rho}\right|_{\rho=0}=C\,(1-x)-C\times\dfrac{5}{2}x^2e^x$

étant donné que la fonction x^2e^x *a déjà était trouvée pour l'indice ρ=2, la deuxième fonction indépendante est* $y(x,0)=1-x$*. La solution locale de l'équation différentielle :*

$$x(2-x^2)\,y''(x)-(x^2+4x+2)((1-x)y'(x)+y(x))=0$$

est donc : $y(x)=c_1\,(1-x)+c_2\,x^2e^x$ *. étant donné que ces deux fonctions indépendantes sont holomorphe dans tous le plan complexe, c'est également la solution générale de l'équation différentielle où z=x dans ce même plan.*

Exercice 2 A.R.Forsythe paragraphe 40, page 99

Recherchons les solutions locales autour de l'origine pour l'équation différentielle :

$$x\,y''(x)+y'(x)-y(x)=0$$

L'équation indicielle est $\rho^2=0$. $\rho=0$ est donc une racine double. L'injection du développement donne la récurrence suivante :

$$y(x,\rho)=x^{\rho}\sum_{n=0}^{n=+\infty}g_n\,x^n \Rightarrow \begin{cases}(\rho+1)^2g_1-g_0=0\Rightarrow g_1=\dfrac{g_0}{(\rho+1)^2}\\ (\rho+j)^2g_j-g_{j-1}=0\Rightarrow g_j=\dfrac{g_{j-1}}{(\rho+j)^2}\end{cases}$$

$$y(x,\rho)=g_0x^{\rho}\left(1+\frac{x}{(\rho+1)^2}+\frac{x^2}{((\rho+1)(\rho+2))^2}+\ldots+\frac{x^n}{((\rho+1)(\rho+2)\ldots(\rho+3))^2}+\ldots\right)$$

$$\rho=0\to y(x,0)\propto 1+\frac{x}{(1!)^2}+\frac{x^2}{(2!)^2}+\ldots+\frac{x^n}{(n!)^2}+\ldots$$

Les deux solutions locales se construisent comme suit :

$$\begin{cases}\widetilde{\mathbf{Y}}_0(x,0)=w_0(x,\rho_0=0)=y(x,0)\\ \widetilde{\mathbf{Y}}_1(x,\rho_0=0)=Log(x)\,w_0(x,\rho_0=0)+w_1(x,\rho_0=0)\end{cases}\quad Avec\quad w_0(x,0)=\sum_{j=0}^{j=+\infty}g_j(\rho)\Big|_{\rho=0}x^j\quad et\quad w_1(x,0)=\sum_{j=0}^{j=+\infty}g_j^{(1)}(\rho)\Big|_{\rho=0}x^j$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\widetilde{\mathbf{Y}}_0(x,0)=1+\dfrac{x}{(1!)^2}+\dfrac{x^2}{(2!)^2}+\ldots+\dfrac{x^n}{(n!)^2}+\ldots\\ \widetilde{\mathbf{Y}}_1(x,\rho_0=0)=Log(x)\,y(x,0)+\displaystyle\sum_{j=0}^{j=+\infty}g_j^{(1)}(\rho)\Big|_{\rho=0}x^j\end{cases}$$

Cela donne pour la deuxième solution : $w_1(x,0)=-2\times\left(x+\dfrac{3x^2}{8}+\dfrac{11x^3}{216}+\dfrac{25x^4}{6912}+\dfrac{137x^5}{864000}+\ldots\right)$

Il se trouve que $\widetilde{\mathbf{Y}}_0(x,0)$ *est en rapport avec le développement de la fonction de Bessel modifié I de degré 0 :* $\widetilde{\mathbf{Y}}_0(x,0)=I_0(2\sqrt{x})$. *Le deuxième développement est lui-même en rapport avec la fonctions de Bessel modifié K à travers la relation :* $w_1(x,0)=-2\times\left(K_0(2\sqrt{x})+\left(\dfrac{Log(x)}{2}+EulerGamma\right)\times I_0(2\sqrt{x})\right)$.

$$\Rightarrow\widetilde{\mathbf{Y}}_1(x,0)=-2K_0(2\sqrt{x})-2EulerGamma\,I_0(2\sqrt{x})$$

En d'autres termes la solution locale, qui se trouve également être analytique dans tout le plan complexe est de la forme : $y(x)=c_1I_0(2\sqrt{x})+c_2K_0(2\sqrt{x})$.

Exercice 3 A.R.Forsythe paragraphe 40, page 99

Recherchons les solutions locales autour de l'origine pour l'équation différentielle :

$$x^2(1+x)\,y''(x)-(1+2x)\left(x\,y'(x)-y(x)\right)=0$$

L'équation indicielle est $(\rho-1)^2=0$. $\rho=1$ est donc une racine double. L'injection du développement donne la récurrence suivante :

$$y(x,\rho)=x^\rho\sum_{n=0}^{n=+\infty}g_n\,x^n \Rightarrow \begin{cases}\rho^2 g_1+(\rho-2)(\rho-1)g_j=0\Rightarrow g_1=-\dfrac{(\rho-2)(\rho-1)}{\rho}\\(\rho+j)^2 g_{j+1}+(\rho+j-2)(\rho+j-1)g_j=0\Rightarrow g_{j+1}=-\dfrac{(\rho+j-2)(\rho+j-1)}{(\rho+j)^2}\times g_j\end{cases}$$

Les deux solutions locales se construisent comme suit :

$$\begin{cases}\widetilde{\mathbf{Y}}_0(x,1)=w_0(x,\rho_0=1)=y(x,1)\\\widetilde{\mathbf{Y}}_1(x,1)=Log(x)\,w_0(x,\rho_0=1)+w_1(x,\rho_0=1)\end{cases}\quad Avec\quad w_0(x,1)=x\times\sum_{j=0}^{j=+\infty}g_j(\rho)\Big|_{\rho=1}x^j\quad et\quad w_1(x,1)=x\times\sum_{j=0}^{j=+\infty}g_j^{(1)}(\rho)\Big|_{\rho=1}x^j$$

$$\rho=1\to g_1=0\Rightarrow y(x,1)=x\Rightarrow \widetilde{\mathbf{Y}}_0(x,1)=x$$

La deuxième solution se construit théoriquement comme suit :

$$g_j=-\frac{(\rho+j-3)(\rho+j-2)}{(\rho+j-1)^2}\times g_{j-1}\Rightarrow g_1=-\frac{(\rho-2)(\rho-1)}{\rho^2}\times g_0\quad g_2=-\frac{\rho(\rho-1)}{(\rho+1)^2}\times g_1=\frac{\rho(\rho-1)^2(\rho-2)}{\rho^2(\rho+1)^2}\times g_0$$

$$\Rightarrow y(x,\rho)=x^\rho\sum_{n=0}^{n=+\infty}g_n\,x^n=g_0x^\rho\left(1-\frac{(\rho-2)(\rho-1)}{\rho^2}x\right)+g_2x^{\rho+2}(1+b_1x+\ldots)=g_0x^\rho\left(1-\frac{(\rho-2)(\rho-1)}{\rho^2}x\right)+(\rho-1)^2x^{\rho+2}(c_0+c_1x+\ldots)$$

$$Si\quad g_0(\rho)=1\quad g_1(\rho)=-\frac{(\rho-2)(\rho-1)}{\rho^2}\Rightarrow g_0^{(1)}(\rho)\Big|_{\rho=1}=0\qquad g_j^{(1)}(\rho)\Big|_{\rho=1}=1\Rightarrow \widetilde{\mathbf{Y}}_1(x,\rho_0=0)=x\,Log(x)+x^2$$

Les deux solutions locales sont donc $\begin{cases}\widetilde{\mathbf{Y}}_0(x,1)=x\\\widetilde{\mathbf{Y}}_1(x,\rho_0=0)=x\,Log(x)+x^2\end{cases}$ *et elles sont également valable sur tout le plan complexe.*

Exercice 4 A.R.Forsythe paragraphe 40, page 100

Considérons une fois de plus l'équation de Bessel d'ordre 0: $x\,y''(x)+y'(x)+x\,y(x)=0$

L'équation indicielle est $\rho^2=0$. $\rho=0$ est donc une racine double. L'injection du développement donne la récurrence suivante :

$$y(x,\rho)=x^\rho\sum_{n=0}^{n=+\infty}g_n\,x^n\Rightarrow g_1=0=g_{2j+1}\qquad g_{2j}=-\frac{g_{2j-2}}{(\rho+2j)^2}$$

$$y(x,\rho)=g_0x^\rho\left(1-\frac{x^2}{(\rho+2)^2}+\frac{x^4}{((\rho+2)(\rho+4))^2}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{((\rho+2)(\rho+4)\ldots(\rho+2n))^2}+\ldots\right)\quad \rho=0\to y(x,0)\propto 1-\frac{x^2}{(2!)^2}+\frac{x^4}{(4!)^2}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n!)^2}+\ldots$$

Les deux solutions locales se construisent comme suit :

$$\begin{cases}\tilde{\mathbf{Y}}_0(x,0)=w_0(x,\rho_0=0)=y(x,0)\\ \tilde{\mathbf{Y}}_1(x,\rho_0=0)=Log(x)\,w_0(x,\rho_0=0)+w_1(x,\rho_0=0)\end{cases}\qquad Avec\quad w_0(x,0)=\sum_{j=0}^{j=+\infty} g_j(\rho)\Big|_{\rho=0}x^j \quad et \quad w_1(x,0)=\sum_{j=0}^{j=+\infty} g_j^{(1)}(\rho)\Big|_{\rho=0}x^j$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\tilde{\mathbf{Y}}_0(x,0)=1-\dfrac{x^2}{(2!)^2}+\dfrac{x^4}{(4!)^2}+\ldots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n!)^2}+\ldots\\ \tilde{\mathbf{Y}}_1(x,\rho_0=0)=Log(x)\,y(x,0)+\displaystyle\sum_{j=0}^{j=+\infty} g_j^{(1)}(\rho)\Big|_{\rho=0}x^j\end{cases}$$

Pour la deuxième solution on peut écrire les deux fonctions formelles :

$$w_0(x,\rho)=g_0x^\rho\left(1-\frac{x^2}{(\rho+2)^2}+\frac{x^4}{((\rho+2)(\rho+4))^2}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{((\rho+2)(\rho+4)\ldots(\rho+2n))^2}+\ldots\right)$$

$$w_1(x,\rho)=-\left(\begin{array}{l}\dfrac{2x^{\rho+2}}{(\rho+2)^2}\left(\dfrac{1}{\rho+2}\right)-\dfrac{2x^{\rho+4}}{(\rho+2)^2(\rho+4)^2}\left(\dfrac{1}{\rho+2}+\dfrac{1}{\rho+4}\right)+\ldots+\\ +(-1)^n\dfrac{2x^{2n}}{((\rho+1)(\rho+2)\ldots(\rho+3))^2}\left(\dfrac{1}{\rho+2}+\dfrac{1}{\rho+4}+\ldots+\dfrac{1}{\rho+2n}\right)+\ldots\end{array}\right)$$

Cela donne pour la deuxième solution :

$$w_1(x,0)=-\left(\frac{x^2}{2^2}-\frac{x^4}{(2)^2(4)^2}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{x^6}{(2\times4\times6)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2\times4\ldots\times2n)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)+\ldots\right)$$

Il se trouve que $\tilde{\mathbf{Y}}_0(x,0)$ *est en rapport avec le développement de la fonction de Bessel J de degré 0 :* $\tilde{\mathbf{Y}}_0(x,0)=J_0(x)$*. Le deuxième développement est lui-même en rapport avec la fonctions de Bessel Y à travers la relation :*

$$w_1(x,0)=(Log(2)-EulerGamma-Log(x))\times J_0(x)+\frac{\pi}{2}Y_0(x)$$
$$\Rightarrow\tilde{\mathbf{Y}}_1(x,0)=(Log(2)-EulerGamma)\times J_0(x)+\frac{\pi}{2}Y_0(x)$$

.

En d'autres termes la solution locale, qui se trouve également être analytique dans tout le plan complexe est de la forme : $y(x)=c_1J_0(x)+c_2Y_0(x)$*.*

Exercice 5 A.R.Forsythe paragraphe 40, page 101

Considérons une fois de plus l'équation de Bessel d'ordre n : $x^2y''(x)+xy'(x)+\left(x^2-n^2\right)y(x)=0$. *L'équation indicielle est* $\rho^2-n^2=0$. *Il y a donc deux racines ρ=+n et ρ=-n séparées par une valeur entière. L'injection du développement donne la récurrence suivante :*

$$y(x,\rho)=x^\rho\sum_{l=0}^{l=+\infty}g_l\,x^l \Rightarrow g_1=0=g_{2l+1} \qquad g_{2l}=-\frac{g_{2l-2}}{(\rho+n+2l)(\rho-n+2l)}$$

$$y(x,\rho)=g_0x^\rho\left(\begin{array}{l}1-\dfrac{x^2}{(\rho+n+2)(\rho-n+2)}+\dfrac{x^4}{(\rho+n+2)(\rho+n+4)(\rho-n+2)(\rho-n+4)}+\ldots+\\+(-1)^l\dfrac{x^{2l}}{(\rho+n+2)(\rho+n+4)\ldots(\rho+n+2l)(\rho-n+2)(\rho-n+4)\ldots(\rho-n+2l)}+\ldots\end{array}\right).$$

$$\rho=n\rightarrow y(x,n)=x^n\times\left(1-\frac{x^2}{2^2\times1!\,(n+1)}+\frac{x^4}{2^4\times2!\,(n+1)(n+2)}+\frac{x^6}{2^6\times3!\,(n+1)(n+2)(n+3)}+\ldots+(-1)^l\frac{x^{2l}}{2^{2l}\times l!(n+1)\times\ldots\times(n+l)}+\ldots\right)$$

La solution $y(x,-n)$ *n'est pas définie pour l'indice l=n. Le dénominateur du développement formel qui pose problème :* $l=n \quad \dfrac{1}{(\rho+n+2l)(\rho-n+2l)}$. *Pour autant il suffit de définir une nouvelle fonction en changeant le coefficient initial* g_0 *:*

$$\tilde{g}_0=\left((\rho+2n)^2-n^2\right)a_0=(\rho+3n)(\rho+n)\,a_0 \qquad \tilde{g}_{2l}=-\frac{\tilde{g}_{2l-2}}{(\rho+n+2l)(\rho-n+2l)}$$

$$\tilde{y}(x,\rho)=a_0(\rho+3n)(\rho+n)\,x^\rho\left(\begin{array}{l}1-\dfrac{x^2}{(\rho+n+2)(\rho-n+2)}+\dfrac{x^4}{(\rho+n+2)(\rho+n+4)(\rho-n+2)(\rho-n+4)}+\ldots+\\+(-1)^l\dfrac{x^{2l}}{(\rho+n+2)(\rho+n+4)\ldots(\rho+n+2l)(\rho-n+2)(\rho-n+4)\ldots(\rho-n+2l)}+\ldots\end{array}\right)$$

Alors les n-1 premiers termes de la fonction $\tilde{y}(x,-n)$ *s'annule, mais les suivants sont non nuls. Pour autant la fonction résultante est proportionnelle à la fonction* $y(x,n)$, *plus précisément il vient :*

$$\tilde{y}(x,-n)=w_0(x,\rho_1=-n)=-\frac{y(x,n)}{2^{2n-2}((n-1)!)^2}$$

Les deux solutions locales se construisent donc comme suit :

$$\begin{cases}\tilde{\mathbf{Y}}_0(x,n)=w_0(x,\rho_0=n)=y(x,n)=x^n\times\left(1-\dfrac{x^2}{2^2\times1!\,(n+1)}+\dfrac{x^4}{2^4\times2!\,(n+1)(n+2)}+\dfrac{x^6}{2^6\times3!\,(n+1)(n+2)(n+3)}+\ldots+(-1)^l\dfrac{x^{2l}}{2^{2l}\times l!(n+1)\times\ldots\times(n+l)}+\ldots\right)\\ \tilde{\mathbf{Y}}_1(x,\rho_1=-n)=Log(x)\,w_0(x,\rho_1=-n)+w_1(x,\rho_1=-n)\end{cases}$$

$$Avec \quad w_0(x,n)=\sum_{j=0}^{j=+\infty}g_j(\rho)\Big|_{\rho=n}x^j \quad et \quad w_0(x,-n)=\sum_{j=0}^{j=+\infty}\tilde{g}_j(\rho)\Big|_{\rho=-n}x^j=-\frac{w_0(x,n)}{2^{2n-2}((n-1)!)^2} \quad et \quad w_1(x,0)=\sum_{j=0}^{j=+\infty}\tilde{g}_j^{(1)}(\rho)\Big|_{\rho=-n}x^j$$

La première solution locale est proportionnelle à la fonction de Bessel J d'ordre n, à savoir :

$$\widetilde{\mathbf{Y}}_0(x,n) = 2^n n!\, J_n(x)$$

Les expressions de $w_1(x,-n) = \sum_{j=0}^{j=+\infty} \widetilde{g}_j^{(1)}(\rho)\Big|_{\rho=-n} x^j$ *sont les suivantes pour différentes valeurs de n :*

$$w_1(x,-1) = \frac{2}{x} - \frac{3}{32}x^3 + \frac{7}{1152}x^5 - \frac{35}{221184}x^7 + \frac{101}{44236800}x^9 + \ldots$$
$$w_1(x,-2) = \frac{4}{x^2} + 1 - \frac{1}{72}x^4 + \frac{25}{36864}x^6 - \frac{157}{11059200}x^8 + \frac{91}{530841600}x^{10} + \ldots$$
$$w_1(x,-3) = \frac{6}{x^3} + \frac{3}{4x} + \frac{3}{32}x - \frac{5}{8192}x^5 + \frac{39}{1638400}x^7 - \frac{49}{117964800}x^9 + \frac{199}{46242201600}x^{11} + \ldots$$
$$w_1(x,-4) = \frac{8}{x^4} + \frac{3}{2x^2} + \frac{1}{24} + \frac{1}{288}x^2 - \frac{1}{76800}x^6 + \frac{7}{16588800}x^8 - \frac{41}{6502809600}x^{10} + \frac{761}{13317754060800}x^{12} + \ldots$$

Ces expressions sont en relation directe avec une combinaison linéaire de fonctions de Bessel d'ordre n : Log(x)J_n(x) et Y_n(x), plus précisément :

$$w_1(x,-n) = -\frac{n}{2^{n-1}(n-1)!}\left(\pi\, Y_n(x) + \left(2Log(2) - 2Log(x) - EulerGamma + \psi(0,1+n)\right) \times J_n(x)\right)$$
$$\psi(0,1+n) \quad Fonction \quad PolyGamma \quad \psi(m,x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{m+1} Log(\Gamma(x)) \Rightarrow \psi(0,x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$$

Cela donne donne pour la deuxième fonctions locale :

$$w_0(x,-n) = -\frac{w_0(x,n)}{2^{2n-2}((n-1)!)^2} = -\frac{n}{2^{n-2}(n-1)!} J_n(x)$$
$$\widetilde{\mathbf{Y}}_1(x,\rho_1 = -n) = -\frac{n}{2^{n-1}(n-1)!}\left(\pi\, Y_n(x) + \left(2Log(2) - EulerGamma + \psi(0,1+n)\right) \times J_n(x)\right)$$

En d'autres termes la solution locale, qui se trouve également être analytique dans tout le plan complexe est de la forme : $y(x) = c_1 J_n(x) + c_2 Y_n(x)$.

Exercice 6 A.R.Forsythe paragraphe 40, page 103

Recherchons les solutions locales autour du point singulier régulier x=0 pour l'équation différentielle hypergéométrique : $x\,(1-x)\,y''(x) + (1-(a+b+1)\,x)\,y'(x) - a\,b\,y(x) = 0$. *L'équation indicielle est* $\rho^2=0$. *ρ=0 est donc une racine double pour la solution locale. L'injection du développement conduit à la récurrence suivante :*

$$y(x,\rho) = x^\rho \sum_{l=0}^{l=+\infty} g_l\, x^l \Rightarrow g_0 = 1 \quad g_l = \frac{(\rho+a+l-1)(\rho+b+l-1)}{(\rho+l)^2} g_{l-1}$$
$$y(x,\rho) = g_0 x^\rho \left(1 + \frac{(\rho+a)(\rho+b)}{(\rho+1)^2}x + \frac{(\rho+a)(\rho+a+1)(\rho+b)(\rho+b+1)}{(\rho+1)^2(\rho+2)^2}x^2 + \ldots + \frac{(\rho+a)_l(\rho+b)_l}{((\rho+1)_l)^2}x^l + \ldots\right).$$
$$\rho = 0 \rightarrow y(x,0) = 1 + \frac{a\,b}{(1!)^2}x + \frac{a\,(a+1)\,b\,(b+1)}{(2!)^2}x^2 + \ldots + \frac{a_l b_l}{(l!)^2}x^l + \ldots = {}_2F_1(a,b\,;1;x)$$

Les deux solutions locales se construisent comme suit :

$$\begin{cases}\tilde{\mathbf{Y}}_0(x,0)=w_0(x,\rho_0=0)=y(x,0)\\ \tilde{\mathbf{Y}}_1(x,\rho_0=0)=Log(x)\,w_0(x,\rho_0=0)+w_1(x,\rho_0=0)\end{cases}\quad Avec\quad w_0(x,0)=\sum_{j=0}^{j=+\infty} g_j(\rho)\Big|_{\rho=0}x^j\quad et\quad w_1(x,0)=\sum_{j=0}^{j=+\infty} g_j^{(1)}(\rho)\Big|_{\rho=0}x^j$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\tilde{\mathbf{Y}}_0(x,0)=1+\dfrac{a\,b}{(1!)^2}x+\dfrac{a\,(a+1)\,b\,(b+1)}{(2!)^2}x^2+\ldots+\dfrac{a_l b_l}{(l!)^2}x^l+\ldots={}_2F_1(a,b\,;1;x)\\ \tilde{\mathbf{Y}}_1(x,\rho_0=0)=Log(x)\,y(x,0)+\displaystyle\sum_{j=0}^{j=+\infty} g_j^{(1)}(\rho)\Big|_{\rho=0}x^j\end{cases}$$

Pour la deuxième solution on peut écrire les deux fonctions formellement :

$$w_0(x,\rho)=g_0x^\rho\left(1+\frac{(\rho+a)(\rho+b)}{(\rho+1)^2}x+\frac{(\rho+a)(\rho+a+1)(\rho+b)(\rho+b+1)}{(\rho+1)^2(\rho+2)^2}x^2+\ldots+\frac{(\rho+a)_l(\rho+b)_l}{((\rho+1)_l)^2}x^l+\ldots\right)$$

$$(\rho+a)_l=\frac{\Gamma(\rho+a+l)}{\Gamma(\rho+a)}\Rightarrow\frac{d}{d\rho}(\rho+a)_l=\left(\frac{\Gamma'(\rho+a+l)}{\Gamma(\rho+a+l)}-\frac{\Gamma'(\rho+a)}{\Gamma(\rho+a)}\right)(\rho+a)_l=(\Psi(\rho+a+l)-\Psi(\rho+a))(\rho+a)_l$$

$$De\ plus\quad \Psi(\rho+a+l)-\Psi(\rho+a)=\Psi(\rho+a+l)-\Psi(\rho+a+l-1)+\ldots+\Psi(\rho+a+1)-\Psi(\rho+a)\quad et\quad \Psi(\rho+a+l)-\Psi(\rho+a+l-1)=\frac{1}{\rho+a+l-1}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\Psi(\rho+a+l)-\Psi(\rho+a)=\dfrac{1}{\rho+a+l-1}+\dfrac{1}{\rho+a+l-2}+\ldots+\dfrac{1}{\rho+a}=\displaystyle\sum_{i=0}^{i=l-1}\frac{1}{\rho+a+i}\\ \Psi(\rho+b+l)-\Psi(\rho+b)=\displaystyle\sum_{i=0}^{i=l-1}\frac{1}{\rho+b+i}\\ \Psi(\rho+1+l)-\Psi(\rho+1)=\displaystyle\sum_{i=0}^{i=l-1}\frac{1}{\rho+1+i}\end{cases}$$

$$w_1(x,\rho)=g_0x^\rho\left(\begin{aligned}&1+(\Psi(\rho+a+1)-\Psi(\rho+a)+\Psi(\rho+b+1)-\Psi(\rho+b)-2(\Psi(\rho+2)-\Psi(\rho+1)))\frac{(\rho+a)(\rho+b)}{(\rho+1)^2}x+\ldots+\\&+(\Psi(\rho+a+l)-\Psi(\rho+a)+\Psi(\rho+b+l)-\Psi(\rho+b)-2(\Psi(\rho+1+l)-\Psi(\rho+1)))\frac{(\rho+a)_l(\rho+b)_l}{((\rho+1)_l)^2}x^l+\ldots\end{aligned}\right)$$

$$\Rightarrow w_1(x,\rho)=g_0x^\rho\left(\begin{aligned}&1+\left(\frac{1}{\rho+a}+\frac{1}{\rho+b}-\frac{2}{\rho+1}\right)\frac{(\rho+a)(\rho+b)}{(\rho+1)^2}x+\ldots+\\&+(\Psi(\rho+a+l)-\Psi(\rho+a)+\Psi(\rho+b+l)-\Psi(\rho+b)-2(\Psi(\rho+1+l)-\Psi(\rho+1)))\frac{(\rho+a)_l(\rho+b)_l}{((\rho+1)_l)^2}x^l+\ldots\end{aligned}\right)$$

Cela donne pour la deuxième fonction $w_1(x,0)$ *:*

$$w_0(x,\rho)=g_0x^\rho\left(1+\frac{(\rho+a)(\rho+b)}{(\rho+1)^2}x+\frac{(\rho+a)(\rho+a+1)(\rho+b)(\rho+b+1)}{(\rho+1)^2(\rho+2)^2}x^2+\ldots+\frac{(\rho+a)_l(\rho+b)_l}{((\rho+1)_l)^2}x^l+\ldots\right)$$

$$(\rho+a)_l=\frac{\Gamma(\rho+a+l)}{\Gamma(\rho+a)}\Rightarrow\frac{d}{d\rho}(\rho+a)_l=\left(\frac{\Gamma'(\rho+a+l)}{\Gamma(\rho+a+l)}-\frac{\Gamma'(\rho+a)}{\Gamma(\rho+a)}\right)(\rho+a)_l=(\Psi(\rho+a+l)-\Psi(\rho+a))(\rho+a)_l$$

$$De\ plus\quad \Psi(\rho+a+l)-\Psi(\rho+a)=\Psi(\rho+a+l)-\Psi(\rho+a+l-1)+\ldots+\Psi(\rho+a+1)-\Psi(\rho+a)\quad et\quad \Psi(\rho+a+l)-\Psi(\rho+a+l-1)=\frac{1}{\rho+a+l-1}$$

$$\Rightarrow w_1(x,0)=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-2\right)\frac{a\,b}{1^2}x+\ldots+\left(\sum_{i=0}^{i=l-1}\frac{1}{a+i}+\sum_{i=0}^{i=l-1}\frac{1}{b+i}-2\times\sum_{i=0}^{i=l-1}\frac{1}{1+i}\right)\frac{(a)_l(b)_l}{(l\,!)^2}x^l+\ldots$$

D'où les deux solutions locales autour de x=0 :

$$\begin{cases} \widetilde{\mathbf{Y}}_0(x,0)=1+\dfrac{a\,b}{(1!)^2}\,x+\dfrac{a\,(a+1)\,b\,(b+1)}{(2!)^2}\,x^2+\ldots+\dfrac{a_l b_l}{(l!)^2}\,x^l+\ldots={}_2F_1(a,b\,;1;x) \\ \widetilde{\mathbf{Y}}_1(x,0)=Log(x)\;{}_2F_1(a,b\,;1;x)+\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-2\right)\dfrac{a\,b}{1^2}\,x+\ldots+\left(\displaystyle\sum_{i=0}^{i=l-1}\dfrac{1}{a+i}+\sum_{i=0}^{i=l-1}\dfrac{1}{b+i}-2\times\sum_{i=0}^{i=l-1}\dfrac{1}{1+i}\right)\dfrac{(a)_l(b)_l}{(l\,!)^2}\,x^l+\ldots \end{cases}$$

Qu'en est-il maintenant des solutions locales autour du point singulier régulier x=1 ?

Pour cela effectuons un changement de variable u=1-x dans l'équation différentielle hypergéométrique, il vient :

$$\begin{aligned} &u\,(1-u)\,y''(u)-(1-(a+b+1)(1-u))\,y'(u)-a\,b\;y(u)=0 \\ \Leftrightarrow\; &u\,(1-u)\,y''(u)+(a+b-(a+b+1)u)\,y'(u)-a\,b\;y(u)=0 \end{aligned}$$

Supposons maintenant que a+b=1, c'est la même équation différentielle. Dans ces conditions les solutions locales autour de u=0, soit x=1 sont identiques à savoir :

$$\begin{cases} \widetilde{\mathbf{Y}}_0(x,0)=1+\dfrac{a\,b}{(1!)^2}\,(1-x)+\dfrac{a\,(a+1)\,b\,(b+1)}{(2!)^2}\,(1-x)^2+\ldots+\dfrac{a_l b_l}{(l!)^2}\,(1-x)^l+\ldots={}_2F_1(a,b\,;1;1-x) \\ \widetilde{\mathbf{Y}}_1(x,0)=Log(1-x)\;{}_2F_1(a,b\,;1;1-x)+\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-2\right)\dfrac{a\,b}{1^2}\,(1-x)+\ldots+\left(\displaystyle\sum_{i=0}^{i=l-1}\dfrac{1}{a+i}+\sum_{i=0}^{i=l-1}\dfrac{1}{b+i}-2\times\sum_{i=0}^{i=l-1}\dfrac{1}{1+i}\right)\dfrac{(a)_l(b)_l}{(l\,!)^2}\,(1-x)^l+\ldots \end{cases}$$

Si maintenant a+b<>1, alors l'équation indicielle est ρ(ρ+a+b-1)=0, soit deux racines distinctes ρ=0 et ρ=1-a-b. L'injection du développement conduit à la récurrence suivante :

$$\begin{aligned} &y(u,\rho)=u^\rho\sum_{l=0}^{l=+\infty}g_l\,u^l\Rightarrow g_0=1\quad g_l=\frac{(\rho+a+l-1)(\rho+b+l-1)}{(\rho+l)(\rho+a+b-1+l)}\,g_{l-1} \\ &y(x,\rho)=g_0u^\rho\left(1+\frac{(\rho+a)(\rho+b)}{(\rho+1)(\rho+a+b)}\,u+\frac{(\rho+a)(\rho+a+1)(\rho+b)(\rho+b+1)}{(\rho+1)(\rho+2)(\rho+a+b)(\rho+a+b+1)}\,u^2+\ldots+\frac{(\rho+a)_l(\rho+b)_l}{(\rho+1)_l(\rho+a+b)_l}\,u^l+\ldots\right) \end{aligned}$$

Si a+b n'a pas de valeur entière, alors les deux racines ne sont pas séparées par un entier et l'on peut directement construire les deux solutions locales :

$$\begin{aligned} &y(u,\rho)=u^\rho\sum_{l=0}^{l=+\infty}g_l\,u^l\Rightarrow g_0=1\quad g_l=\frac{(\rho+a+l-1)(\rho+b+l-1)}{(\rho+l)(\rho+a+b-1+l)}\,g_{l-1} \\ &y(u,\rho)=g_0u^\rho\left(1+\frac{(\rho+a)(\rho+b)}{(\rho+1)(\rho+a+b)}\,u+\frac{(\rho+a)(\rho+a+1)(\rho+b)(\rho+b+1)}{(\rho+1)(\rho+2)(\rho+a+b)(\rho+a+b+1)}\,u^2+\ldots+\frac{(\rho+a)_l(\rho+b)_l}{(\rho+1)_l(\rho+a+b)_l}\,u^l+\ldots\right) \\ &\rho=0\rightarrow y(u,0)=1+\frac{a\,b}{1!(a+b)}\,u+\frac{a\,(a+1)\,b\,(b+1)}{2!(a+b)(a+b+1)}\,u^2+\ldots+\frac{a_l b_l}{l!(a+b)_l}\,u^l+\ldots={}_2F_1(a,b\,;a+b;u) \\ &\rho=1-a-b\rightarrow y(u,1-a-b)=u^{1-a-b}\left(1+\frac{(1-b)(1-a)}{1!(2-a-b)}\,u+\frac{(1-a)(2-a)(1-b)(2-b)}{2!(2-a-b)(3-a-b)}\,u^2+\ldots+\frac{(1-a)_l(1-b)_l}{l!(2-a-b)_l}\,u^l+\ldots\right)=u^{1-a-b}\,{}_2F_1(1-a,1-b\,;2-a-b;u) \end{aligned}$$

Il reste à traiter le cas où a+b est un entier supérieur à 1 : Les deux solutions locales sont définies comme suit :

$$y(u,\rho)=g_0u^\rho\left(1+\frac{(\rho+a)(\rho+b)}{(\rho+1)(\rho+a+b)}u+\frac{(\rho+a)(\rho+a+1)(\rho+b)(\rho+b+1)}{(\rho+1)(\rho+2)(\rho+a+b)(\rho+a+b+1)}u^2+\ldots+\frac{(\rho+a)_l(\rho+b)_l}{(\rho+1)_l(\rho+a+b)_l}u^l+\ldots\right)$$

$$Si\quad a+b\in\mathbf{N}\quad \rho=1-a-b\rightarrow y(u,1-a-b)=u^{1-a-b}\left(1+\frac{(1-b)(1-a)}{1!(2-a-b)}u+\frac{(1-a)(2-a)(1-b)(2-b)}{2!(2-a-b)(3-a-b)}u^2+\ldots+\frac{(1-a)_l(1-b)_l}{l!(2-a-b)_l}u^l+\ldots\right)$$

$$Terme\quad l=a+b-1\rightarrow\frac{1}{(\rho+1)_{a+b-1}}\propto\frac{1}{\rho+a+b-1}\quad divergeant\Rightarrow\tilde{g}_0=\rho+a+b-1\quad \tilde{g}_l=\frac{(\rho+a+b-1)}{(\rho+1)_l}\times\frac{(\rho+a)_l(\rho+b)_l}{(\rho+a+b)_l}\quad \tilde{y}(u,\rho)=\sum_{l=0}^{l=1}\tilde{g}_lu^{\rho+l}$$

$$\tilde{y}(u,\rho)=(\rho+a+b-1)u^\rho\left(1+\frac{(\rho+a)(\rho+b)}{(\rho+1)(\rho+a+b)}u+\frac{(\rho+a)(\rho+a+1)(\rho+b)(\rho+b+1)}{(\rho+1)(\rho+2)(\rho+a+b)(\rho+a+b+1)}u^2+\ldots+\frac{(\rho+a)_l(\rho+b)_l}{(\rho+1)_l(\rho+a+b)_l}u^l+\ldots\right)$$

$$\Rightarrow\tilde{y}(u,\rho=1-a-b)=(\rho+a+b-1)\frac{(1-a)_{a+b-1}(1-b)_{a+b-1}}{(\rho+1)_{a+b-1}(1)_{a+b-1}}u^0+(\rho+a+b-1)\frac{(1-a)_{a+b}(1-b)_{a+b}}{(\rho+1)_{a+b}(1)_{a+b}}u^1+\ldots$$

$$Comme\quad \lim_{\rho\to1-a-b}\frac{(\rho+a+b-1)}{(\rho+1)_{a+b-1}}=\frac{(a+b)(a+b-1)}{(-a-b)_{a+b}}\quad \lim_{\rho\to1-a-b}\frac{(\rho+a+b-1)}{(\rho+1)_{a+b}}=\frac{1}{1!}\frac{(a+b)(a+b-1)}{(-a-b)_{a+b}}\quad\ldots$$

$$(1-a)_{a+b-1}=(1-a)(2-a)\ldots(b-1)\qquad(1-b)_{a+b-1}=(1-b)(2-b)\ldots(a-1)$$

$$(1-a)_{a+b}=b\,(1-a)_{a+b-1}\qquad(1-b)_{a+b}=a\,(1-b)_{a+b-1}\qquad(1)_{a+b}=(a+b)(1)_{a+b-1}$$

$$\Rightarrow\tilde{y}(u,\rho=1-a-b)=\frac{(a+b)^2(a+b-1)(1-a)_{a+b-1}(1-b)_{a+b-1}}{(-a-b)_{a+b}(a+b)!}\left(u^0+\frac{a\,b}{1!(a+b)}u^1+\frac{a\,(a+1)\,b\,(b+1)}{2!(a+b)(a+b+1)}u^2+\ldots+\right)=\frac{(a+b)^2(a+b-1)(1-a)_{a+b-1}(1-b)_{a+b-1}}{(-a-b)_{a+b}(a+b)!}\times y(u,\rho=0)$$

La première des solutions est donc parfaitement proportionnel à la solution locale de la racine indicielle ρ=0. On retrouve bien le résultat théorique donné par E.L.Ince.

Il reste donc à construire explicitement la seconde solution par dérivation sur le paramètre ρ de chacun des coefficients du développement $\tilde{y}(u,\rho)$ *.*

$$\tilde{\mathbf{Y}}_1(u,\rho_1=1-a-b)=Log(x)\,\tilde{y}(u,\rho=1-a-b)+w_1(u,\rho_1=1-a-b)=\frac{(a+b)^2(a+b-1)(1-a)_{a+b-1}(1-b)_{a+b-1}}{(-a-b)_{a+b}(a+b)!}Log(u)\,y(u,0)+w_1(u,\rho_1=1-a-b)$$

$$\tilde{g}_0(\rho)=\rho+a+b-1\quad \tilde{g}_l(\rho)=\frac{(\rho+a+b-1)}{(\rho+1)_l}\times\frac{(\rho+a)_l(\rho+b)_l}{(\rho+a+b)_l}\Rightarrow\tilde{g}_0^{(1)}(\rho)\Big|_{\rho=1-a-b}=1$$

$$\tilde{g}_l^{(1)}(\rho)\Big|_{\rho=1-a-b}=\left\{\begin{array}{l}\left(\sum_{i=0}^{i=l-1}\frac{1}{1-a+i}+\sum_{i=0}^{i=l-1}\frac{1}{1-b+i}-\sum_{i=0}^{i=l-1}\frac{1}{1+i}\right)\left(\begin{array}{l}0\quad si\quad l<a+b-1\\ \frac{(a+b)^2(a+b-1)(1-a)_{a+b-1}(1-b)_{a+b-1}}{(-a-b)_{a+b}(a+b)!}\times\frac{(a)_{l-a-b+1}(b)_{l-a-b+1}}{(1)_{l-a-b+1}(a+b)_{l-a-b+1}}\quad si\quad l\geq a+b-1\end{array}\right)+\\ +\frac{(1-a)_l(1-b)_l}{(1)_l}\lim_{\rho\to1-a-b}\quad\frac{\rho+a+b-1}{(\rho+1)_l}\times\left(\frac{1}{\rho+a+b-1}-\sum_{i=0}^{i=l-1}\frac{1}{\rho+1+i}\right)\end{array}\right\}$$

$$w_1(u,1-a-b)=\sum_{l=0}^{l=+\infty}\tilde{g}_l^{(1)}(\rho)\Big|_{\rho=1-a-b}u^j$$

Nous avons donc finalement les deux solutions locales autour de la singularité x=1 :

$$u=1-x \qquad \widetilde{\mathbf{Y}}_0(u,0)=1+\frac{a\,b}{1!(a+b)}u+\frac{a(a+1)b(b+1)}{2!(a+b)(a+b+1)}u^2+...+\frac{a_l b_l}{l!(a+b)_l}u^l+...={}_2F_1(a,b\,;a+b;u)$$

$$\widetilde{\mathbf{Y}}_1(u,1-a-b)=\frac{(a+b)^2(a+b-1)(1-a)_{a+b-1}(1-b)_{a+b-1}}{(-a-b)_{a+b}(a+b)!}Log(u)\,\widetilde{\mathbf{Y}}_0(u,0)+w_1(u,1-a-b)$$

Avec

$$\left.\widetilde{g}_0^{(1)}(\rho)\right|_{\rho=1-a-b}=1$$

$$\left.\widetilde{g}_l^{(1)}(\rho)\right|_{\rho=1-a-b}=\left\{\begin{array}{l}\left(\sum_{i=0}^{i=l-1}\frac{1}{1-a+i}+\sum_{i=0}^{i=l-1}\frac{1}{1-b+i}-\sum_{i=0}^{i=l-1}\frac{1}{1+i}\right)\left(\begin{array}{l}0 \quad si \quad l<a+b-1\\ \frac{(a+b)^2(a+b-1)(1-a)_{a+b-1}(1-b)_{a+b-1}}{(-a-b)_{a+b}(a+b)!}\times\frac{(a)_{l-a-b+1}(b)_{l-a-b+1}}{(1)_{l-a-b+1}(a+b)_{l-a-b+1}} \quad si \quad l\geq a+b-1\end{array}\right)+\\ +\frac{(1-a)_l(1-b)_l}{(1)_l}\underset{\rho\to 1-a-b}{Lim}\quad\frac{\rho+a+b-1}{(\rho+1)_l}\times\left(\frac{1}{\rho+a+b-1}-\sum_{i=0}^{i=l-1}\frac{1}{\rho+1+i}\right)\end{array}\right\}$$

$$w_1(u,1-a-b)=\sum_{l=0}^{l=+\infty}\left.\widetilde{g}_l^{(1)}(\rho)\right|_{\rho=1-a-b}u^j$$

Par le changement de variable z=1-2x sur l'équation différentiel de Legendre, elle devient l'équation différentielle hypergéométrique :

$$(1-z^2)\,y''(z)-2z\,y'(z)+p\,(p+1)\,y(z)=0\Leftrightarrow x\,(1-x)\,y''(x)+(1-2x)y'(x)+p\,(p+1)\,y(x)=0$$

Par identification a=-p, b=p+1, les solutions locales autour du point x=0, soit z=1 sont les suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l}\widetilde{\mathbf{Y}}_0(z,0)=1+\frac{(-p)(p+1)}{(1!)^2}\left(\frac{1-z}{2}\right)+\frac{(-p)(-p+1)(p+1)(p+2)}{(2!)^2}\left(\frac{1-z}{2}\right)^2+...+\frac{(-p)_l(p+1)_l}{(l!)^2}\left(\frac{1-z}{2}\right)^l+...={}_2F_1\left(-p,p+1\,;1;\frac{1-z}{2}\right)\\ \widetilde{\mathbf{Y}}_1(z,0)=Log\left(\frac{1-z}{2}\right){}_2F_1\left(-p,p+1\,;1;\frac{1-z}{2}\right)+\left(-\frac{1}{p}+\frac{1}{p+1}-2\right)\frac{(-p)(p+1)}{1^2}\left(\frac{1-z}{2}\right)+...+\left(\sum_{i=0}^{i=l-1}\frac{1}{-p+i}+\sum_{i=0}^{i=l-1}\frac{1}{p+1+i}-2\times\sum_{i=0}^{i=l-1}\frac{1}{1+i}\right)\frac{(-p)_l(p+1)_l}{(l\,!)^2}\left(\frac{1-z}{2}\right)^l+...\end{array}\right.$$

Les solutions locales autour du point x=1, soit z=-1 sont les suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l}\widetilde{\mathbf{Y}}_0(z,0)=1+\frac{(-p)(p+1)}{(1!)^2}\left(\frac{1+z}{2}\right)+\frac{(-p)(-p+1)(p+1)(p+2)}{(2!)^2}\left(\frac{1+z}{2}\right)^2+...+\frac{(-p)_l(p+1)_l}{(l!)^2}\left(\frac{1+z}{2}\right)^l+...={}_2F_1\left(-p,p+1\,;1;\frac{1+z}{2}\right)\\ \widetilde{\mathbf{Y}}_1(z,0)=Log\left(\frac{1+z}{2}\right){}_2F_1\left(-p,p+1\,;1;\frac{1+z}{2}\right)+\left(-\frac{1}{p}+\frac{1}{p+1}-2\right)\frac{(-p)(p+1)}{1^2}\left(\frac{1+z}{2}\right)+...+\left(\sum_{i=0}^{i=l-1}\frac{1}{-p+i}+\sum_{i=0}^{i=l-1}\frac{1}{p+1+i}-2\times\sum_{i=0}^{i=l-1}\frac{1}{1+i}\right)\frac{(-p)_l(p+1)_l}{(l\,!)^2}\left(\frac{1+z}{2}\right)^l+...\end{array}\right.$$

Exemple 2 A.R.Forsythe Chapitre 108, page 347

En marge de l'étude sur les singularités non régulières des équations différentielles (voir plus loin dans ce document), voici une équation différentielle de Hamburger dont la singularité essentielle est z=∞ et z=0 la singularité régulière. Soit donc l'équation différentielle du second degré suivante : $z\, y''(z) - (1+z^3)\, y(z) = 0$. *Le point z=0 est un point régulier. Pour cette dernière singularité l'équation indicielle donne les valeurs ρ=0 ou ρ=1. Dans ce cas l'équation a une solution régulière de la forme* $y_1(z) = z \times \sum_{l=0}^{l=+\infty} c_l z^l$ *et également une solution de la forme* $y_2(z) = Log(z) y_1(z) + \sum_{l=0}^{l=+\infty} b_l z^l$.

L'injection du développement $y_1(z) = z^\rho \times \sum_{l=0}^{l=+\infty} c_l z^l$ *conduit à la récurrence suivante à 5 termes :*

$$y(x,\rho) = x^\rho \sum_{l=0}^{l=+\infty} g_l\, x^l \Rightarrow g_0 = 1 \quad g_1 = \frac{1}{\rho(\rho+1)} \quad g_2 = \frac{1}{\rho(\rho+1)(\rho+1)(\rho+2)} \quad g_3 = \frac{1}{\rho(\rho+1)(\rho+1)(\rho+2)(\rho+2)(\rho+3)} \quad g_l = \frac{g_{l-1} + g_{l-4}}{(\rho+l)(\rho+l-1)} \quad l \geq 4$$

$$\rho = 1 \to y(x,1) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{12} + \frac{x^4}{144} + \frac{29\,x^5}{576} + \frac{317\,x^6}{17280} + \frac{251\,x^7}{103680} + \frac{971\,x^8}{5806080} + \frac{293291\,x^9}{418037760} + \ldots$$

Pour la deuxième racine partons de la récurrence modifiée de manière à éliminer simplement le pôle en ρ=0 présent dans la récurrence formelle :

$$g_0 = \rho \quad g_1 = \frac{1}{(\rho+1)} \quad g_2 = \frac{1}{(\rho+1)(\rho+1)(\rho+2)} \quad g_3 = \frac{1}{(\rho+1)(\rho+1)(\rho+2)(\rho+2)(\rho+3)} \quad g_l = \frac{g_{l-1} + g_{l-4}}{(\rho+l)(\rho+l-1)} \quad l \geq 4$$

$$\rho = 0 \to w_1(x,0) = \sum_{j=0}^{j=+\infty} g_j^{(1)}(\rho)\Big|_{\rho=0} x^j = 1 - x - \frac{5x^2}{4} - \frac{5x^3}{18} + \frac{97x^4}{1728} - \frac{1207\,x^5}{17280} - \frac{13147\,x^6}{259200} - \frac{62203\,x^7}{7257600} + \frac{1307963\,x^8}{1625702400} - \frac{592363759\,x^9}{526727577600} + \ldots$$

Les deux solutions locales se construisent alors comme suit :

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{Y}}_0(x,1) = w_0(x,\rho_0 = 1) = y(x,1) \\ \tilde{\mathbf{Y}}_1(x,\rho_1 = 0) = Log(x)\, w_0(x,\rho_0 = 1) + w_1(x,\rho_0 = 0) \end{cases} \quad Avec \quad w_0(x,1) = x \times \sum_{j=0}^{j=+\infty} g_j(\rho)\Big|_{\rho=1} x^j \quad et \quad w_1(x,0) = \sum_{j=0}^{j=+\infty} g_j^{(1)}(\rho)\Big|_{\rho=0} x^j$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tilde{\mathbf{Y}}_0(x,1) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{12} + \frac{x^4}{144} + \frac{29\,x^5}{576} + \frac{317\,x^6}{17280} + \frac{251\,x^7}{103680} + \frac{971\,x^8}{5806080} + \frac{293291\,x^9}{418037760} + \ldots \\ \tilde{\mathbf{Y}}_1(x,\rho_0 = 0) = Log(x)\, \tilde{\mathbf{Y}}_0(x,1) + \sum_{j=0}^{j=+\infty} g_j^{(1)}(\rho)\Big|_{\rho=0} x^j \\ = Log(x)\, \tilde{\mathbf{Y}}_0(x,1) + 1 - x - \frac{5\,x^2}{4} - \frac{5\,x^3}{18} + \frac{97\,x^4}{1728} - \frac{1207\,x^5}{17280} - \frac{13147\,x^6}{259200} - \frac{62203\,x^7}{7257600} + \frac{1307963\,x^8}{1625702400} - \frac{592363759\,x^9}{526727577600} + \ldots \end{cases}$$

Exercice 7 paragraphe 40, page 103

Recherchons les solutions locales autour de l'origine pour l'équation différentielle du troisième degré : $x^3y^{(3)}(x)-3x^2y''(x)+7x\,y'(x)-8\,y(x)=0$*. L'équation indicielle est* $(\rho-2)^2=0$*.* $\rho=2$ *est donc une racine triple pour la solution locale. L'injection du développement conduit à la récurrence suivante :*

$$y(x,\rho)=x^\rho\sum_{l=0}^{l=+\infty}g_l\,x^l\Rightarrow\forall l\quad(\rho-2)^2g_l=0$$

Par évidence il suffit que $g_0=1\quad g_l=0\quad l\geq1$ *pour que l'équation soit vérifiée. Soit la solution locale*

$y_0(x,\rho=2)=x^2$*. La deuxième solution locale se construit comme suit :* $y_1(x,\rho=2)=x^2\,Log(x)$ *et la troisième solution comme suit :* $y_2(x,\rho=2)=x^2\,(Log(x))^2$*.*

Exercice 8 paragraphe 40, page 103

Recherchons les solutions locales autour de l'origine pour l'équation différentielle du troisième degré : $(1+x)x^3y^{(3)}(x)-(2+4x)x^2y''(x)+(4+10x)x\,y'(x)-(4+12x)\,y(x)=0$*.*

L'équation indicielle s'écrit $(\rho-1)(\rho-2)^2=0$*. Aussi* $\rho=2$ *est une racine double et* $\rho=1$ *une racine simple . Pour la solution locale, l'injection du développement conduit à la récurrence suivante :*

$$y(x,\rho)=x^\rho\sum_{l=0}^{l=+\infty}g_l\,x^l\Rightarrow\forall l\Rightarrow g_0\quad g_l=-\frac{(\rho+l-3)^2(\rho+l-4)}{(\rho+l-2)^2(\rho+l-1)}g_{l-1}\quad l>0$$

La première solution locale liée à la racine double $\rho=2$ *est finalement assez triviale avec le choix* $g_0=1\Rightarrow g_l=0$ *:* $y_0(x,2)=x^2$*. La deuxième solution va donc s'écrire selon la théorie :*

$$y_1(x,2)=x^2Log(x)+w_1(x,2)\quad Avec\quad w_1(x,2)=x^2\sum_{l=0}^{l=+\infty}g_l'(\rho)\Big|_{\rho=2}x^l$$

Il se trouve que la dérivée première des coefficients est relativement simple :

$$g_0(\rho)=1\quad g_l(\rho)=-\frac{(\rho+l-3)^2(\rho+l-4)}{(\rho+l-2)^2(\rho+l-1)}g_{l-1}(\rho)\to g_0'(\rho)=1$$

$$\Rightarrow g_l'(\rho)=-\frac{(\rho+l-3)^2(\rho+l-4)}{(\rho+l-2)^2(\rho+l-1)}\left(\frac{2}{\rho+l-3}+\frac{1}{\rho+l-4}-\frac{2}{\rho+l-2}-\frac{1}{\rho+l-1}\right)g_{l-1}(\rho)-\frac{(\rho+l-3)^2(\rho+l-4)}{(\rho+l-2)^2(\rho+l-1)}g_{l-1}'(\rho)$$

$$\Rightarrow g_l'(\rho)=-\frac{(\rho+l-3)(\rho+l-4)}{(\rho+l-2)^2(\rho+l-1)}\left(2+\frac{\rho+l-3}{\rho+l-4}-\frac{2(\rho+l-3)}{\rho+l-2}-\frac{\rho+l-3}{\rho+l-1}\right)g_{l-1}(\rho)-\frac{(\rho+l-3)^2(\rho+l-4)}{(\rho+l-2)^2(\rho+l-1)}g_{l-1}'(\rho)$$

$$g_l'(2)=-\frac{(l-1)(l-2)}{l^2(l+1)}\left(2+\frac{l-1}{l-2}-\frac{2(l-1)}{l}-\frac{l-1}{l+1}\right)g_{l-1}(\rho)-\frac{(l-1)^2(l-2)}{l^2(l+1)}g_{l-1}'(\rho)\Rightarrow\forall l\geq0\quad g_l'(2)=0\Rightarrow w_1(x,2)=0$$

Ce qui donne l'expression triviale : $y_1(x,2)=x^2Log(x)$

Il reste donc la troisième solution locale que l'on doit rechercher sur la racine indicielle ρ=1. Reprenons la récurrence formelle : $g_0(\rho)\quad g_l=-\frac{(\rho+l-3)^2(\rho+l-4)}{(\rho+l-2)^2(\rho+l-1)}g_{l-1}\quad l>0$*, pour ρ=1 elle comporte un pôle double pour l=1 sous la forme :* $l=1\rightarrow g_1=-\frac{(l-2)^2(l-3)}{(l-1)^2 l}g_0$ *conformément à la théorie, il suffit de partir de la récurrence suivante :*

$$\begin{aligned}
&g_0(\rho)=(\rho-1)^2\quad g_l=-\frac{(\rho+l-3)^2(\rho+l-4)}{(\rho+l-2)^2(\rho+l-1)}g_{l-1}\\
&\Rightarrow g_0(\rho)=(\rho-1)^2\quad g_1(\rho)=-\frac{(\rho-2)^2(\rho-3)}{(\rho-1)^2\rho}(\rho-1)^2=-\frac{(\rho-2)^2(\rho-3)}{\rho}\quad g_2(\rho)=-\frac{(\rho-1)^2(\rho-2)}{\rho^2(\rho+1)}g_1(\rho)\\
&\rho=1\Rightarrow g_0(1)=0\quad g_1(1)=2\quad g_2(1)=0\rightarrow g_l(1)=0\quad pour\quad l\geq 2
\end{aligned}$$

Comme prévu la première des solutions locales de la racine ρ=1 est bien proportionnelle à la première solution locale de la racine ρ=2 : $y_0(x,1)=2\,x^2$*. La deuxième solution locale se construit ainsi :* $y_1(x,1)=2x^2Log(x)+w_1(x,1)\quad avec\quad w_1(x,1)=x\times\sum_{l=0}^{l=+\infty}g_l'(\rho)\big|_{\rho=1}x^l$ *et les dérivées premières des coefficients s'écrivent :*

$$\begin{aligned}
&g_0(\rho)=(\rho-1)^2\quad g_l(\rho)=-\frac{(\rho+l-3)^2(\rho+l-4)}{(\rho+l-2)^2(\rho+l-1)}g_{l-1}(\rho)\\
&\Rightarrow g_l'(\rho)=-\frac{(\rho+l-3)(\rho+l-4)}{(\rho+l-2)^2(\rho+l-1)}\left(2+\frac{\rho+l-3}{\rho+l-4}-\frac{2(\rho+l-3)}{\rho+l-2}-\frac{\rho+l-3}{\rho+l-1}\right)g_{l-1}(\rho)-\frac{(\rho+l-3)^2(\rho+l-4)}{(\rho+l-2)^2(\rho+l-1)}g_{l-1}'(\rho)\\
&g_0'(\rho)=2(\rho-1)\Rightarrow g_0'(1)=0\\
&g_1'(\rho)=-\frac{(\rho-2)(\rho-3)}{(\rho-1)^2\rho}\left(2+\frac{\rho-2}{\rho-3}-\frac{2(\rho-2)}{\rho-1}-\frac{\rho-2}{\rho}\right)(\rho-1)^2-\frac{(\rho-2)^2(\rho-3)}{(\rho-1)^2\rho}g_0'(\rho)=-\frac{(\rho-2)(\rho-3)}{\rho}\left(2+\frac{\rho-2}{\rho-3}-\frac{\rho-2}{\rho}\right)\\
&\Rightarrow g_1'(1)=-7\quad De\quad plus\quad l=2\quad g_2'(1)=0\quad et\quad g_2(1)=0\\
&\Rightarrow l\geq 3\quad g_l'(1)=-\frac{(l-2)(l-3)}{(l-1)^2 l}\left(2+\frac{l-2}{l-3}-\frac{2(l-2)}{l-1}-\frac{l-2}{l}\right)g_{l-1}(1)-\frac{(l-2)^2(l-3)}{(l-1)^2 l}g_{l-1}'(1)=0\Rightarrow w_1(x,1)=-7\,x^2
\end{aligned}$$

Cela donne une deuxième solution locale : $y_1(x,1)=2x^2Log(x)-7x^2$ *qui est toujours conformément à la théorie est une combinaison linéaire des deux solutions locales de la racine indicielle ρ=2.*

Il faut donc construire la troisième solution locale pour la racine ρ=1 en suivant la formule théorique :

$$\begin{aligned}
&y_2(x,1)=2x^2(Log(x))^2+2Log(x)\,w_1(x,1)+w_2(x,1)\\
&y_2(x,1)=x^2(Log(x))^2-14x^2Log(x)+w_2(x,1)\quad avec\quad w_2(x,1)=x\times\sum_{l=0}^{l=+\infty}g_l''(\rho)\big|_{\rho=1}x^l
\end{aligned}$$

Il ne nous reste plus qu'à calculer la dérivée seconde des coefficients du développement , après un calcul sur Mathematica, il vient :

$$g_0"(\rho)\big|_{\rho=1} = 2 \qquad g_1"(\rho)\big|_{\rho=1} = 22 \qquad g_2"(\rho)\big|_{\rho=1} = 2 \qquad g_3"(\rho)\big|_{\rho=1} = 0 \quad \forall l \geq 3 \quad g_l"(\rho)\big|_{\rho=1} = 0$$
$$w_2(x,1) = x \times \left(2 + 22x + 2x^2\right) \Rightarrow y_2(x,1) = 2x^2 (Log(x))^2 - 14x^2 Log(x) + 2x \times \left(1 + x^2\right) + 22x^2$$

Une fois éliminée la combinaison linéaire des deux premières solutions locales, on voit que la troisième solution locale s'écrit finalement : $y_2(x,1) = x^2 (Log(x))^2 + x\left(1 + x^2\right)$. *Les trois solutions de l'équation différentielle sont donc :* $\begin{cases} y_1(x) = x^2 \\ y_2(x) = x^2 Log(x) \\ y_3(x) = x^2 (Log(x))^2 + x\left(1 + x^2\right) \end{cases}$.

Pour parvenir à un tel résultat on peut également remarquer d'après la récurrence modifiée que :

$$g_0(\rho) = (\rho-1)^2 \quad g_1(\rho) = -\frac{(\rho-2)^2(\rho-3)}{\rho} \quad g_2(\rho) = \frac{(\rho-1)^2(\rho-2)^3(\rho-3)}{\rho^3(\rho+1)} \quad g_3(\rho) = -(\rho-1)^3 \frac{\rho^2(\rho-2)^3(\rho-3)}{\rho^3(\rho+1)^3(\rho+2)}$$
$$\Rightarrow g_l(\rho) = (\rho-1)^3 f(\rho) \quad l \geq 3 \quad \underset{\rho \to 1}{Lim}\,(\rho-1) f(\rho) = 0$$

Aussi le développement modifiée s'écrit-il :

$$\tilde{y}(x,\rho) = x^\rho \sum_{l=0}^{l=+\infty} \tilde{g}_l(\rho)\, x^l = x^\rho (\rho-1)^2 + x^{\rho+1}\tilde{g}_1(\rho) + x^{\rho+2}\tilde{g}_2(\rho) + (\rho-1)^3 F(x,\rho)$$
$$= x^\rho(\rho-1)^2 - \frac{(\rho-2)^2(\rho-3)}{\rho} x^{\rho+1} + \frac{(\rho-1)^2(\rho-2)^3(\rho-3)}{\rho^3(\rho+1)} x^{\rho+2} + (\rho-1)^3 F(x,\rho)$$
$$Avec \quad \underset{\rho \to 1}{Lim}\,(\rho-1) F(x,\rho) = 0$$

Aussi suffit-il de calculer les valeurs de $\tilde{g}_0(\rho), \tilde{g}_1(\rho), \tilde{g}_2(\rho)$ *de leurs dérivées premières et secondes, sachant qu'au delà tous les coefficients sont nuls lorsque ρ=1.*

Exercice 9 (i) paragraphe 40, page 104

Recherchons les solutions locales autour de l'origine pour l'équation différentielle du troisième degré : $(1+x)x^3y^{(3)}(x)-(2+4x)x^2y''(x)+(4+10x)x\,y'(x)-(4+12x)\,y(x)=0$.

L'équation indicielle s'écrit $(\rho-1)(\rho-2)^2=0$. *Aussi ρ=2 est une racine double et ρ=1 une racine simple. Pour la solution locale, l'injection du développement conduit à la récurrence suivante :*

$$y(x,\rho)=x^\rho\sum_{l=0}^{l=+\infty}g_l\,x^l \Rightarrow \forall l \Rightarrow g_0 \quad g_l=-\frac{(\rho+l-4)^2(\rho+l-5)}{(\rho+l-2)^2(\rho+l-1)}g_{l-2} \quad l>0$$

La première solution locale liée à la racine double ρ=2 est finalement assez triviale avec le choix $g_0=1\Rightarrow g_2=0\Rightarrow g_{2l}=0$: $y_0(x,2)=x^2$. *La deuxième solution va donc s'écrire selon la théorie :*

$$y_1(x,2)=x^2Log(x)+w_1(x,2) \quad Avec \quad w_1(x,2)=x^2\sum_{l=0}^{l=+\infty}g_l'(\rho)\Big|_{\rho=2}x^l$$

Il se trouve que toutes les dérivées premières des coefficients sont systématiquement nulles en ρ=2 puisque :

$$g_0(\rho)=1 \quad g_2(\rho)=-(\rho-2)^2\frac{(\rho-3)}{\rho^2(\rho+1)}\to y(x,\rho)=x^\rho+(\rho-2)^2F(x,\rho) \quad Avec \quad F(x,\rho)=A_0(x)+(\rho-2)A_1(x)+\dots$$

Ce qui donne l'expression triviale : $y_1(x,2)=x^2Log(x)$.

Partons de la même récurrence :

$$g_0(\rho)=1 \quad g_2(\rho)=-\frac{(\rho-2)^2(\rho-3)}{\rho(\rho+1)}g_0(\rho) \quad g_4(\rho)=-\frac{\rho^2(\rho-1)}{(\rho+2)^2(\rho+3)}g_2(\rho) \quad g_{2l}(\rho)=-\frac{(\rho+2l-4)^2(\rho+2l-5)}{(\rho+2l-2)^2(\rho+2l-1)}g_{2l-2}(\rho)$$
$$g_0(1)=g_2(1)=1 \quad g_{2l}(1)=0 \quad l\geq 2$$

Aussi la première solution locale de la racine indicielle ρ=1 forme la troisième solution locale autour de x=1, sous la forme : $y_0(x,1)=x+x^3$.

Les trois solutions de l'équation différentielle sont donc : $\begin{cases} y_1(x)=x^2 \\ y_2(x)=x^2Log(x) \\ y_3(x)=x\,(1+x^2) \end{cases}$.

Exercice 9 (ii) paragraphe 40, page 104

Recherchons les solutions locales autour de l'origine pour l'équation différentielle du troisième degré : $(1+4x)x^4y^{(4)}(x)-(4+20x)\,x^3y^{(3)}(x)+(14+72x)\,x^2y''(x)-(32+168x)\,x\,y'(x)+(36+192x)\,y(x)=0$.

L'équation indicielle s'écrit $(\rho-3)^2(\rho-2)^2=0$. *Aussi ρ=3 et ρ=2 sont des racines doubles. Pour la solution locale, l'injection du développement conduit à la récurrence suivante :*

$$y(x,\rho)=x^\rho\sum_{l=0}^{l=+\infty}g_l\,x^l \Rightarrow \forall l \Rightarrow g_0 \quad g_l=-4\frac{(\rho+l-4)(\rho+l-5)}{(\rho+l-3)(\rho+l-2)^2}\,g_{l-1} \quad l>0$$

La première solution locale liée à la racine double ρ=3 est triviale avec le choix $g_0=1\Rightarrow g_1=0\Rightarrow g_l=0 \quad l\geq 1$: $y_0(x,2)=x^3$. *La deuxième solution va donc s'écrire selon la théorie :*

$$y_1(x,3)=x^3Log(x)+w_1(x,3) \quad Avec \quad w_1(x,3)=x^3\sum_{l=0}^{l=+\infty}g_l'(\rho)\Big|_{\rho=3}\,x^l$$

Il se trouve que toutes les dérivées premières des coefficients sont systématiquement nulles en ρ=3 puisque :

$$g_0(\rho)=1 \quad g_1(\rho)=-4\frac{(\rho-3)(\rho-4)}{(\rho-2)(\rho-1)^2} \quad g_2(\rho)=16\frac{(\rho-3)^2(\rho-4)}{(\rho-1)^3\rho^2}$$
$$\Rightarrow g_0'(3)=0 \quad g_1'(3)=1 \quad g_2'(3)=0 \quad g_l'(3) \quad l\geq 2$$

D'où la deuxième solution locale : $y_1(x,3)=x^3Log(x)+x^4$.

Les solutions locales autour de la racine indicielle ρ=2 sont mises en œuvre avec une récurrence modifiée pour contrer le pôle ρ-2 sur le terme g1(ρ) :

$$g_0(\rho)=\rho-2 \quad g_1(\rho)=-4\frac{(\rho-3)(\rho-4)}{(\rho-1)^2} \quad g_2(\rho)=16\,(\rho-2)\frac{(\rho-3)^2(\rho-4)}{(\rho-1)^3\rho^2} \quad g_3(\rho)=-64\frac{(\rho-1)(\rho-2)^2(\rho-3)^2(\rho-4)}{(\rho+1)^2(\rho-1)^3\rho^3}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}g_0(2)=0 \quad g_1(2)=-8 \quad g_2(2)=0 \quad l\geq 2\\ g_0'(2)=1 \quad g_1'(2)=28 \quad g_2'(2)=-8 \quad g_l'(2)=0 \quad l\geq 3\end{cases}$$

La première solution locale est proportionnel à la première solution locale de la racine indicielle ρ=3 : $y_0(x,2)=-8x^3$. *La deuxième solution locale s'écrit :* $y_1(x,2)=-8\left(x^3Log(x)+x^4\right)+28\,x^3+x^2$. *Une fois la combinaison linéaire des deux premières fonctions enlevée, il reste la fonction indépendante suivante :* $y_1(x,2)=x^2$. *Du coup il suffit de tenter la solution locale* $y_2(x,2)=x^2Log(x)$ *pour voir qu'elle est également solution. Les quatre solutions de l'équation différentielle sont donc :*

$$\begin{cases}y_1(x)=x^3\\ y_2(x)=x^3Log(x)+x^4\\ y_3(x)=x^2\\ y_4(x)=x^2Log(x)\end{cases}$$

__Exercice 6 paragraphe 40, page 103, variation sur la fonction hypergéométrique 2F1, cas dit dégénéré__

Recherchons les solutions locales autour du point singulier régulier x=0 pour l'équation différentielle hypergéométrique : $x(1-x)\,y''(x)+(c-(a+b+1)\,x)\,y'(x)-a\,b\,y(x)=0$*. L'équation indicielle est ρ(ρ+c-1)=0. ρ=0, et ρ=1-c sont donc les deux racines pour les solutions locales. De plus nous supposons c entier, dans ces conditions l'écart entre les racines est un entier. L'injection du développement conduit à la récurrence suivante :*

$$y(x,\rho)=x^{\rho}\sum_{l=0}^{l=+\infty}g_l\,x^l \Rightarrow g_0=1 \quad g_l=\frac{(\rho+a+l-1)(\rho+b+l-1)}{(\rho+l)(\rho+c+l-1)}g_{l-1}$$

$$y(x,\rho)=g_0x^{\rho}\left(1+\frac{(\rho+a)(\rho+b)}{(\rho+1)(\rho+c)}x+\frac{(\rho+a)(\rho+a+1)(\rho+b)(\rho+b+1)}{(\rho+1)(\rho+2)(\rho+c)(\rho+c+1)}x^2+\ldots+\frac{(\rho+a)_l(\rho+b)_l}{(\rho+1)_l(\rho+c)_l}x^l+\ldots\right)$$

$$\rho=0\rightarrow y(x,0)=1+\frac{a\,b}{1!\,c}x+\frac{a\,(a+1)\,b\,(b+1)}{2!\,c\,(c+1)}x^2+\ldots+\frac{a_lb_l}{l!\,c_l}x^l+\ldots={}_2F_1(a,b\,;c\,;x)$$

$$\textit{Symbole de Pochhammer}\quad a_l,b_l,c_l\rightarrow a_l=a\,(a+1)\ldots(a+l-1)=\frac{\Gamma(a+l)}{\Gamma(a)}$$

Avant de définir la seconde solution, modifions la récurrence de manière à « régulariser » le pôle de la récurrence initiale pour l'indice l=c-1 :

$$\tilde{y}(x,\rho)=x^{\rho}\sum_{l=0}^{l=+\infty}\tilde{g}_l\,x^l\Rightarrow g_0(\rho)=\rho+c-1 \quad g_l(\rho)=(\rho+c-1)\frac{(\rho+a)_l(\rho+b)_l}{(\rho+1)_l(\rho+c)_l} \qquad (\rho+1)_l=(\rho+1)(\rho+2)\ldots(\rho+l)$$

$$\Rightarrow \underset{\rho\to1-c}{Lim}\quad g_l(\rho)=0\quad \forall l\in\{0,\ldots,c-2\}\quad \underset{\rho\to1-c}{Lim}\quad g_{c-1}(\rho)=\underset{\rho\to1-c}{Lim}\quad\frac{(\rho+a)_{c-1}(\rho+b)_{c-1}}{(\rho+1)(\rho+2)\ldots(\rho+c-2)(\rho+c)_{c-1}}=c^2(c-1)\frac{(1-c+a)_{c-1}(1-c+b)_{c-1}}{(-c)_c\,c\,!}$$

$$\textit{De plus}\quad (1-c+a)_c=a\,(1-c+a)_{c-1}\quad (1-c+a)_c=b\,(1-c+a)_{c-1}\quad (1)_c=c\,!=c\,(c-1)!=c\,(1)_{c-1}\quad (\rho+1)_c=1!(\rho+1)_{c-1}\quad (\rho+1)_{c+1}=2!(\rho+1)_{c-1}\quad\ldots$$

$$\underset{\rho\to1-c}{Lim}\quad g_c(\rho)=c^2(c-1)\frac{(1-c+a)_{c-1}(1-c+b)_{c-1}}{(-c)_c\,c\,!}\times\frac{a\,b}{1!\,c}\qquad \underset{\rho\to1-c}{Lim}\quad g_{c+1}(\rho)=c^2(c-1)\frac{(1-c+a)_{c-1}(1-c+b)_{c-1}}{(-c)_c\,c\,!}\times\frac{a\,(a+1)\,b\,(b+1)}{2!\,c\,(c+1)}$$

La première solution locale définie sur la racine indicielle ρ=1-c est construite comme suit :

$$\begin{cases}\tilde{\mathbf{Y}}_0(x,\rho_1=1-c)=w_0(x,\rho_1=1-c)\\ w_0(x,\rho_1=1-c)=x^{1-c}\times\displaystyle\sum_{j=0}^{j=+\infty}\tilde{g}_j(\rho)\Big|_{\rho=1-c}x^j=c^2(c-1)\frac{(1-c+a)_{c-1}(1-c+b)_{c-1}}{(-c)_c\,c\,!}\times w_0(x,\rho_0=0)=(-1)^c\,\frac{(1-c+a)_{c-1}(1-c+b)_{c-1}}{(c-1)!(c-2)!}\times w_0(x,\rho_0=0)\end{cases}$$

Cette première des solutions de la racine indicielle ρ=1-c est donc parfaitement proportionnelle à la solution locale de la racine indicielle ρ=0 comme l'indique le résultat théorique donné par E.L.Ince.

Pour la deuxième solution locale de la racine indicielle ρ=1-c on peut écrire formellement :

$$\begin{cases}\tilde{\mathbf{Y}}_1(x,\rho_1=1-c)=(-1)^c\,\dfrac{(1-c+a)_{c-1}(1-c+b)_{c-1}}{(c-1)!(c-2)!}Log(x)\times w_0(x,\rho_0=0)+w_1(x,1-c)\\ w_1(x,1-c)=x^{1-c}\times\displaystyle\sum_{j=0}^{j=+\infty}\tilde{g}_j^{\,(1)}(\rho)\Big|_{\rho=1-c}x^j\end{cases}$$

Et les dérivées premières des coefficients du développement de $\widetilde{y}(x,\rho)$ *s'écrivent :*

$$w_1(x,1-c)=x^{1-c}\times\sum_{l=0}^{l=+\infty}\widetilde{g}_l^{(1)}(\rho)\Big|_{\rho=1-c}x^j \qquad \widetilde{g}_0(\rho)=\rho+c-1 \quad \widetilde{g}_l(\rho)=\frac{(\rho+c-1)}{(\rho+1)_l}\times\frac{(\rho+a)_l(\rho+b)_l}{(\rho+c)_l}\Rightarrow \widetilde{g}_0^{(1)}(\rho)\Big|_{\rho=1-c}=1$$

$$\widetilde{g}_l^{(1)}(\rho)\Big|_{\rho=1-c}=\frac{(1-c+a)_l(1-c+b)_l}{l!}\lim_{\rho\to 1-c}\frac{1+(\rho+c-1)\times\left(\sum_{i=0}^{i=l-1}\frac{1}{1-c+a+i}+\sum_{i=0}^{i=l-1}\frac{1}{1-c+b+i}-\sum_{i=0}^{i=l-1}\frac{1}{1+i}-\sum_{i=0}^{i=l-1}\frac{1}{\rho+1+i}\right)}{(\rho+1)_l}$$

$$\Leftrightarrow \widetilde{g}_l^{(1)}(\rho)\Big|_{\rho=1-c}=\frac{(1-c+a)_l(1-c+b)_l}{l!}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{(2-c)_l} \quad si \quad l<c-1\\ \frac{(-1)^c}{(c-2)!(l+1-c)!}\times\left(\sum_{i=1}^{i=l}\frac{1}{a-c+i}+\sum_{i=1}^{i=l}\frac{1}{b-c+i}-\sum_{i=1}^{i=l}\frac{1}{i}-\sum_{i=1,i\neq c-1}^{i=l}\frac{1}{1-c+i}\right) \quad si \quad l\geq c-1\end{array}\right\}$$

Nous avons donc finalement les deux solutions locales de l'équation hypergéométrique avec le paramètre c entier autour de la singularité x=0 :

$$\begin{cases}\widetilde{\mathbf{Y}}_0(x)=1+\frac{a\,b}{1!\,c}x+\frac{a\,(a+1)\,b\,(b+1)}{2!\,c\,(c+1)}x^2+\ldots+\frac{a_l b_l}{l!\,c_l}x^l+\ldots={}_2F_1(a,b\,;c\,;x)\\ \widetilde{\mathbf{Y}}_1(x)=(-1)^c\frac{(1-c+a)_{c-1}(1-c+b)_{c-1}}{(c-1)!(c-2)!}Log(x)\times\widetilde{\mathbf{Y}}_0(x)+w_1(x)\end{cases}$$

$$Avec \quad w_1(x)=x^{1-c}\times\sum_{l=0}^{l=+\infty}\widetilde{g}_l^{(1)}(\rho)\Big|_{\rho=1-c}x^j \qquad \widetilde{g}_0^{(1)}(\rho)\Big|_{\rho=1-c}=1$$

$$\widetilde{g}_l^{(1)}(\rho)\Big|_{\rho=1-c}=\frac{(1-c+a)_l(1-c+b)_l}{l!}\lim_{\rho\to 1-c}\frac{1+(\rho+c-1)\times\left(\sum_{i=0}^{i=l-1}\frac{1}{1-c+a+i}+\sum_{i=0}^{i=l-1}\frac{1}{1-c+b+i}-\sum_{i=0}^{i=l-1}\frac{1}{1+i}-\sum_{i=0}^{i=l-1}\frac{1}{\rho+1+i}\right)}{(\rho+1)_l}$$

$$\Leftrightarrow \widetilde{g}_l^{(1)}(\rho)\Big|_{\rho=1-c}=\frac{(1-c+a)_l(1-c+b)_l}{l!}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{(2-c)_l} \quad si \quad l<c-1\\ \frac{(-1)^c}{(c-2)!(l+1-c)!}\times\left(\sum_{i=1}^{i=l}\frac{1}{a-c+i}+\sum_{i=1}^{i=l}\frac{1}{b-c+i}-\sum_{i=1}^{i=l}\frac{1}{i}-\sum_{i=1,i\neq c-1}^{i=l}\frac{1}{1-c+i}\right) \quad si \quad l\geq c-1\end{array}\right\}$$

Exercice fonction hypergéométrique confluente 1F1, cas dit dégénéré

Recherchons les solutions locales autour du point singulier régulier x=0 pour l'équation différentielle hypergéométrique confluente : $x\,y''(x)+(c-x)\,y'(x)-a\,y(x)=0$*. L'équation indicielle est ρ(ρ+c-1)=0. ρ=0, et ρ=1-c sont donc les deux racines pour les solutions locales. De plus nous supposons c entier, dans ces conditions l'écart entre les racines est un entier. L'injection du développement conduit à la récurrence suivante :*

$$y(x,\rho)=x^{\rho}\sum_{l=0}^{l=+\infty} g_l\,x^l \Rightarrow g_0=1 \quad g_l=\frac{(\rho+a+l-1)}{(\rho+l)(\rho+c+l-1)}g_{l-1}$$

$$y(x,\rho)=g_0x^{\rho}\left(1+\frac{(\rho+a)}{(\rho+1)(\rho+c)}\,x+\frac{(\rho+a)(\rho+a+1)}{(\rho+1)(\rho+2)(\rho+c)(\rho+c+1)}\,x^2+\ldots+\frac{(\rho+a)_l}{(\rho+1)_l(\rho+c)_l}\,x^l+\ldots\right)$$

$$\rho=0\to y(x,0)=1+\frac{a}{1!\,c}\,x+\frac{a\,(a+1)}{2!\,c\,(c+1)}\,x^2+\ldots+\frac{a_l}{l!\,c_l}\,x^l+\ldots={}_1F_1(a\,;c\,;x)$$

$$\text{Symbole de Pochhammer}\quad a_l,c_l\to a_l=a\,(a+1)\ldots(a+l-1)=\frac{\Gamma(a+l)}{\Gamma(a)}$$

Avant de définir la seconde solution, modifions la récurrence de manière à « régulariser » le pôle de la récurrence initiale pour l'indice l=c-1 :

$$\tilde{y}(x,\rho)=x^{\rho}\sum_{l=0}^{l=+\infty}\tilde{g}_l\,x^l \Rightarrow g_0(\rho)=\rho+c-1 \quad g_l(\rho)=(\rho+c-1)\frac{(\rho+a)_l}{(\rho+1)_l(\rho+c)_l} \qquad (\rho+1)_l=(\rho+1)(\rho+2)\ldots(\rho+l)$$

$$\Rightarrow \underset{\rho\to1-c}{Lim}\quad g_l(\rho)=0\quad \forall l\in\{0,\ldots,c-2\} \quad \underset{\rho\to1-c}{Lim}\quad g_{c-1}(\rho)=\underset{\rho\to1-c}{Lim}\quad \frac{(\rho+a)_{c-1}}{(\rho+1)(\rho+2)\ldots(\rho+c-2)(\rho+c)_{c-1}}=c^2(c-1)\frac{(1-c+a)_{c-1}}{(-c)_c\,c\,!}$$

$$\text{De plus}\quad (1-c+a)_c=a\,(1-c+a)_{c-1}\quad (1)_c=c\,!=c\,(c-1)!=c\,(1)_{c-1}\quad (\rho+1)_c=1!(\rho+1)_{c-1}\quad (\rho+1)_{c+1}=2!(\rho+1)_{c-1}\quad\ldots$$

$$\underset{\rho\to1-c}{Lim}\quad g_c(\rho)=c^2(c-1)\frac{(1-c+a)_{c-1}}{(-c)_c\,c\,!}\times\frac{a}{1!\,c}\qquad \underset{\rho\to1-c}{Lim}\quad g_{c+1}(\rho)=c^2(c-1)\frac{(1-c+a)_{c-1}}{(-c)_c\,c\,!}\times\frac{a\,(a+1)}{2!\,c\,(c+1)}$$

La première solution locale définie sur la racine indicielle ρ=1-c est construite comme suit :

$$\tilde{\mathbf{Y}}_0(x,\rho_1=1-c)=x^{1-c}\times\sum_{j=0}^{j=+\infty}\tilde{g}_j(\rho)\Big|_{\rho=1-c}\,x^j=(-1)^c\,\frac{(1-c+a)_{c-1}}{(c-1)!(c-2)!}\times w_0(x,\rho_0=0)$$

Cette première des solutions de la racine indicielle ρ=1-c est donc parfaitement proportionnelle à la solution locale de la racine indicielle ρ=0 comme l'indique le résultat théorique donné par E.L.Ince. Pour la deuxième solution locale de la racine indicielle ρ=1-c on peut écrire formellement :

$$\begin{cases}\tilde{\mathbf{Y}}_1(x,\rho_1=1-c)=(-1)^c\,\dfrac{(1-c+a)_{c-1}}{(c-1)!(c-2)!}\,Log(x)\times w_0(x,\rho_0=0)+w_1(x,1-c)\\[2ex] w_1(x,1-c)=x^{1-c}\times\displaystyle\sum_{j=0}^{j=+\infty}\tilde{g}_j^{\,(1)}(\rho)\Big|_{\rho=1-c}\,x^j\end{cases}$$

Et les dérivées premières des coefficients du développement de $\tilde{y}(x,\rho)$ *s'écrivent :*

$$w_1(x,1-c)=x^{1-c}\times\sum_{l=0}^{l=+\infty}\tilde{g}_l^{(1)}(\rho)\Big|_{\rho=1-c}x^j \qquad \tilde{g}_0(\rho)=\rho+c-1 \quad \tilde{g}_l(\rho)=\frac{(\rho+c-1)}{(\rho+1)_l}\times\frac{(\rho+a)_l}{(\rho+c)_l}\Rightarrow\tilde{g}_0^{(1)}(\rho)\Big|_{\rho=1-c}=1$$

$$\tilde{g}_l^{(1)}(\rho)\Big|_{\rho=1-c}=\frac{(1-c+a)_l}{l!}\lim_{\rho\to1-c}\frac{1+(\rho+c-1)\left(\sum_{i=0}^{i=l-1}\frac{1}{1-c+a+i}-\sum_{i=0}^{i=l-1}\frac{1}{1+i}-\sum_{i=0}^{i=l-1}\frac{1}{\rho+1+i}\right)}{(\rho+1)_l}$$

$$\Leftrightarrow\tilde{g}_l^{(1)}(\rho)\Big|_{\rho=1-c}=\frac{(1-c+a)_l}{l!}\begin{cases}\frac{1}{(2-c)_l} & si \quad l<c-1\\ \frac{(-1)^c}{(c-2)!(l+1-c)!}\times\left(\sum_{i=1}^{i=l}\frac{1}{a-c+i}-\sum_{i=1}^{i=l}\frac{1}{i}-\sum_{i=1,i\neq c-1}^{i=l}\frac{1}{1-c+i}\right) & si \quad l\geq c-1\end{cases}$$

Nous avons donc finalement les deux solutions locales de l'équation hypergéométrique confluente avec le paramètre c entier autour de la singularité x=0 :

$$\begin{cases}\tilde{\mathbf{Y}}_0(x)=1+\frac{a}{1!\,c}x+\frac{a(a+1)}{2!\,c(c+1)}x^2+\ldots+\frac{a_l}{l!\,c_l}x^l+\ldots={}_1F_1(a\,;c\,;x)\\ \tilde{\mathbf{Y}}_1(x)=(-1)^c\frac{(1-c+a)_{c-1}}{(c-1)!(c-2)!}Log(x)\times\tilde{\mathbf{Y}}_0(x)+w_1(x)\end{cases} \quad Avec \quad w_1(x)=x^{1-c}\times\sum_{l=0}^{l=+\infty}\tilde{g}_l^{(1)}(\rho)\Big|_{\rho=1-c}x^j \qquad \tilde{g}_0^{(1)}(\rho)\Big|_{\rho=1-c}=1$$

$$\tilde{g}_l^{(1)}(\rho)\Big|_{\rho=1-c}=\frac{(1-c+a)_l}{l!}\lim_{\rho\to1-c}\frac{1+(\rho+c-1)\times\left(\sum_{i=0}^{i=l-1}\frac{1}{1-c+a+i}-\sum_{i=0}^{i=l-1}\frac{1}{1+i}-\sum_{i=0}^{i=l-1}\frac{1}{\rho+1+i}\right)}{(\rho+1)_l}$$

$$\Leftrightarrow\tilde{g}_l^{(1)}(\rho)\Big|_{\rho=1-c}=\frac{(1-c+a)_l}{l!}\begin{cases}\frac{1}{(2-c)_l} & si \quad l<c-1\\ \frac{(-1)^c}{(c-2)!(l+1-c)!}\times\left(\sum_{i=1}^{i=l}\frac{1}{a-c+i}-\sum_{i=1}^{i=l}\frac{1}{i}-\sum_{i=1,i\neq c-1}^{i=l}\frac{1}{1-c+i}\right) & si \quad l\geq c-1\end{cases}$$

<u>Exercice fonction hypergéométrique $_0F_1$, cas dit dégénéré</u>

Recherchons les solutions locales autour du point singulier régulier x=0 pour l'équation différentielle hypergéométrique confluente : $x\,y''(x)+c\,y'(x)-y(x)=0$. *L'équation indicielle est ρ(ρ+c-1)=0. ρ=0, et ρ=1-c sont donc les deux racines pour les solutions locales. De plus nous supposons c entier, dans ces conditions l'écart entre les racines est un entier. L'injection du développement conduit à la récurrence suivante :*

$$y(x,\rho)=x^\rho\sum_{l=0}^{l=+\infty}g_l\,x^l\Rightarrow g_0=1 \quad g_l=\frac{1}{(\rho+l)(\rho+c+l-1)}g_{l-1}$$

$$y(x,\rho)=g_0x^\rho\left(1+\frac{1}{(\rho+1)(\rho+c)}x+\frac{1}{(\rho+1)(\rho+2)(\rho+c)(\rho+c+1)}x^2+\ldots+\frac{1}{(\rho+1)_l(\rho+c)_l}x^l+\ldots\right)$$

$$\rho=0\to y(x,0)=1+\frac{1}{1!\,c}x+\frac{1}{2!\,c(c+1)}x^2+\ldots+\frac{1}{l!\,c_l}x^l+\ldots={}_0F_1(c\,;x)$$

$$Symbole\ de\ Pochhammer \quad c_l\to c_l=c(c+1)\ldots(c+l-1)=\frac{\Gamma(c+l)}{\Gamma(c)}$$

Avant de définir la seconde solution, modifions la récurrence de manière à « régulariser » le pôle de la récurrence initiale pour l'indice l=c-1 :

$$\tilde{y}(x,\rho)=x^{\rho}\sum_{l=0}^{l=+\infty}\tilde{g}_l\, x^l \Rightarrow g_0(\rho)=\rho+c-1 \quad g_l(\rho)=\frac{\rho+c-1}{(\rho+1)_l(\rho+c)_l} \qquad (\rho+1)_l=(\rho+1)(\rho+2)...(\rho+l)$$

$$\Rightarrow \underset{\rho\to 1-c}{Lim}\quad g_l(\rho)=0 \quad \forall l\in\{0,...,c-2\} \quad \underset{\rho\to 1-c}{Lim}\quad g_{c-1}(\rho)=\underset{\rho\to 1-c}{Lim}\quad \frac{1}{(\rho+1)(\rho+2)...(\rho+c-2)(\rho+c)_{c-1}}=\frac{c^2(c-1)}{(-c)_c\, c\,!}$$

$$De\ plus\quad (1)_c=c\,!=c\,(c-1)!=c\,(1)_{c-1}\quad (\rho+1)_c=1!(\rho+1)_{c-1}\quad (\rho+1)_{c+1}=2!(\rho+1)_{c-1}\quad ...$$

$$\underset{\rho\to 1-c}{Lim}\quad g_c(\rho)=\frac{c^2(c-1)}{(-c)_c\, c\,!}\times\frac{1}{1!\,c} \qquad \underset{\rho\to 1-c}{Lim}\quad g_{c+1}(\rho)=\frac{c^2(c-1)}{(-c)_c\, c\,!}\times\frac{1}{2!\,c\,(c+1)}$$

La première solution locale définie sur la racine indicielle ρ=1-c est construite comme suit :

$$\tilde{\mathbf{Y}}_0(x,\rho_1=1-c)=x^{1-c}\times\sum_{j=0}^{j=+\infty}\tilde{g}_j(\rho)\Big|_{\rho=1-c}\, x^j=\frac{c^2(c-1)}{(-c)_c\, c\,!}\times w_0(x,\rho_0=0)=\frac{(-1)^c}{(c-1)!(c-2)!}\times w_0(x,\rho_0=0)$$

Cette première des solutions de la racine indicielle ρ=1-c est donc parfaitement proportionnelle à la solution locale de la racine indicielle ρ=0 comme l'indique le résultat théorique donné par E.L.Ince. Pour la deuxième solution locale de la racine indicielle ρ=1-c on peut écrire formellement :

$$\tilde{\mathbf{Y}}_1(x,\rho_1=1-c)=\frac{(-1)^c}{(c-1)!(c-2)!}\times Log(x)\times w_0(x,\rho_0=0)+w_1(x,1-c) \qquad w_1(x,1-c)=x^{1-c}\times\sum_{j=0}^{j=+\infty}\tilde{g}_j^{(1)}(\rho)\Big|_{\rho=1-c}\, x^j$$

Et les dérivées premières des coefficients du développement de $\tilde{y}(x,\rho)$ s'écrivent :

$$w_1(x,1-c)=x^{1-c}\times\sum_{l=0}^{l=+\infty}\tilde{g}_l^{(1)}(\rho)\Big|_{\rho=1-c}\, x^j \quad \tilde{g}_0(\rho)=\rho+c-1 \quad \tilde{g}_l(\rho)=\frac{(\rho+c-1)}{(\rho+1)_l}\times\frac{1}{(\rho+c)_l}$$

$$\Rightarrow \tilde{g}_0^{(1)}(\rho)\Big|_{\rho=1-c}=1 \quad \tilde{g}_l^{(1)}(\rho)\Big|_{\rho=1-c}=\frac{1}{l!}\underset{\rho\to 1-c}{Lim}\quad \frac{1+(\rho+c-1)\left(-\sum_{i=0}^{i=l-1}\frac{1}{1+i}-\sum_{i=0}^{i=l-1}\frac{1}{\rho+1+i}\right)}{(\rho+1)_l}$$

$$\Leftrightarrow \tilde{g}_l^{(1)}(\rho)\Big|_{\rho=1-c}=\frac{1}{l!}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{(2-c)_l}\quad si\quad l<c-1\\ \frac{(-1)^c}{(c-2)!(l+1-c)!}\times\left(-\sum_{i=1}^{i=l}\frac{1}{i}-\sum_{i=1,i\neq c-1}^{i=l}\frac{1}{1-c+i}\right)\quad si\quad l\geq c-1\end{array}\right\}$$

Nous avons donc finalement les deux solutions locales de l'équation hypergéométrique ${}_0F_1$ avec le paramètre c entier autour de la singularité x=0 :

$$\left\{\begin{array}{l}\tilde{\mathbf{Y}}_0(x)=1+\frac{1}{1!\,c}\,x+\frac{1}{2!\,c\,(c+1)}\,x^2+...+\frac{1}{l!\,c_l}\,x^l+...={}_0F_1(c\,;x)\\ \tilde{\mathbf{Y}}_1(x)=\frac{(-1)^c}{(c-1)!(c-2)!}\times Log(x)\times\tilde{\mathbf{Y}}_0(x)+w_1(x)\end{array}\right. \quad Avec\quad w_1(x)=x^{1-c}\times\sum_{l=0}^{l=+\infty}\tilde{g}_l^{(1)}(\rho)\Big|_{\rho=1-c}\, x^j \qquad \tilde{g}_0^{(1)}(\rho)\Big|_{\rho=1-c}=1$$

$$\tilde{g}_l^{(1)}(\rho)\Big|_{\rho=1-c}=\frac{1}{l!}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{(2-c)_l}\quad si\quad l<c-1\\ \frac{(-1)^c}{(c-2)!(l+1-c)!}\times\left(-\sum_{i=1}^{i=l}\frac{1}{i}-\sum_{i=1,i\neq c-1}^{i=l}\frac{1}{1-c+i}\right)\quad si\quad l\geq c-1\end{array}\right\}$$

Exemple : conditions pour que la singularité x=0 de l'équation hypergéométrique 2F1 soit apparente

Revenons sur l'équation hypergéométrique 2F1 : $x(1-x)\,y''(x)+(c-(a+b+1)\,x)\,y'(x)-a\,b\,y(x)=0$, *pour laquelle il y a deux racines indicielles ρ=0, et ρ=1-c. La première condition nécessaire pour une singularité apparente est que les deux racines indicielles soit entières, toutes distinctes et toutes positives. Dans ces conditions il faut donc obligatoirement que c soit un entier strictement négatif. En effet si c>0 alors une des racines est strictement négative ou nulle (donc multiple dans ce cas). Supposons que c=0 alors l'équation hypergéométrique s'écrit :*

$$x(1-x)\,y''(x)-(a+b+1)\,x\,y'(x)-a\,b\,y(x)=0$$

Par la substitution y(x)=x u(x), la fonction u(x) a pour équation différentielle :

$$x(1-x)\,u''(x)+(2-(a+b+3)\,x)\,u'(x)-(a+1)(b+1)\,u(x)=0$$

Cette équation est elle-même hypergéométrique avec le paramètre c=2, qui admet donc deux racines indicielles ρ=0 et ρ=-1, une des racines étant négative, elle ne respecte la condition nécessaire de positivité et d'unicité de toutes les racines. Il en découle bien que c doit être strictement négatif. Écrivons l'équation hypergéométrique avec maintenant c >0 :

$$x(1-x)\,y''(x)-(c+(a+b+1)\,x)\,y'(x)-a\,b\,y(x)=0$$

Son développement formel de Fröbenius est :

$$y(x,\rho)=x^{\rho}\left(1+\frac{(\rho+a)(\rho+b)}{(\rho+1)(\rho-c)}x+\frac{(\rho+a)(\rho+a+1)(\rho+b)(\rho+b+1)}{(\rho+1)(\rho+2)(\rho-c)(\rho-c+1)}x^2+\ldots+\frac{(\rho+a)_l(\rho+b)_l}{(\rho+1)_l(\rho-c)_l}x^l+\ldots\right).$$

La première des racines est $\rho_0=1+c\Rightarrow y(x,\rho_0)=x^{1+c}\left(1+\frac{(1+c+a)(1+c+b)}{(2+c)(1+c-c)}x+\ldots+\frac{(1+c+a)_l(1+c+b)_l}{(2+c)_l\,l\,!}x^l+\ldots\right)$

La deuxième racine dans l'ordre décroissant étant ρ=0, la solution ne doit pas comporter de terme logarithmique. La condition nécessaire énoncée par E.L.Ince est unique et consiste à annuler le déterminant de Fröbenius : $\mathbf{F}_j(\rho)\big|_{\rho=\rho_1}=0 \quad j=\rho_0-\rho_1=1+c\Rightarrow \mathbf{F}_{1+c}(\rho)\big|_{\rho=0}=0$ *. Or on calcul les déterminant de Fröbenius comme suit :*

$$\mathbf{F}_j(\rho)=\begin{bmatrix} f_1(\rho+j-1) & f_2(\rho+j-2) & f_3(\rho+j-3) & \ldots & f_{j-1}(\rho+1) & f_j(\rho) \\ f_0(\rho+j-1) & f_1(\rho+j-2) & f_2(\rho+j-3) & \ldots & f_{j-2}(\rho+1) & f_{j-1}(\rho) \\ 0 & f_0(\rho+j-2) & f_1(\rho+j+3) & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & 0 & \ldots & \ldots & f_2(\rho+1) & f_3(\rho) \\ \ldots & \ldots & \ldots & f_0(\rho+2) & f_1(\rho+1) & f_2(\rho) \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & f_0(\rho+1) & f_1(\rho) \end{bmatrix}$$

Avec ici les fonctions indicielles qui ont les valeurs suivantes :

$$f_0(\rho)=\rho\,(\rho-1-c) \qquad \forall l\geq 1 \quad f_l(\rho)=-ab-\rho\,(1+a+b+c)$$

Il en résulte une expression particulièrement simple du déterminant de Fröbenius, une fois factorisée : $\mathbf{F}_{1+c}(\rho)\big|_{\rho=0} = (-1)^{c+1} a(a+1)\times\ldots\times(a+c)\times b(b+1)\times\ldots\times(b+c)$*. Pour que ce déterminant s'annule il suffit donc que a ou b soit un entier négatif ou nul dont la valeur absolue soit inférieur ou égal à c :*

$$\begin{cases} a\in\mathbf{N} \quad et \quad a\le 0 \\ c+a>0 \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} b\in\mathbf{N} \quad et \quad b\le 0 \\ c+b>0 \end{cases}$$

Les solutions étant équivalente entre le choix de a ou b, prenons celui où $a\in\mathbf{N} \quad a\le 0 \quad c+a>0$*. La première des solutions de l'équation différentielle* $x(1-x)\,y''(x)-(c+(a+b+1)x)\,y'(x)-a\,b\,y(x)=0$ *s'écrit :*

$$y_0(x)=x^{1+c}\left(1+\frac{(1+c+a)(1+c+b)}{(2+c)(1+c-c)}\,x+\ldots+\frac{(1+c+a)_l(1+c+b)_l}{(2+c)_l\,l\,!}\,x^l+\ldots\right)=x^{1+c}\,{}_2F_1(1+c+a,1+c+b\,;2+c\,;x)$$

La deuxième solution est polynomiale et elle s'écrit : $y_1(x)=1+\frac{a\,b}{(-c)}\,x+\frac{a\,(a+1)\,b\,(b+1)}{(-c)(-c+1)}\,x^2+\ldots+\frac{(a)_{-a}(b)_{-a}}{(1)_{-a}(-c)_{-a}}\,x^{-a}$

Par évidence les deux solutions sont bien indépendantes et ne comportent aucune singularité en x=0. La deuxième solution peut également s'écrire : $y_1(x)={}_2F_1(a,b\,;-c\,;x) \quad avec \quad a\le 0 \quad et \quad c+a>0$

<u>Exemple : conditions pour que la singularité x=0 de l'équation hypergéométrique 1F1 soit apparente</u>

Revenons sur l'équation hypergéométrique 1F1 : $x\,y''(x)+(c-x)\,y'(x)-a\,y(x)=0$*, pour laquelle il y a deux racines indicielles ρ=0, et ρ=1-c. La première condition nécessaire pour une singularité apparente est que les deux racines indicielles soit entières, toutes distinctes et toutes positives. Dans ces conditions il faut donc obligatoirement que c soit un entier strictement négatif. En effet si c>0 alors une des racines est strictement négative ou nulle (donc multiple dans ce cas). Supposons que c=0 alors l'équation hypergéométrique s'écrit :* $x\,y''(x)-x\,y'(x)-a\,y(x)=0$*. Par la substitution y(x)=x u(x), la fonction u(x) a pour équation différentielle :* $x\;u''(x)+(2-x)\,u'(x)-(a+1)\,u(x)=0$*. Cette équation est elle-même hypergéométrique 1F1 avec le paramètre c=2, qui admet donc deux racines indicielles ρ=0 et ρ=-1, une des racines étant négative, elle ne respecte la condition nécessaire de positivité et d'unicité de toutes les racines. Il en découle bien que c doit être strictement négatif. Écrivons l'équation hypergéométrique avec maintenant c >0 :* $x\,y''(x)-(c+x)\,y'(x)-a\,y(x)=0$*. Son développement formel de Fröbenius est :*

$$y(x,\rho)=x^{\rho}\left(1+\frac{(\rho+a)}{(\rho+1)(\rho-c)}\,x+\frac{(\rho+a)(\rho+a+1)}{(\rho+1)(\rho+2)(\rho-c)(\rho-c+1)}\,x^2+\ldots+\frac{(\rho+a)_l}{(\rho+1)_l(\rho-c)_l}\,x^l+\ldots\right).$$

La première des racines est $\rho_0=1+c \Rightarrow y(x,\rho_0)=x^{1+c}\left(1+\frac{(1+c+a)}{(2+c)(1+c-c)}\,x+\ldots+\frac{(1+c+a)_l}{(2+c)_l\,l\,!}\,x^l+\ldots\right)$

La deuxième racine dans l'ordre décroissant étant ρ=0, la solution ne doit pas comporter de terme logarithmique. La condition nécessaire énoncée par E.L.Ince est unique et consiste à annuler le déterminant de Fröbenius : $\mathbf{F}_j(\rho)\big|_{\rho=\rho_1}=0 \quad j=\rho_0-\rho_1=1+c \Rightarrow \mathbf{F}_{1+c}(\rho)\big|_{\rho=0}=0$ *. Or on calcul les déterminant de Fröbenius comme suit :*

$$\mathbf{F}_j(\rho)=\begin{bmatrix} f_1(\rho+j-1) & f_2(\rho+j-2) & f_3(\rho+j-3) & \dots & f_{j-1}(\rho+1) & f_j(\rho) \\ f_0(\rho+j-1) & f_1(\rho+j-2) & f_2(\rho+j-3) & \dots & f_{j-2}(\rho+1) & f_{j-1}(\rho) \\ 0 & f_0(\rho+j-2) & f_1(\rho+j+3) & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & \dots & f_2(\rho+1) & f_3(\rho) \\ \dots & \dots & \dots & f_0(\rho+2) & f_1(\rho+1) & f_2(\rho) \\ 0 & 0 & \dots & 0 & f_0(\rho+1) & f_1(\rho) \end{bmatrix}$$

Avec ici les fonctions indicielles qui ont les valeurs suivantes :

$$f_0(\rho)=\rho\,(\rho-1-c) \quad f_1(\rho)=-a-\rho \quad \forall l\ge 2 \quad f_l(\rho)=0$$

Il en résulte une expression particulièrement simple du déterminant de Fröbenius, une fois factorisée : $\mathbf{F}_{1+c}(\rho)\big|_{\rho=0}=(-1)^{c+1}a(a+1)\times\ldots\times(a+c)$*. Pour que ce déterminant s'annule il suffit donc que a ou b soit un entier négatif ou nul dont la valeur absolue soit inférieur ou égal à c :*

$$\begin{cases} a\in\mathbf{N} \quad et \quad a\le 0 \\ c+a>0 \end{cases}$$

La première des solutions de l'équation différentielle $x\,y''(x)-(c+x)\,y'(x)-a\,y(x)=0$ *s'écrit :*

$$y_0(x)=x^{1+c}\left(1+\frac{(1+c+a)}{(2+c)(1+c-c)}x+\ldots+\frac{(1+c+a)_l}{(2+c)_l\,l\,!}x^l+\ldots\right)=x^{1+c}\,{}_1F_1(1+c+a\,;2+c\,;x)$$

La deuxième solution est polynomiale et elle s'écrit : $y_1(x)=1+\frac{a}{(-c)}x+\frac{a\,(a+1)}{(-c)(-c+1)}x^2+\ldots+\frac{(a)_{-a}}{(1)_{-a}(-c)_{-a}}x^{-a}$

Par évidence les deux solutions sont bien indépendantes et ne comportent aucune singularité en x=0. La deuxième solution peut également s'écrire : $y_1(x)={}_1F_1(a\,;-c\,;x) \quad avec \quad a\le 0 \quad et \quad c+a>0$

Exemple : conditions pour que la singularité x=0 de l'équation hypergéométrique 0F1 soit apparente

Revenons sur l'équation hypergéométrique 0F1 : $x\, y''(x)+c\, y'(x)-y(x)=0$, *pour laquelle il y a deux racines indicielles ρ=0, et ρ=1-c. La première condition nécessaire pour une singularité apparente est que les deux racines indicielles soit entières, toutes distinctes et toutes positives. Dans ces conditions il faut donc obligatoirement que c soit un entier strictement négatif. En effet si c>0 alors une des racines est strictement négative ou nulle (donc multiple dans ce cas). Supposons que c=0 alors l'équation hypergéométrique s'écrit :* $x\, y''(x)-y(x)=0$. *Par la substitution y(x)=x u(x), la fonction u(x) a pour équation différentielle :* $x\, u''(x)+2\, u'(x)-u(x)=0$. *Cette équation est elle-même hypergéométrique 0F1 avec le paramètre c=2, qui admet donc deux racines indicielles ρ=0 et ρ=-1, une des racines étant négative, elle ne respecte la condition nécessaire de positivité et d'unicité de toutes les racines. Il en découle bien que c doit être strictement négatif. Écrivons l'équation hypergéométrique avec maintenant c >0 :* $x\, y''(x)-c\, y'(x)-y(x)=0$. *Son développement formel de Fröbenius est :*

$$y(x,\rho)=x^{\rho}\left(1+\frac{1}{(\rho+1)(\rho-c)}x+\frac{1}{(\rho+1)(\rho+2)(\rho-c)(\rho-c+1)}x^2+\ldots+\frac{1}{(\rho+1)_l(\rho-c)_l}x^l+\ldots\right).$$

La première des racines est $\rho_0=1+c \Rightarrow y(x,\rho_0)=x^{1+c}\left(1+\frac{1}{(2+c)(1+c-c)}x+\ldots+\frac{1}{(2+c)_l\, l!}x^l+\ldots\right)$

La deuxième racine dans l'ordre décroissant étant ρ=0, la solution ne doit pas comporter de terme logarithmique. La condition nécessaire énoncée par E.L.Ince est unique et consiste à annuler le déterminant de Fröbenius : $\mathbf{F}_j(\rho)\big|_{\rho=\rho_1}=0 \quad j=\rho_0-\rho_1=1+c \Rightarrow \mathbf{F}_{1+c}(\rho)\big|_{\rho=0}=0$. *Or on calcul les déterminant de Fröbenius comme suit :*

$$\mathbf{F}_j(\rho)=\begin{bmatrix} f_1(\rho+j-1) & f_2(\rho+j-2) & f_3(\rho+j-3) & \ldots & f_{j-1}(\rho+1) & f_j(\rho) \\ f_0(\rho+j-1) & f_1(\rho+j-2) & f_2(\rho+j-3) & \ldots & f_{j-2}(\rho+1) & f_{j-1}(\rho) \\ 0 & f_0(\rho+j-2) & f_1(\rho+j+3) & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & 0 & \ldots & \ldots & f_2(\rho+1) & f_3(\rho) \\ \ldots & \ldots & \ldots & f_0(\rho+2) & f_1(\rho+1) & f_2(\rho) \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & f_0(\rho+1) & f_1(\rho) \end{bmatrix}$$

Avec ici les fonctions indicielles qui ont les valeurs suivantes :

$$f_0(\rho)=\rho\,(\rho-1-c) \quad f_1(\rho)=-1 \quad \forall l\geq 2 \quad f_l(\rho)=0$$

Il en résulte une expression particulièrement simple du déterminant de Fröbenius, une fois factorisée : $\mathbf{F}_{1+c}(\rho)\big|_{\rho=0}=(-1)^{c+1}$ *qui par évidence jamais ne s'annule. Aussi x=0 ne peut être une singularité apparente pour l'équation différentielle* $x\, y''(x)+c\, y'(x)-y(x)=0$ *lorsque c a valeur entière positive ou négative. Au passage les solutions de l'équation :*

$$x\, y''(x)-y(x)=0 \Leftrightarrow y(x)=c_1\sqrt{x}\, I_1\left(\sqrt{x}\right)+c_2\sqrt{x}\, K_1\left(\sqrt{x}\right)$$

correspondent à des fonctions de Bessel modifiée I et K qui comportent pour K effectivement un terme logarithmique.

Exemple de solutions locales avec une racine indicielle unique et multiple

Je vais maintenant étudié les conditions pour lesquelles une équation différentielle du n-ième degré régulière en z=0 ne possède qu'une seule racine indicielle de multiplicité n. Cela va permettre d'illustrer la construction complète de toutes les solutions indépendantes, l'une régulière et les autres comportant des termes logarithmiques.

Soit donc l'équation différentielle du n-ième degré régulière en 0 :

$$\begin{cases} y^{(n)}(z)+\dfrac{p_1(z)}{z}\,y^{(n-1)}(z)+\ldots+\dfrac{p_{n-1}(z)}{z^{n-1}}\,y^{(1)}(z)+\dfrac{p_n(z)}{z^n}\,y(z)=0 \\ p_l(z)=p_l(0)+\sum_{j=1}^{j=+\infty}a_{l,j}z^l \qquad p_l(0)\neq 0 \end{cases}$$

Nous allons déterminer les conditions pour lesquelles l'équation indicielle est de la forme : $(\rho-\rho_0)^n$

En général l'équation indicielle pour cette équation différentielle est de la forme :

$$\begin{cases} f_0(\rho)=[\rho]_n+[\rho]_{n-1}p_1(0)+\ldots+[\rho]_1 p_{n-1}(0)+p_n(0)=0 \\ [\rho]_n=\prod_{l=0}^{l=n-1}(\rho-l) \qquad [\rho]_1=\rho \qquad [\rho]_0=1 \end{cases}$$

Les développements des expressions $[\rho]_n$ *sont les suivants :*

$$[\rho]_n=\prod_{l=0}^{l=n-1}(\rho-l)=\sum_{l=1}^{l=n}\alpha_{l,n}\rho^l \quad \alpha_{n,n}=1 \quad et \quad \alpha_{1,n}=(n-1)!$$

On peut établir la récurrence sur les coefficients $\alpha_{l,n}$ *sous la forme :*

$$\begin{cases} \alpha_{n+1,n+1}=\alpha_{n,n}=1 \\ \alpha_{l,n+1}=\alpha_{l-1,n}-n\,\alpha_{l,n} \quad pour \quad l\in[2,\ldots,n-1] \\ \alpha_{1,n+1}=-n\,\alpha_{1,n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_{l,n}=0 \quad l\le 0 \quad et \quad \alpha_{l,n}=0 \quad l>n \\ \alpha_{1,1}=1 \\ \alpha_{l,n+1}=\alpha_{l-1,n}-n\,\alpha_{l,n} \end{cases}$$

Pour que l'équation indicielles soit de la forme :

$$f_0(\rho)=[\rho]_n+[\rho]_{n-1}p_1(0)+\ldots+[\rho]_1 p_{n-1}(0)+p_n(0)=(\rho-\rho_0)^n$$

Par identification des coefficients de puissance de ρ, sachant que :

$$(\rho-\rho_0)^n=\sum_{l=0}^{l=n}(-1)^l C_n^l \rho_0{}^l \rho^{n-l} \qquad C_n^l=\frac{n!}{l!(n-l)!}$$

Il vient un système d'équations linéaires :

$$p_l(0)=-\alpha_{n-l,n}-\sum_{j=1}^{j=l-1}p_j(0)\,\alpha_{n-l,n-j}+(-1)^l\frac{n!}{l!(n-l)!}\rho_0{}^l \quad de \quad l\in[1,\ldots,n]$$

Pour exemple voici les valeurs des coefficients $p_l(0)$ pour les premiers degrés d'équations différentielles : $\begin{cases} y^{(n)}(z)+\dfrac{p_1(z)}{z}\,y^{(n-1)}(z)+\ldots+\dfrac{p_{n-1}(z)}{z^{n-1}}\,y^{(1)}(z)+\dfrac{p_n(z)}{z^n}\,y(z)=0 \\ p_l(z)=p_l(0)+\sum\limits_{j=1}^{j=+\infty}a_{l,j}z^l \qquad p_l(0)\neq 0 \end{cases}$

Pour $n=2\to p_1(0)=1-2\rho_0 \quad p_2(0)={\rho_0}^2$

Pour $n=3\to p_1(0)=3-3\rho_0 \quad p_2(0)=1-3\rho_0+3{\rho_0}^2 \quad p_3(0)=-{\rho_0}^3$

Pour $n=4\to p_1(0)=6-4\rho_0 \quad p_2(0)=7-12\rho_0+6{\rho_0}^2 \quad p_3(0)=1-4+6{\rho_0}^2-4{\rho_0}^3 \quad p_4(0)={\rho_0}^4$

Pour $n=5\to\begin{cases} p_1(0)=5\,(2-\rho_0) \quad p_2(0)=5\left(5-6\rho_0+2{\rho_0}^2\right) \quad p_3(0)=5\left(3-7\rho_0+6{\rho_0}^2-2{\rho_0}^3\right) \\ p_3(0)=1-5\rho_0+10{\rho_0}^2-10{\rho_0}^3+5{\rho_0}^4 \quad p_5(0)=-{\rho_0}^5 \end{cases}$

Lorsque les fonctions $p_l(z)$ sont réduit à $p_l(0)$ et que ces derniers paramètres vérifient les relations , alors les solutions régulières se calcule immédiatement. En effet la première solution régulière sans terme logarithmique est triviale :

$$\begin{cases} y^{(n)}(z)+\dfrac{p_1(0)}{z}\,y^{(n-1)}(z)+\ldots+\dfrac{p_{n-1}(0)}{z^{n-1}}\,y^{(1)}(z)+\dfrac{p_n(0)}{z^n}\,y(z)=0 \\ p_l(0)=-\alpha_{n-l,n}-\sum\limits_{j=1}^{j=l-1}p_j(0)\,\alpha_{n-l,n-j}+(-1)^l\dfrac{n!}{l!(n-l)!}{\rho_0}^l \quad de \quad l\in[1,\ldots,n] \end{cases}\Rightarrow y_0(z)=w_0(z)=z^{\rho_0}$$

Étant donné que la récurrence du développement est triviale est ce réduit à la valeur :

$$c_0(\rho)=1 \quad c_l(\rho)=0 \quad pour \quad l\geq 1$$

Toutes les autres solutions se déduisent immédiatement par la construction classique une seule racine multiple sachant que toutes les dérivations sont identiquement nulles :

$$\forall l\geq 1 \quad w_l(z)\equiv 0\to y_l(z)=z^{\rho_0}\left(Log(z)\right)^l$$

Prenons maintenant un exemple plus complexe à l'ordre deux pour la racine double ρ=0 :

$$y''(z)+\frac{1+a_1z}{z}\,y'(z)+\frac{a_2}{z}\,y(z)=0$$

L'injection de la solution régulière de la forme $y(z,\rho)=\sum\limits_{l=0}^{l=\infty}c_l(\rho)\,z^{l+\rho} \quad c_0(\rho)=1$ *conduit à la récurrence suivante à deux termes :* $c_0(\rho)=1 \quad c_l(\rho)=-\dfrac{(\rho+l)\,a_1+a_2-a_1}{(\rho+l)^2}\,c_{l-1}(\rho)$.

Ce qui permet de construire immédiatement les deux solutions indépendantes :

$$\begin{cases} w_0(z)=\sum\limits_{l=0}^{l=\infty}c_l(0)\,z^l\approx 1-a_2z+a_2(a_1+a_2)\,z^2+\ldots \\ w_1(z)=\sum\limits_{l=0}^{l=\infty}\left.\dfrac{dc_l(\rho)}{d\rho}\right|_{\rho=0}z^l\approx(2a_2-a_1)\,z+\left({a_1}^2-a_1a_2-3{a_2}^2\right)\dfrac{z^2}{4} \\ y_0(z)=w_0(z) \\ y_1(z)=w_0(z)\,Log(z)+w_1(z) \end{cases}$$

Prenons l'équation différentielle d'ordre trois pour la racine triple ρ=0 :

$$y^{(3)}(z)+\frac{3+a_1 z}{z}\,y''(z)+\frac{1+a_2 z}{z^2}\,y'(z)+\frac{a_3}{z^2}\,y(z)=0$$

L'injection de la solution régulière de la forme $y(z,\rho)=\sum_{l=0}^{l=\infty} c_l(\rho)\,z^{l+\rho} \quad c_0(\rho)=1$ *conduit à la récurrence suivante à deux termes :*

$$c_0(\rho)=1 \quad c_l(\rho)=-\frac{(\rho+l-1)(\rho+l-2)\,a_1+(\rho+l-1)\,a_2+a_3}{(\rho+l)^3}\,c_{l-1}(\rho) \;.$$

Ce qui permet de construire immédiatement les trois solutions indépendantes :

$$\begin{cases} w_0(z)=\sum_{l=0}^{l=\infty} c_l(0)\,z^l \approx 1-a_3 z+\frac{a_3(a_2+a_3)}{8}\,z^2-\frac{a_3(a_2+a_3)(2a_1+2a_2+a_3)}{216}\,z^3+\dots \\ w_1(z)=\sum_{l=0}^{l=\infty} \left.\frac{dc_l(\rho)}{d\rho}\right|_{\rho=0} z^l \approx (a_1-a_2+3a_3)\,z+\frac{2a_2^{\,2}-2a_1a_2-5a_2a_3-9a_3^{\,2}}{16}\,z^2+ \\ +\frac{4a_2\left(a_1^{\,2}-a_2^{\,2}\right)+10a_2a_3(a_1+a_2)+(16a_1+27a_2)\,a_3^{\,2}+11\,a_3^{\,3}}{432}\,z^3 \\ w_2(z)=\sum_{l=0}^{l=\infty} \left.\frac{d^2c_l(\rho)}{d\rho^2}\right|_{\rho=0} z^l \approx 2\,(3a_2-6\,a_3-4\,a_1)\,z+\frac{6a_2a_3-2a_1^{\,2}-7a_2^{\,2}+a_1(11\,a_2+4\,a_3)+24\,a_3^{\,2}}{8}\,z^2+ \\ +\frac{12\left(a_1^{\,3}-4a_1^{\,2}a_2-3a_1a_2^{\,2}+4a_2^{\,3}\right)-2\left(9a_1^{\,2}+40a_1a_2+13\,a_2^{\,2}\right)a_3-5\,(25a_1+42a_2)\,a_3^{\,2}-103\,a_3^{\,3}}{648}\,z^3 \\ y_0(z)=w_0(z) \\ y_1(z)=w_0(z)\,Log(z)+w_1(z) \\ y_2(z)=w_0(z)\,(Log(z))^2+2\,w_1(z)Log(z)+w_2(z) \end{cases}$$

Remarque : au moment où j'écris, je note que pour la version 14.0 de Mathematica la fonction AsymptoticDValue ne marche pas pour cette équation différentielle, sauf si l'on pose $a_1=0$*. L'instruction*

```
AsymptoticDSolveValue[a[3]/x^2 y[x] + (1 + x a[2])/x^2 y'[x] + (3 + x a[1])/x y''[x] + y^(3)[x] == 0, y[x], {x, 0, 3}]
```

engendre une erreur :

Infinity: Indeterminate expression 0 a[1] ComplexInfinity encountered.

Tandis que l'instruction :

```
AsymptoticDSolveValue[a[3]/x^2 y[x] + (1 + x a[2])/x^2 y'[x] + 3/x y''[x] + y^(3)[x] == 0, y[x], {x, 0, 3}]
```

Donne le même résultat qu'indiqué ci-dessus.

Soit l'équation l'équation différentielle d'ordre n pour la racine de multiplicité n ρ=0, telle que les coefficient pl(0) suivent la récurrence suivante ;

$$\begin{cases} y^{(n)}(z)+\dfrac{p_1(0)+a_1 z}{z}\, y^{(n-1)}(z)+\dfrac{p_2(0)+a_2 z}{z^2}\, y^{(n-1)}(z)+\ldots+\dfrac{p_{n-1}(0)+a_{n-1} z}{z^{n-1}}\, y^{(1)}(z)+\dfrac{p_n(0)+a_n z}{z^n}\, y(z)=0 \\ p_l(0)=-\alpha_{n-l,n}-\displaystyle\sum_{j=1}^{j=l-1} p_j(0)\,\alpha_{n-l,n-j} \quad de \quad l\in[1,\ldots,n] \\ \alpha_{l,n}=0 \quad l\le 0 \quad et \quad \alpha_{l,n}=0 \quad l>n \quad et \quad \alpha_{1,1}=1 \\ \alpha_{l,n+1}=\alpha_{l-1,n}-n\,\alpha_{l,n} \end{cases}$$

L'injection de la solution régulière de la forme $y(z,\rho)=\sum_{l=0}^{l=\infty} c_l(\rho)\, z^{l+\rho} \quad c_0(\rho)=1$ *conduit à la récurrence suivante à deux termes :*

$$[\rho+l-1]_{n-1}=\prod_{j=0}^{j=n-2}(\rho+l-1-j) \qquad [\rho+l-1]_{n-2}=\prod_{j=0}^{j=n-3}(\rho+l-1-j) \quad \ldots \quad [\rho+l-1]_1=\rho+l-1$$

$$c_0(\rho)=1 \quad c_l(\rho)=-\frac{[\rho+l-1]_{n-1}\, a_1+[\rho+l-1]_{n-2}\, a_2+\ldots+[\rho+l-1]_1\, a_{n-1}+[\rho+l-1]_0\, a_n}{(\rho+l)^n}\, c_{l-1}(\rho) \Leftrightarrow c_l(\rho)=-\frac{\sum_{j=1}^{j=n}[\rho+l-1]_{n-j}\, a_j}{(\rho+l)^n}\, c_{l-1}(\rho)$$

Et les n solutions de Fröbenius se construisent comme suit :

$$\begin{cases} w_0(z)=\displaystyle\sum_{l=0}^{l=\infty} c_l(0)\, z^l \qquad w_1(z)=\sum_{l=0}^{l=\infty}\left.\frac{dc_l(\rho)}{d\rho}\right|_{\rho=0} z^l \quad \ldots \quad w_n(z)=\sum_{l=0}^{l=\infty}\left.\frac{d^n c_l(\rho)}{d\rho^n}\right|_{\rho=0} z^l \\ y_0(z)=w_0(z) \\ y_1(z)=w_0(z)\,Log(z)+w_1(z) \\ y_2(z)=w_0(z)\,(Log(z))^2+2\,w_1(z)Log(z)+w_2(z) \\ y_3(z)=w_0(z)\,(Log(z))^3+3\,w_1(z)(Log(z))^2+3\,w_2(z)Log(z)+w_3(z) \\ y_4(z)=w_0(z)\,(Log(z))^4+4\,w_1(z)(Log(z))^3+6\,w_2(z)(Log(z))^2+4\,w_3(z)Log(z)+w_4(z) \\ \ldots \\ y_{n-1}(z)=\displaystyle\sum_{l=0}^{l=n-1} C_{n-1}^l\times w_l(z)\,(Log(z))^{n-1-l} \qquad C_{n-1}^l=\frac{(n-1)!}{l!\,(n-1-l)!} \end{cases}$$

Construction des solutions d'une équation différentielle du n-ième degré autour des points ordinaires

Ce bref chapitre complète la construction des solutions autour des points singuliers réguliers, en ce sens qu'il s'agit en quelque sorte d'un cas particulier pour lequel les solutions sont de la forme :

$$y(x)=\sum_{l=0}^{l=+\infty} C_l z^l \quad avec \quad C_l \text{ non tous nuls}$$

On peut d'ailleurs utiliser le formalisme de Fröbenius pour la construction de ces solutions. Il suffit pour cela de se placer une nouvelle fois autour du point z=0, par souci de simplicité et sans réduire la généralité du propos. Si l'expression de l'équation différentielle est la suivante :

$$p_0(z)\,y^{(n)}(z)+p_1(z)\,y^{(n-1)}(z)+\ldots+p_{n-1}(z)\,y^{(1)}(z)+p_n(z)\,y(z)=0$$

pour un point ordinaire il s'ensuit que p0(z) ne s'annule pas en z=0 et par suite les limites suivantes sont toutes nulles :

$$P_{1,0}=\underset{z\to 0}{Lim}\; z\,\frac{p_1(z)}{p_0(z)}=P_{2,0}=\underset{z\to 0}{Lim}\; z^2\,\frac{p_2(z)}{p_0(z)}=\ldots=P_{n-1,0}=\underset{z\to 0}{Lim}\; z^{n-1}\,\frac{p_{n-1}(z)}{p_0(z)}=P_{n,0}=\underset{z\to 0}{Lim}\; z^n\,\frac{p_n(z)}{p_0(z)}=0$$

Par suite l'équation indicielle se réduit à : $f_0(\rho)=[\rho]_n=\rho(\rho-1)\ldots(\rho-n+1)=0$ *, dont les solutions sont évidemment :* $\rho=0 \quad ou \quad \rho=1 \quad \ldots \quad ou \quad \rho=n-1$.

Comme la fonction f(z,ρ) s'écrit autour de z=0 :

$$\begin{cases} f(z,\rho)=[\rho]_n+[\rho]_{n-1}\,z\,\dfrac{p_1(z)}{p_0(z)}+[\rho]_{n-2}\,z^2\,\dfrac{p_2(z)}{p_0(z)}+\ldots+[\rho]_1\,z^{n-1}\,\dfrac{p_{n-1}(z)}{p_0(z)}+z^n\,\dfrac{p_n(z)}{p_0(z)} \\ f(z,\rho)=\displaystyle\sum_{i=0}^{i=+\infty} f_i(\rho)\,z^i \qquad [\rho]_n=\prod_{l=0}^{l=n-1}(\rho-l) \qquad [\rho]_1=\rho \qquad [\rho]_0=1 \end{cases}$$

les fonctions indicielles $f_i(\rho)$ se calculent formellement ou numériquement par les dérivées successives de f(z,ρ) au point singulier z=0 soit :

$$f(z,\rho)=\sum_{i=0}^{i=+\infty}\frac{f^{(i)}(z,\rho)}{i\,!}\,z^i=\sum_{i=0}^{i=+\infty} f_i(\rho)\,z^i \Rightarrow f_i(\rho)=\frac{1}{i\,!}\times\left.\frac{\partial^i f(z,\rho)}{\partial z^i}\right|_{z=0}$$

Et il se trouve aussi que :

$$\begin{cases} z\dfrac{p_1(z)}{p_0(z)} = P_{1,1}z + P_{1,2}z^2 + \dots \quad avec \quad P_{1,0} = 0 \\ z^2\dfrac{p_2(z)}{p_0(z)} = P_{2,2}z^2 + P_{2,3}z^3 + \dots \quad avec \quad P_{2,0} = P_{2,1} = 0 \\ \dots \\ z^n\dfrac{p_n(z)}{p_0(z)} = P_{n,n}z^n + P_{n,n+1}z^{n+1} + \dots \quad avec \quad P_{n,0} = P_{n,1} = \dots P_{n,0} = P_{n,n-1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_0(\rho) = [\rho]_n \\ f_1(\rho) = [\rho]_{n-1}P_{1,1} \\ f_2(\rho) = [\rho]_{n-1}P_{1,2} + [\rho]_{n-2}P_{2,2} \\ f_3(\rho) = [\rho]_{n-1}P_{1,3} + [\rho]_{n-2}P_{2,3} + [\rho]_{n-3}P_{3,3} \\ \dots \\ f_n(\rho) = [\rho]_{n-1}P_{1,n} + [\rho]_{n-2}P_{2,n} + \dots + [\rho]_1 P_{n-1,n} + [\rho]_0 P_{n,n} \end{cases}$$

Il est à remarquer que les fonctions $[\rho]_n$ *ont les propriétés suivantes :*

$$[\rho]_n = \prod_{l=0}^{l=n-1}(\rho - l) \qquad [\rho]_1 = \rho \qquad [\rho]_0 = 1 \Rightarrow \begin{cases} [\rho]_n = \rho \times [\rho-1]_{n-1} \\ [\rho+1]_n = (\rho+1)\times[\rho]_{n-1} \\ [\rho+2]_n = (\rho+2)\times[\rho+1]_{n-1} = (\rho+2)(\rho+1)\times[\rho]_{n-2} \\ [\rho+3]_n = (\rho+3)\times[\rho+2]_{n-1} = (\rho+3)(\rho+2)\times[\rho+1]_{n-2} = (\rho+3)(\rho+2)(\rho+1)\times[\rho]_{n-3} \\ \dots \\ [\rho+n-1]_n = (\rho+n-1)\times\dots\times(\rho+2)(\rho+1)\rho \end{cases}$$

$$Et \quad \begin{cases} [\rho]_n = (\rho-(n-1))\times[\rho]_{n-1} \\ [\rho]_{n-1} = (\rho-(n-2))\times[\rho]_{n-2} \\ [\rho]_{n-2} = (\rho-(n-3))\times[\rho]_{n-3} \\ \dots \\ [\rho]_1 = \rho\times[\rho]_0 = \rho \end{cases}$$

La construction d'une solution selon le développement de Fröbenius suit la récurrence suivante :

$$\forall l \quad C_l f_0(\rho+l) + C_{l-1}f_1(\rho+l-1) + \dots + C_0 f_l(\rho) = 0 \Rightarrow \begin{cases} C_0 f_0(\rho) = 0 \\ C_1 f_0(\rho+1) + C_0 f_1(\rho) = 0 \\ C_2 f_0(\rho+2) + C_1 f_1(\rho+1) + C_0 f_2(\rho) = 0 \\ \dots \\ C_l f_0(\rho+l) + C_{l-1}f_1(\rho+l-1) + \dots + C_0 f_l(\rho) = 0 \\ \dots \end{cases}$$

Commençons par la racine indicielle la plus grande ρ=n-1, la détermination des coefficients C_l *ne pose aucun problème en suivant la récurrence précédente. Si maintenant on se place à la seconde racine indicielle ρ=n-2, dans le cas d'un point singulier régulier, alors l'équation :*

$$C_1 f_0(\rho+1) + C_0 f_1(\rho) = C_1 f_0(n-1) + C_0 f_1(n-2) = 0$$

posait problème puisqu'elle rendait impossible la détermination du coefficient C_1 *puisque* $f_0(n-1)=0$. *Mais dans le cas de z=0 comme point ordinaire on peut factoriser le terme d'indétermination* $[\rho]_{n-1}$ *comme suit :*

$$f_0(\rho+1) = [\rho+1]_n = (\rho+1)\times[\rho]_{n-1} \qquad f_1(\rho) = [\rho]_{n-1}P_{1,1}$$
$$\Rightarrow C_1 f_0(\rho+1) + C_0 f_1(\rho) = [\rho]_{n-1}\left((\rho+1)C_1 + C_0 P_{1,1}\right)$$
$$\Rightarrow (\rho+1)C_1 + C_0 P_{1,1} = (n-2+1)C_1 + C_0 P_{1,1} = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{P_{1,1}}{(n-1)}C_0$$

Il s'en suit que C_1 est parfaitement défini et tous les coefficients qui se suivent également. Pour la racine immédiatement inférieure suivante ρ=n-3, dans les deux expressions :

$$\begin{cases} C_1 f_0(\rho+1) + C_0 f_1(\rho) = 0 \\ C_2 f_0(\rho+2) + C_1 f_1(\rho+1) + C_0 f_2(\rho) = 0 \end{cases}$$

on peut encore factoriser les deux termes d'indétermination : $[\rho]_{n-1} \quad et \quad [\rho]_{n-2}$*, à savoir :*

$$f_0(\rho+1) = [\rho+1]_n = (\rho+1)\times[\rho]_{n-1} \qquad f_1(\rho) = [\rho]_{n-1} P_{1,1}$$
$$f_0(\rho+2) = (\rho+2)(\rho+1)\times[\rho]_{n-2} \quad f_1(\rho+1) = (\rho+1)P_{1,1}\times[\rho]_{n-2} \quad f_2(\rho) = ((\rho-(n-2))P_{1,2} + P_{2,2})\times[\rho]_{n-2}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 f_0(\rho+1) + C_0 f_1(\rho) = [\rho]_{n-1}((\rho+1)\,C_1 + C_0 P_{1,1}) \\ C_2 f_0(\rho+2) + C_1 f_1(\rho+1) + C_0 f_2(\rho) = [\rho]_{n-2}((\rho+2)(\rho+1)\,C_2 + (\rho+1)\,P_{1,1} C_1 + ((\rho-(n-2))\,P_{1,2} + P_{2,2})\,C_0) \end{cases}$$

Il s'en suit que la détermination des coefficients C_1 et C_2 ne pose plus de problème :

$$\begin{cases} (\rho+1)\,C_1 + C_0 P_{1,1} = 0 \\ (\rho+2)(\rho+1)\,C_2 + (\rho+1)\,P_{1,1} C_1 + ((\rho-(n-2))\,P_{1,2} + P_{2,2})\,C_0 = 0 \end{cases}$$

De proche en proche on démontre facilement que pour toutes les autres racines ρ=n-4 jusqu'à ρ=0, la même factorisation des termes d'indétermination a lieu et que tous les coefficients du développement peuvent ainsi être déterminés sans ambiguïté à partir de la valeur C_0 .

Prenons d'ailleurs la dernière racine indicielle ρ=0, ce sont tous les coefficients du système suivant de n-1 équations linéaires qu'il nous faut déterminer en fonction de C_0:

$$\begin{cases} C_1 f_0(\rho+1) + C_0 f_1(\rho) = 0 \\ C_2 f_0(\rho+2) + C_1 f_1(\rho+1) + C_0 f_2(\rho) = 0 \\ C_3 f_0(\rho+3) + C_2 f_1(\rho+2) + C_1 f_2(\rho+1) + C_0 f_3(\rho) = \\ \ldots \\ C_{n-1} f_0(\rho+n-1) + C_{n-2} f_1(\rho+n-2) + \ldots + C_0 f_{n-1}(\rho) = 0 \end{cases}$$

Etant donné que toutes les expressions $f_0(\rho+1), f_0(\rho+2), \ldots, f_0(\rho+n-1)$ *sont censées s'annuler, car elles se factorisent avec les expressions respectives :*

$$\begin{cases} C_1 f_0(\rho+1) + C_0 f_1(\rho) \propto [\rho]_{n-1} \\ C_2 f_0(\rho+2) + C_1 f_1(\rho+1) + C_0 f_2(\rho) \propto [\rho]_{n-2} \\ C_3 f_0(\rho+3) + C_2 f_1(\rho+2) + C_1 f_2(\rho+1) + C_0 f_3(\rho) \propto [\rho]_{n-3} \\ \ldots \\ C_i f_0(\rho+i) + C_{i-1} f_1(\rho+i-1) + \ldots + C_0 f_i(\rho) \propto [\rho]_{n-i} \\ \ldots \\ C_{n-1} f_0(\rho+n-1) + C_{n-2} f_1(\rho+n-2) + \ldots + C_0 f_{n-1}(\rho) \propto [\rho]_1 \end{cases}$$

Pour la détermination des coefficients suivants (l>=n) du développement, comme dans l'équation $C_l f_0(\rho+l) + C_{l-1} f_1(\rho+l-1) + \ldots + C_0 f_l(\rho) = 0$*, le facteur* $f_0(\rho+l) \neq \quad l \geq n$ *ne s'annule jamais, il n'y a plus de problème pour appliquer la récurrence.*

Or en complétant les formules précédentes nous avons :

$$\begin{cases} f_0(\rho+3)=[\rho+3]_n=(\rho+3)(\rho+2)(\rho+1)\times[\rho]_{n-3} \qquad f_1(\rho+2)=[\rho+2]_{n-1}P_{1,1}=(\rho+2)(\rho+1)\times P_{1,1}\times[\rho]_{n-3} \\ f_2(\rho+1)=[\rho+1]_{n-1}P_{1,2}+[\rho+1]_{n-2}P_{2,2}=(\rho+1)\left((\rho-(n-3))\,P_{1,2}+P_{2,2}\right)\times[\rho]_{n-3} \\ f_2(\rho)=[\rho]_{n-1}P_{1,2}+[\rho]_{n-2}P_{2,2}=\left((\rho-(n-2))P_{1,2}+P_{2,2}\right)\times[\rho]_{n-2} \\ f_3(\rho)=[\rho]_{n-1}P_{1,3}+[\rho]_{n-2}P_{2,3}+[\rho]_{n-3}P_{3,3}=\left((\rho-(n-2))(\rho-(n-3))P_{1,3}+(\rho-(n-3))P_{2,3}+P_{3,3}\right)\times[\rho]_{n-3} \\ \ldots \\ f_i(\rho)=[\rho]_{n-1}P_{1,i}+[\rho]_{n-2}P_{2,i}+\ldots+[\rho]_{n-i}P_{i,i}=\left[\left(\prod_{l=n-i}^{l=n-2}(\rho-l)\right)P_{1,i}+\left(\prod_{l=n-i}^{l=n-3}(\rho-l)\right)P_{2,i}+\ldots+(\rho-(n-i))P_{i-1,i}+P_{i,i}\right]\times[\rho]_{n-i} \\ \ldots \\ f_{n-1}(\rho)=[\rho]_{n-1}P_{1,n-1}+[\rho]_{n-2}P_{2,n-1}+\ldots+[\rho]_1P_{n-1,n-1}=\left[\left(\prod_{l=1}^{l=n-2}(\rho-l)\right)P_{1,n-1}+\left(\prod_{l=1}^{l=n-3}(\rho-l)\right)P_{2,n-1}+\ldots+(\rho-1)P_{n-2,n-1}+P_{n-1,n-1}\right]\times[\rho]_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1f_0(\rho+1)+C_0f_1(\rho)=[\rho]_{n-1}\left((\rho+1)\,C_1+C_0P_{1,1}\right) \\ C_2f_0(\rho+2)+C_1f_1(\rho+1)+C_0f_2(\rho)=[\rho]_{n-2}\left((\rho+2)(\rho+1)\,C_2+(\rho+1)\,P_{1,1}C_1+\left((\rho-(n-2))\,P_{1,2}+P_{2,2}\right)C_0\right) \\ C_3f_0(\rho+3)+C_2f_1(\rho+2)+C_1f_2(\rho+1)+C_0f_3(\rho)= \\ =[\rho]_{n-3}\left((\rho+3)(\rho+2)(\rho+1)C_3+(\rho+2)(\rho+1)P_{1,1}C_2+(\rho+1)\left((\rho-(n-3))\,P_{1,2}+P_{2,2}\right)C_1+\left((\rho-(n-2))(\rho-(n-3))P_{1,3}+(\rho-(n-3))P_{2,3}+P_{3,3}\right)C_0\right) \\ \ldots \\ C_{n-1}f_0(\rho+n-1)+C_{n-2}f_1(\rho+n-2)+\ldots+C_0f_{n-1}(\rho)= \\ =[\rho]_1\left(\left(\prod_{l=1}^{l=n-1}(\rho+l)\right)C_{n-1}+\left(\prod_{l=1}^{l=n-2}(\rho+l)\right)P_{1,1}C_{n-2}+\ldots+\left[\left(\prod_{l=1}^{l=n-2}(\rho-l)\right)P_{1,n-1}+\left(\prod_{l=1}^{l=n-3}(\rho-l)\right)P_{2,n-1}+\ldots+(\rho-1)P_{n-2,n-1}+P_{n-1,n-1}\right]\times C_0\right) \end{cases}$$

Par factorisation des termes $[\rho]_{n-1},[\rho]_{n-2},[\rho]_{n-3},\ldots,[\rho]_1$ *qui s'annulent pour la valeur ρ=0, et leur élimination, le système d'équations linéaires devient pour les n-1 premiers coefficients du développement :*

$$\begin{cases} (\rho+1)\,C_1+C_0P_{1,1}=0 \\ (\rho+2)(\rho+1)\,C_2+(\rho+1)\,P_{1,1}C_1+\left((\rho-(n-2))\,P_{1,2}+P_{2,2}\right)C_0=0 \\ (\rho+3)(\rho+2)(\rho+1)C_3+(\rho+2)(\rho+1)P_{1,1}C_2+(\rho+1)\left((\rho-(n-3))\,P_{1,2}+P_{2,2}\right)C_1+\left((\rho-(n-2))(\rho-(n-3))P_{1,3}+(\rho-(n-3))P_{2,3}+P_{3,3}\right)C_0=0 \\ \ldots \\ \left(\prod_{l=1}^{l=n-1}(\rho+l)\right)C_{n-1}+\left(\prod_{l=1}^{l=n-2}(\rho+l)\right)P_{1,1}C_{n-2}+\ldots+\left[\left(\prod_{l=1}^{l=n-2}(\rho-l)\right)P_{1,n-1}+\left(\prod_{l=1}^{l=n-3}(\rho-l)\right)P_{2,n-1}+\ldots+(\rho-1)P_{n-2,n-1}+P_{n-1,n-1}\right]\times C_0=0 \end{cases}$$

Ce qui permet de déterminer sans ambiguïté les coefficients $C_1,C_2,\ldots,C_{n-1}$ *en fonction de* C_0 *.*

Autrement dit à partir de la même récurrence de départ :

$$\forall l \quad C_l f_0(\rho+l)+C_{l-1}f_1(\rho+l-1)+...+C_0 f_l(\rho)=0 \Rightarrow \begin{cases} C_0 f_0(\rho)=0 \\ C_1 f_0(\rho+1)+C_0 f_1(\rho)=0 \\ C_2 f_0(\rho+2)+C_1 f_1(\rho+1)+C_0 f_2(\rho)=0 \\ ... \\ C_l f_0(\rho+l)+C_{l-1}f_1(\rho+l-1)+...+C_0 f_l(\rho)=0 \\ ... \end{cases}$$

Et moyennant la simplification formelle exposée précédemment et du fait que les fonctions indicielles ont la forme suivante :

$$\begin{cases} f_0(\rho)=[\rho]_n \\ f_1(\rho)=[\rho]_{n-1}P_{1,1} \\ f_2(\rho)=[\rho]_{n-1}P_{1,2}+[\rho]_{n-2}P_{2,2} \\ ... \\ f_n(\rho)=[\rho]_{n-1}P_{1,n}+[\rho]_{n-2}P_{2,n}+...+[\rho]_1 P_{n-1,n}+P_{n,n} \end{cases}$$

On peut déterminer toutes les n solutions analytiques <u>indépendantes</u> par applications successives des valeurs de racines indicielles : ρ=0, ρ=1,..., ρ=n-1 .

<u>On rappelle que ce n'est pas le cas pour un point singulier régulier, et qu'il faut faire intervenir un terme logarithmique lorsque les racines sont séparées par une valeur entière.</u>

Le résultat pour la récurrence générale peut se construire par l'algorithme général suivant :

1 – Construire les coefficients $P_{j,i}$ de l'équation différentielle du n-ième degré comme suit :

$$\begin{cases} z\dfrac{p_1(z)}{p_0(z)}=P_{1,1}z+P_{1,2}z^2+....\Rightarrow P_{1,1}=\left.\dfrac{p_1(z)}{p_0(z)}\right|_{z=0} \quad P_{1,2}=\left.\left(\dfrac{p_1(z)}{p_0(z)}\right)^{(1)}\right|_{z=0} \quad ... \quad P_{1,l}=\left.\dfrac{1}{(l-1)!}\left(\dfrac{p_1(z)}{p_0(z)}\right)^{(l-1)}\right|_{z=0} \\ z^2\dfrac{p_2(z)}{p_0(z)}=P_{2,2}z^2+P_{2,3}z^3+....\Rightarrow P_{2,2}=\left.\dfrac{p_2(z)}{p_0(z)}\right|_{z=0} \quad P_{2,3}=\left.\left(\dfrac{p_2(z)}{p_0(z)}\right)^{(1)}\right|_{z=0} \quad ... \quad P_{2,l}=\left.\dfrac{1}{(l-2)!}\left(\dfrac{p_2(z)}{p_0(z)}\right)^{(l-2)}\right|_{z=0} \\ ... \\ z^n\dfrac{p_n(z)}{p_0(z)}=P_{n,n}z^n+P_{n,n+1}z^{n+1}+....\Rightarrow P_{n,n}=\left.\dfrac{p_n(z)}{p_0(z)}\right|_{z=0} \quad P_{n,n+1}=\left.\left(\dfrac{p_n(z)}{p_0(z)}\right)^{(1)}\right|_{z=0} \quad ... \quad P_{n,n+l}=\left.\dfrac{1}{l!}\left(\dfrac{p_n(z)}{p_0(z)}\right)^{(l)}\right|_{z=0} \end{cases}$$

2 – Construire les fonctions indicielles puis indicielles modifiées comme suit :

$$
\begin{cases}
f_0(\rho)=[\rho]_n \quad f_1(\rho)=[\rho]_{n-1}P_{1,1}=\sum_{j=1}^{j=1}[\rho]_{n-j}P_{j,1} \quad f_2(\rho)=[\rho]_{n-1}P_{1,2}+[\rho]_{n-2}P_{2,2}=\sum_{j=1}^{j=2}[\rho]_{n-j}P_{j,2} \quad f_3(\rho)=[\rho]_{n-1}P_{1,3}+[\rho]_{n-2}P_{2,3}+[\rho]_{n-3}P_{3,3}=\sum_{j=1}^{j=3}[\rho]_{n-j}P_{j,3} \\
\dots \\
f_i(\rho)=[\rho]_{n-1}P_{1,i}+[\rho]_{n-2}P_{2,i}+\dots+[\rho]_{n-i+1}P_{i-1,i}+[\rho]_{n-i}P_{i,i}=\sum_{j=1}^{j=i}[\rho]_{n-j}P_{j,i} \quad i\le n \qquad avec \qquad P_{j,i}=\left.\frac{1}{(i-j)!}\left(\frac{p_i(z)}{p_0(z)}\right)^{(i-j)}\right|_{z=0} \\
\dots \\
f_{n-1}(\rho)=\sum_{j=1}^{j=n-1}[\rho]_{n-j}P_{j,n-1} \qquad f_i(\rho)=\sum_{j=1}^{j=n}[\rho]_{n-j}P_{j,i} \quad i\ge n
\end{cases}
$$

$$
\rightarrow
\begin{cases}
\widetilde{f}_0(\rho,l)=\frac{f_0(\rho+l)}{[\rho]_{n-l}}=\frac{[\rho+l]_n}{[\rho]_{n-l}}=\prod_{j=1}^{j=l}(\rho+j) \quad pour \quad l\ge 0 \qquad \widetilde{f}_1(\rho,l)=\frac{f_1(\rho+l-1)}{[\rho]_{n-l}}=\frac{[\rho+l-1]_{n-1}}{[\rho]_{n-l}}\times P_{1,1}=\begin{cases} P_{1,1} \quad pour \quad 1=l<n \\ P_{1,1}\times\prod_{j=1}^{j=l-1}(\rho+j) \quad pour \quad 1<l<n \end{cases} \\
\widetilde{f}_2(\rho,l)=\frac{f_2(\rho+l-2)}{[\rho]_{n-l}}=\sum_{j=1}^{j=2}\frac{[\rho+l-2]_{n-j}}{[\rho]_{n-l}}\times P_{j,2}=\begin{cases} (\rho-(n-2))\times P_{1,2}+P_{2,2} \quad pour \quad 2=l<n \\ \prod_{j=1}^{j=l-2}(\rho+j)\times\left((\rho-(n-l))\times P_{1,2}+P_{2,2}\right) \quad pour \quad 2<l<n \end{cases} \\
\widetilde{f}_3(\rho,l)=\frac{f_3(\rho+l-3)}{[\rho]_{n-l}}=\sum_{j=1}^{j=3}\frac{[\rho+l-3]_{n-j}}{[\rho]_{n-l}}\times P_{j,3}=\begin{cases} (\rho-(n-3))\left((\rho-(n-2))\times P_{1,3}+P_{2,3}\right)+P_{3,3} \quad pour \quad 3=l<n \\ \prod_{j=1}^{j=l-3}(\rho+j)\times\left((\rho-(n-l))\left((\rho-(n+1-l))\times P_{1,3}+P_{2,3}\right)+P_{3,3}\right) \quad pour \quad 3<l<n \end{cases} \\
\dots \\
\widetilde{f}_i(\rho,l)=\frac{f_i(\rho+l-i)}{[\rho]_{n-l}}=\sum_{j=1}^{j=i}\frac{[\rho+l-i]_{n-j}}{[\rho]_{n-l}}\times P_{j,i}=\begin{cases} \sum_{j=1}^{j=i-1}\left(\prod_{k=n-i}^{k=n-1-j}(\rho-k)\right)\times P_{j,i}+P_{i,i} \quad pour \quad i=l<n \\ \prod_{k=1}^{k=l-i}(\rho+k)\times\left(\sum_{j=1}^{j=i-1}\prod_{k=n-l}^{k=n-l+i-1-j}(\rho-k)\times P_{j,i}+P_{i,i}\right) \quad pour \quad i<l<n \end{cases} \qquad i\in\{1,\dots,l\} \\
\dots \\
\dots \\
\widetilde{f}_{n-1}(\rho,l)=\frac{f_{n-1}(\rho+l-n)}{[\rho]_{n-l}}=\sum_{j=1}^{j=n-1}\frac{[\rho]_{n-j}}{[\rho]_1}P_{j,n-1}=\sum_{j=1}^{j=n-2}\left(\prod_{k=1}^{k=n-1-j}(\rho-k)\right)\times P_{j,n-1}+P_{n-1,n-1} \quad pour \quad n-1=l<n
\end{cases}
$$

3 – Construire comme suit la récurrence des coefficients du développement pour la solution analytique autour de z=0

$$\begin{cases} C_0 = 1 \quad f_0(\rho) = 0 \\ \rho = 0 \\ \rho = 1 \\ \ldots \\ \rho = n-1 \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} C_1 \tilde{f}_0(\rho,1) + C_0 \tilde{f}_1(\rho,1) = 0 \\ C_2 \tilde{f}_0(\rho,2) + C_1 \tilde{f}_1(\rho,2) + C_0 \tilde{f}_2(\rho,2) = 0 \\ \ldots \\ C_l \tilde{f}_0(\rho,l) + C_{l-1} \tilde{f}_1(\rho,l) + \ldots + C_{l-i} \tilde{f}_i(\rho,l) + \ldots + C_0 \tilde{f}_l(\rho,l) = 0 \quad l \le n-1 \quad i \in \{0,\ldots,l\} \\ \ldots \\ C_{n-1} \tilde{f}_0(\rho,n-1) + C_{n-2} \tilde{f}_1(\rho,n-1) + \ldots + C_{n-i} \tilde{f}_i(\rho,n-1) + \ldots + C_0 \tilde{f}_{n-1}(\rho,n-1) = 0 \\ C_n f_0(\rho+n) + C_{n-1} f_1(\rho+n-1) + \ldots + C_{n-i} f_i(\rho+n-i) + \ldots + C_0 f_n(\rho) = 0 \\ \ldots \\ C_l f_0(\rho+l) + C_{l-1} f_1(\rho+l-1) + \ldots + C_{l-i} f_i(\rho+l-i) + \ldots + C_0 f_l(\rho) = 0 \quad l \ge n \\ \ldots \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{f}_i(\rho,l) = \dfrac{f_i(\rho+l-i)}{[\rho]_{n-l}} \quad i \in \{0,\ldots,l\} \quad l \le n-1 \\ \tilde{f}_i(\rho,l) = f_i(\rho+l-i) \quad i \in \{0,\ldots,l\} \quad l \ge n \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} C_1 \tilde{f}_0(\rho,1) + C_0 \tilde{f}_1(\rho,1) = 0 \\ C_2 \tilde{f}_0(\rho,2) + C_1 \tilde{f}_1(\rho,2) + C_0 \tilde{f}_2(\rho,2) = 0 \\ \ldots \\ C_l \tilde{f}_0(\rho,l) + C_{l-1} \tilde{f}_1(\rho,l) + \ldots + C_{l-i} \tilde{f}_i(\rho,l) + \ldots + C_0 \tilde{f}_l(\rho,l) = 0 \quad l \le n-1 \quad i \in \{0,\ldots,l\} \\ \ldots \\ C_{n-1} \tilde{f}_0(\rho,n-1) + C_{n-2} \tilde{f}_1(\rho,n-1) + \ldots + C_{n-i} \tilde{f}_i(\rho,n-1) + \ldots + C_0 \tilde{f}_{n-1}(\rho,n-1) = 0 \\ C_n \tilde{f}_0(\rho,n) + C_{n-1} \tilde{f}_1(\rho,n-1) + \ldots + C_{n-i} \tilde{f}_i(\rho,n-i) + \ldots + C_0 \tilde{f}_n(\rho) = 0 \\ \ldots \\ C_l \tilde{f}_0(\rho,l) + C_{l-1} \tilde{f}_1(\rho,l-1) + \ldots + C_{l-i} \tilde{f}_i(\rho,l-i) + \ldots + C_0 \tilde{f}_l(\rho) = 0 \quad l \ge n \\ \ldots \end{cases}$$

Exemple pour n=2 : voici la première équation linéaire modifiée, la seconde étant non modifiée

$$\tilde{f}_0(\rho,1) = \rho + 1 \qquad \tilde{f}_0(\rho,2) = (\rho+2)(\rho+1) \qquad \tilde{f}_1(\rho,1) = P_{1,1} \qquad \tilde{f}_1(\rho,2) = (\rho+1)P_{1,1} \qquad \tilde{f}_2(\rho,2) = \rho \times P_{1,2} + P_{2,2}$$

$$\begin{cases} C_1 \tilde{f}_0(\rho,1) + C_0 \tilde{f}_1(\rho,1) = 0 \\ C_2 \tilde{f}_0(\rho,2) + C_1 \tilde{f}_1(\rho,2) + C_0 \tilde{f}_2(\rho,2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1(\rho+1) + C_0 P_{1,1} = 0 \\ C_2(\rho+2)(\rho+1) + C_1(\rho+1)P_{1,1} + C_0(\rho \times P_{1,2} + P_{2,2}) = 0 \end{cases}$$

Exemple pour n=3 : voici les deux premières équations linéaires modifiées, la troisième étant non modifiée

$$\tilde{f}_0(\rho,1) = \rho + 1 \quad \tilde{f}_0(\rho,2) = (\rho+2)(\rho+1) \quad \tilde{f}_0(\rho,3) = (\rho+3)(\rho+2)(\rho+1)$$

$$\tilde{f}_1(\rho,1) = P_{1,1} \qquad \tilde{f}_1(\rho,2) = (\rho+1)P_{1,1} \qquad \tilde{f}_1(\rho,3) = (\rho+2)(\rho+1)P_{1,1}$$

$$\tilde{f}_2(\rho,2) = (\rho-1) \times P_{1,2} + P_{2,2} \qquad \tilde{f}_2(\rho,3) = (\rho+1) \times (\rho \times P_{1,2} + P_{2,2})$$

$$\tilde{f}_3(\rho,3) = \rho \times ((\rho-1) \times P_{1,3} + P_{2,3}) + P_{3,3}$$

$$\begin{cases} C_1 \tilde{f}_0(\rho,1) + C_0 \tilde{f}_1(\rho,1) = 0 \\ C_2 \tilde{f}_0(\rho,2) + C_1 \tilde{f}_1(\rho,2) + C_0 \tilde{f}_2(\rho,2) = 0 \\ C_3 \tilde{f}_0(\rho,3) + C_2 \tilde{f}_1(\rho,3) + C_1 \tilde{f}_2(\rho,3) + C_0 \tilde{f}_3(\rho,3) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1(\rho+1) + C_0 P_{1,1} = 0 \\ C_2(\rho+2)(\rho+1) + C_1(\rho+1)P_{1,1} + C_0((\rho-1) \times P_{1,2} + P_{2,2}) = 0 \\ C_3(\rho+3)(\rho+2)(\rho+1) + C_2(\rho+2)(\rho+1)P_{1,1} + C_1((\rho+1) \times (\rho \times P_{1,2} + P_{2,2})) + C_0(\rho \times ((\rho-1) \times P_{1,3} + P_{2,3}) + P_{3,3}) = 0 \end{cases}$$

Exemple : *dans un cas concret, la détermination de la loi de récurrence pour les coefficients se simplifie le plus souvent sans terme d'indétermination. Par exemple prenons l'équation différentielle du second degré :* $y''(z)-\left(z^2+\alpha\right)y(z)=0$*, l'application du développement de Fröbenius* $y(z)=z^\rho\sum_{l=0}^{+\infty}c_l\,z^l$ *conduit à une récurrence à 5 termes pour lequel les seuls termes pairs sont non nuls :*

$c_0=1 \quad c_1=0 \quad c_2=\dfrac{\alpha}{(2+\rho)(1+\rho)} \quad c_3=0 \quad c_l=\dfrac{\alpha\,c_{l-2}+c_{l-4}}{(l+\rho)(l-1+\rho)} \quad l\geq 4$*. Or pour les deux racines ρ=0 et ρ=1, il est manifeste que les dénominateurs successifs de la récurrence ne présente aucun pôle pour ces deux valeurs. En l'occurrence la récurrence est donc parfaitement définie pour ces deux valeurs ρ=0 et ρ=1 :*

$$\rho=0\rightarrow c_0=1 \quad c_1=0 \quad c_2=\frac{\alpha}{2} \quad c_3=0 \quad c_l=\frac{\alpha\,c_{l-2}+c_{l-4}}{l(l-1)} \quad l\geq 4$$

$$\rho=1\rightarrow c_0=1 \quad c_1=0 \quad c_2=\frac{\alpha}{6} \quad c_3=0 \quad c_l=\frac{\alpha\,c_{l-2}+c_{l-4}}{l(l+1)} \quad l\geq 4$$

Avec l'algorithme formel de la récurrence modifiée énoncé dans ce chapitre les coefficients sont les même :

$$\rho=1\rightarrow c_0=1 \quad c_2=\frac{\alpha}{6} \quad c_4=\frac{6+\alpha^2}{120} \quad c_6=\frac{\alpha\left(26+\alpha^2\right)}{5040} \quad c_8=\frac{\left(252+68\alpha^2+\alpha^4\right)}{362880} \quad c_{10}=\frac{\alpha\left(2124+140\alpha^2+\alpha^4\right)}{39916800} \quad c_{2l+1}=0$$

$$y_0(x)=z\times\sum_{l=0}^{l=+\infty}c_{2l}z^{2l}=z+\frac{\alpha}{6}z^3+\frac{6+\alpha^2}{120}z^5+\frac{\alpha\left(26+\alpha^2\right)}{5040}z^7+\frac{\left(252+68\alpha^2+\alpha^4\right)}{362880}z^9+\frac{\alpha\left(2124+140\alpha^2+\alpha^4\right)}{39916800}z^{11}+\ldots$$

$$\rho=0\rightarrow\rightarrow c_0=1 \quad c_2=\frac{\alpha}{2} \quad c_4=\frac{2+\alpha^2}{24} \quad c_6=\frac{\alpha\left(14+\alpha^2\right)}{720} \quad c_8=\frac{\left(60+44\alpha^2+\alpha^4\right)}{40320} \quad c_{10}=\frac{\alpha\left(844+100\alpha^2+\alpha^4\right)}{3628800} \quad c_{2l+1}=0$$

$$y_1(x)=\sum_{l=0}^{l=+\infty}c_{2l}z^{2l}=1+\frac{\alpha}{2}z^2+\frac{2+\alpha^2}{24}z^4+\frac{\alpha\left(14+\alpha^2\right)}{720}z^6+\frac{\left(60+44\alpha^2+\alpha^4\right)}{40320}z^8+\frac{\alpha\left(844+100\alpha^2+\alpha^4\right)}{3628800}z^{10}+\ldots$$

<u>Éléments de théorie sur la construction des solutions autour des points singuliers irréguliers d'une équation différentielle du n-ième degré</u>

<u>Critère pour déterminer la régularité ou l'irrégularité d'un point singulier de l'équation différentielle</u>

<u>Point singulier à distance finie</u>. Le changement de variable z-> z-z_0 permet de se placer autour du point singulier z=0, partons donc de l'équation différentielle du n-ième degré de la forme :

$$y^{(n)}(z)+P_1(z)\,y^{(n-1)}(z)+\ldots+P_{n-1}(z)\,y^{(1)}(z)+P_n(z)\,y(z)=0$$
$$P_1(z)=z^{-\widetilde{w}_1}\left(a_{1,0}+a_{1,1}z+a_{1,2}z^2+\ldots\right)\quad\ldots\quad P_n(z)=z^{-\widetilde{w}_n}\left(a_{n,0}+a_{n,1}z+a_{n,2}z^2+\ldots\right)$$

Les critères qui permettent de caractériser ce point sont les suivants :

- z=0 est un point singulier régulier si toutes les multiplicités du pôle en z=0 sont au plus inférieures ou égale à la valeur l de l'indice : $\forall l \quad \widetilde{w}_l \le l \Leftrightarrow \widetilde{w}_l + n - l \le n$

- z=0 est un point singulier irrégulier si au moins une des multiplicités du pôle en z=0 est strictement supérieure à la valeur l de l'indice : $\exists l \quad \widetilde{w}_l > l \Leftrightarrow \widetilde{w}_l + n - l > n$

<u>Point singulier z=∞</u>. Pour ce qui est du point singulier z=∞, quels sont donc les critères qui permettent de caractériser le point z=∞ d'abord comme un point singulier ou non, puis comme un point singulier régulier ou irrégulier.

Partons de cette équation différentielle : $y^{(n)}(z)+P_1(z)\,y^{(n-1)}(z)+\ldots+P_{n-1}(z)\,y^{(1)}(z)+P_n(z)\,y(z)=0$, $P_1(z)=\frac{p_1(z)}{p_0(z)}\quad\ldots\quad P_n(z)=\frac{p_n(z)}{p_0(z)}$ *, et supposons que les coefficients admettent un développement autour du point singulier z=∞ de la forme :* $P_l(z)=z^{K_l}\left(a_{l,0}+\frac{a_{l,1}}{z}+\frac{a_{l,2}}{z^2}+\ldots\right)$ *:*

- Pour que z=∞ soit un point singulier régulier il suffit que :

$$\forall l \quad l\in\{1,..,n\} \quad K_l < 1-l \Leftrightarrow K_l \le -l < 1-l \Leftrightarrow K_l + l \le 0$$
$$Posons \quad K_l = -\sigma_l \Rightarrow \sigma_l \ge l$$

- A contrario pour que z=∞ soit un point singulier irrégulier il faut qu'il existe un indice l tel que : $\exists l \quad l\in\{1,..,n\} \quad K_l \ge 1-l \Leftrightarrow K_l + l \ge 1 \Leftrightarrow K_l + l > 0 \Leftrightarrow K_l > -l$. *En posant* $\sigma_l = -K_l \Rightarrow \sigma_l < l$. *Autrement dit dans la forme :* $P_l(z)=z^{-\sigma_l}\left(a_{l,0}+\frac{a_{l,1}}{z}+\frac{a_{l,2}}{z^2}+\ldots\right)$*, il faut qu'au moins pour un indice l :* $\sigma_l < l$.

Partons d'exemples simples concernant une équation différentielle pour laquelle on applique la transformation la transformation t=1/z. L'équation transformée devient formellement la suivante :

$$y(t)Q_n(t)+\sum_{i=1}^{i=n}Q_{n-i}(t)y^{(i)}(t)=0 \quad avec \quad Q_{n-i}(t)=\sum_{l=0}^{l=n-i}\frac{(-1)^l}{t^{l+n-i}}P_l\left(\frac{1}{t}\right)\frac{(n-l)!\,(n-l-1)!}{i\,!\,(i-1)!(n-i-l)!} \quad i\in\{1,n\} \quad Q_n(t)=(-1)^n t^{-2n}P_n\left(\frac{1}{t}\right) \quad P_0\left(\frac{1}{t}\right)=1\rightarrow Q_0(t)=1$$

Pour une équation du second degré :

$$y^{(2)}(z)+P_1(z)\,y^{(1)}(z)+P_2(z)\,y(z)=0 \Leftrightarrow y^{(2)}(t)+Q_1(t)\,y^{(1)}(z)+Q_2(t)\,y(t)=0$$
$$Q_1(t)=t^{-1}\left(2-\frac{1}{t}P_1\left(\frac{1}{t}\right)\right) \qquad Q_2(t)=t^{-2}\,\frac{1}{t^2}P_2\left(\frac{1}{t}\right) \qquad P_1\left(\frac{1}{t}\right)=t^{-K_1}\left(a_{1,0}+a_{1,1}t+...\right) \quad P_2\left(\frac{1}{t}\right)=t^{-K_2}\left(a_{2,0}+a_{2,1}t+...\right)$$
$$\Rightarrow Q_1(t)=t^{-1}\left(2-t^{-(1+K_1)}\left(a_{1,0}+a_{1,1}t+...\right)\right) \qquad Q_2(t)=t^{-2}t^{-(2+K_2)}\left(a_{2,0}+a_{2,1}t+...\right)$$

On retrouve les critères énoncés ci-dessus, en considérant le point singulier t=0. Il est un point régulier si $1+K_1\leq 0 \quad et \quad 2+K_2\leq 0$. *Si* $1+K_1=0 \quad et \quad 2+K_2<0$ *et si* $a_{1,0}=2$ *alors t=0 est un point ordinaire. Si maintenant* $1+K_1\geq 1 \quad ou \quad 2+K_2\geq 1$ *alors le point t=0 est un point singulier irrégulier.*

Pour une équation du troisième degré :

$$y^{(3)}(z)+P_1(z)\,y^{(2)}(z)+P_2(z)\,y^{(1)}(z)+P_3(z)\,y(z)=0 \Leftrightarrow y^{(3)}(t)+Q_1(t)\,y^{(2)}(t)+Q_2(t)\,y^{(1)}(z)+Q_3(t)\,y(t)=0$$
$$Q_1(t)=t^{-1}\left(6-\frac{1}{t}P_1\left(\frac{1}{t}\right)\right) \quad Q_2(t)=t^{-2}\left(6-\frac{2}{t}P_1\left(\frac{1}{t}\right)+\frac{1}{t^2}P_2\left(\frac{1}{t}\right)\right) \quad Q_3(t)=-t^{-3}\,\frac{1}{t^3}P_3\left(\frac{1}{t}\right)$$
$$P_1\left(\frac{1}{t}\right)=t^{-K_1}\left(a_{1,0}+a_{1,1}t+...\right) \quad P_2\left(\frac{1}{t}\right)=t^{-K_2}\left(a_{2,0}+a_{2,1}t+...\right) \quad P_3\left(\frac{1}{t}\right)=t^{-K_3}\left(a_{3,0}+a_{3,1}t+...\right)$$
$$\Rightarrow\begin{cases}Q_1(t)=t^{-1}\left(6-t^{-(1+K_1)}\left(a_{1,0}+a_{1,1}t+...\right)\right)\\ Q_2(t)=t^{-2}\left(6-2t^{-(1+K_1)}\left(a_{1,0}+a_{1,1}t+...\right)+t^{-(2+K_2)}\left(a_{2,0}+a_{2,1}t+...\right)\right)\\ Q_3(t)=-t^{-3}t^{-(3+K_3)}\left(a_{3,0}+a_{3,1}t+...\right)\end{cases}$$

On retrouve les critères énoncés ci-dessus, en considérant le point singulier t=0 :
- Il est un point régulier si $1+K_1\leq 0 \quad et \quad 2+K_2\leq 0 \quad et \quad 3+K_3\leq 0$.
- Si $1+K_1=2+K_2=0 \quad et \quad a_{1,0}=a_{2,0}=6 \quad et \quad 3+K_3<0$ *alors t=0 est un point ordinaire*
- Si maintenant $1+K_1\geq 1 \quad ou \quad 2+K_2\geq 1 \quad ou \quad 3+K_3\geq 1$ *alors le point t=0 est un point singulier irrégulier.*

Pour une équation du quatrième degré :

$$y^{(4)}(z)+P_1(z)\,y^{(3)}(z)+P_2(z)\,y^{(2)}(z)+P_3(z)\,y^{(1)}(z)+P_4(z)\,y(z)=0 \Leftrightarrow y^{(4)}(t)+Q_1(t)y^{(3)}(t)+Q_2(t)\,y^{(2)}(z)+Q_3(t)\,y^{(1)}(t)+Q_4(t)\,y(t)=0$$

$$Q_1(t)=t^{-1}\left(12-\frac{1}{t}P_1\left(\frac{1}{t}\right)\right)\quad Q_2(t)=t^{-2}\left(36-\frac{6}{t}P_1\left(\frac{1}{t}\right)+\frac{1}{t^2}P_2\left(\frac{1}{t}\right)\right)\quad Q_3(t)=t^{-3}\left(24-\frac{6}{t}P_1\left(\frac{1}{t}\right)+\frac{2}{t^2}P_2\left(\frac{1}{t}\right)-\frac{1}{t^3}P_3\left(\frac{1}{t}\right)\right)\quad Q_4(t)=t^{-4}\frac{1}{t^4}P_4\left(\frac{1}{t}\right)$$

$$P_l\left(\frac{1}{t}\right)=t^{-K_l}\left(a_{l,0}+a_{l,1}t+\ldots\right)\quad \begin{cases}Q_1(t)=t^{-1}\left(12-t^{-(1+K_1)}\left(a_{1,0}+a_{1,1}t+\ldots\right)\right)\\ Q_2(t)=t^{-2}\left(36-6t^{-(1+K_1)}\left(a_{1,0}+a_{1,1}t+\ldots\right)+t^{-(2+K_2)}\left(a_{2,0}+a_{2,1}t+\ldots\right)\right)\\ Q_3(t)=t^{-3}\left(24-6t^{-(1+K_1)}\left(a_{1,0}+a_{1,1}t+\ldots\right)+2t^{-(2+K_2)}\left(a_{2,0}+a_{2,1}t+\ldots\right)-t^{-(3+K_3)}\left(a_{3,0}+a_{3,1}t+\ldots\right)\right)\\ Q_4(t)=t^{-4}t^{-(4+K_4)}\left(a_{4,0}+a_{4,1}t+\ldots\right)\end{cases}$$

On retrouve les critères énoncés ci-dessus, en considérant le point singulier t=0 :

- Il est un point régulier si $1+K_1\le 0 \quad et \quad 2+K_2\le 0 \quad et \quad 3+K_3\le 0 \quad et \quad 4+K_4\le 0$.

- Si $1+K_1=2+K_2=3+K_4=0 \quad et \quad a_{1,0}=12 \quad a_{2,0}=36 \quad a_{3,0}=24 \quad et \quad 4+K_4<0$ *alors t=0 est un point ordinaire.*

- Si maintenant $1+K_1\ge 1 \quad ou \quad 2+K_2\ge 1 \quad ou \quad 3+K_3\ge 1 \quad ou \quad 4+K_4\ge 1$ *alors le point t=0 est un point singulier irrégulier.*

<u>Forme d'une équation fuschienne à deux singularités z=0 et z=∞ seulement</u>

La synthèse des critères précédents sur la régularité ou l'irrégularité des points singuliers z=0 ou z=∞ permet de déduire la forme exacte d'une équation différentielle du n-ième degré qui serait fuschienne avec seulement deux points singuliers z=0 et z=∞.

Soit l'équation : $y^{(n)}(z)+P_1(z)\,y^{(n-1)}(z)+\ldots+P_{n-1}(z)\,y^{(1)}(z)+P_n(z)\,y(z)=0 \quad P_l(z)=z^{-\widetilde{w}_l}\left(a_{l,0}+a_{l,1}z+a_{l,2}z^2+\ldots\right)$

Pour que z=0 soit un point singulier régulier alors il convient que $\forall l \quad \widetilde{w}_l\le l$. *Si dans le même temps la forme de l'équation doit permettre la régularité en z=∞ dans la même expression sous sa forme :*

$$y^{(n)}(z)+P_1(z)\,y^{(n-1)}(z)+\ldots+P_{n-1}(z)\,y^{(1)}(z)+P_n(z)\,y(z)=0$$
$$P_l(z)=z^{K_l}\left(a_{l,0}+\frac{a_{l,1}}{z}+\frac{a_{l,2}}{z^2}+\ldots\right)$$

Alors tous les coefficients $P_l(z)$ doivent être en même temps une expression polynomiale en z et 1/z. Posons alors $P_l(z)=z^{-\widetilde{w}_l}\left(a_{l,0}+a_{l,1}z+\ldots+a_{l,i(l)}z^{K_l+\widetilde{w}_l}\right)=z^{K_l}\left(a_{l,i(l)}+\frac{a_{l,i(l)-1}}{z}+\ldots+\frac{a_{l,0}}{z^{\widetilde{w}_l}}\right)$. *Cela implique que* $K_l+\widetilde{w}_l\ge 0$. *Or Le critère de régularité en z=∞ nous dit que* $K_l+l\le 0$. *Soit* $K_l+l+\widetilde{w}_l\le l \Rightarrow K_l+\widetilde{w}_l\le 0$. *Cela n'est donc possible que si* $K_l+\widetilde{w}_l=0$ *et dans ce dernier cas la forme des coefficients est très simple :* $P_l(z)=a_{l,0}z^{-\widetilde{w}_l}=a_{l,0}z^{K_l}$ *et par ailleurs comme on aboutit aux inégalités :* $\widetilde{w}_l\le l \quad et \quad l\le\widetilde{w}_l\Rightarrow\widetilde{w}_l=l$. *D'où la forme excessivement simple d'une équation fuschienne du n-ième degré à deux points singuliers réguliers z=0 et z=∞ :*

$$y^{(n)}(z)+\frac{a_1}{z}y^{(n-1)}(z)+\frac{a_2}{z^2}y^{(n-2)}(z)+\ldots+\frac{a_{n-1}}{z^{n-1}}y^{(1)}(z)+\frac{a_n}{z^n}\;y(z)=0$$

Prenons par exemple le cas d'une équation différentielle du premier degré :

$$y^{(1)}(z)+\frac{a_1}{z}y(z)=0\Rightarrow y(z)=z^{-a_1}$$

Pour les équations du second degré et suivantes il suffit de choisir une solution de la forme $y(z)=z^{\lambda}$ *pour construire explicitement toutes les solutions régulières :*

$$y(z)=z^{\lambda}\Rightarrow\begin{cases} n=1\Rightarrow y^{(1)}(z)+\frac{a_1}{z}y(z)\Rightarrow\lambda \quad tq \quad \lambda+a_1=0 \\ n=2\Rightarrow y^{(2)}(z)+\frac{a_1}{z}y^{(1)}(z)+\frac{a_2}{z^2}y(z)=0\Rightarrow\lambda \quad tq \quad \lambda(\lambda-1)+\lambda\, a_1+a_2=0 \\ n=3\Rightarrow y^{(3)}(z)+\frac{a_1}{z}y''(z)+\frac{a_2}{z^2}''(z)+\frac{a_3}{z^3}\;\; y(z)=0\Rightarrow\lambda \quad tq \quad \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)+\lambda(\lambda-1)\,a_1+\lambda\, a_2+a_3=0 \\ .... \\ y^{(n)}(z)+\frac{a_1}{z}y^{(n-1)}(z)+\frac{a_2}{z^2}y^{(n-2)}(z)+...+\frac{a_{n-1}}{z^{n-1}}y^{(1)}(z)+\frac{a_n}{z^n}\;\; y(z)=0 \\ \Rightarrow\lambda \quad tq \quad \lambda(\lambda-1)...(\lambda-n+1)+a_1\lambda(\lambda-1)...(\lambda-n+2)+...+\lambda\, a_{n-1}+a_n=0 \end{cases}$$

Les solutions de λ sont donc directement toutes les racines de l'équation indicielle et le développement s'arrête directement au premier terme c_0=1.

Si maintenant on envisage de considérer l'équation différentielle du n-ième degré comme une équation différentielle matricielle du premier degré. On sait que la représentation suivante est valable :

$$y^{(n)}(z)+\frac{a_1}{z}y^{(n-1)}(z)+\frac{a_2}{z^2}y^{(n-2)}(z)+...+\frac{a_{n-1}}{z^{n-1}}y^{(1)}(z)+\frac{a_n}{z^n}\;\; y(z)=0\Leftrightarrow\frac{d}{dz}\left(\begin{bmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ ... \\ ... \\ ... \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & ... & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & ... & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & ... & ... & 0 & 1 \\ -\frac{a_n}{z^n} & -\frac{a_{n-1}}{z^{n-1}} & ... & ... & ... & -\frac{a_2}{z^2} & -\frac{a_1}{z} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ ... \\ ... \\ ... \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

Mais cette représentation n'est pas la plus commode. Partons de la constatation que pour une seule racine le problème peut se formalisé comme un système d'équations différentielles du premier degré :

$$y(z)=z^{\lambda}\Rightarrow\begin{cases} y'(z)=\frac{\lambda}{z}y(z) \\ y''(z)=\frac{\lambda-1}{z}y'(z) \\ y^{(3)}(z)=\frac{\lambda-2}{z}y''(z) \\ .... \\ y^{(n)}(z)=\frac{\lambda-(n-1)}{z}y^{(n-1)}(z) \end{cases}\Leftrightarrow\frac{d}{dz}\left(\begin{bmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ ... \\ ... \\ ... \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix}\right)=\frac{1}{z}\times\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & ... & ... & ... & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 0 & ... & ... & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-2 & 0 & 0 & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & ... & ... & \lambda-(n-2) & 0 \\ 0 & 0 & ... & ... & ... & 0 & \lambda-(n-1) \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ ... \\ ... \\ ... \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

$$Avec \quad \lambda \quad tq \quad \lambda(\lambda-1)...(\lambda-n+1)+a_1\lambda(\lambda-1)...(\lambda-n+2)+...+\lambda\, a_{n-1}+a_n=0$$

Pour toutes les racines l'équation différentielle du n-ième degré est également équivalent au système suivant :

$$y(z)=z^{\lambda} \Rightarrow \begin{cases} y_1'(z)=\dfrac{\lambda_1}{z}y_1(z) \\ y_2'(z)=\dfrac{\lambda_2}{z}y_{21}(z) \\ \dots \\ \dots \\ y_n'(z)=\dfrac{\lambda_n}{z}y_n(z) \end{cases} \Leftrightarrow \frac{d}{dz}\left(\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}\right)=\frac{1}{z}\times\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$Avec \quad \{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n\} \quad tq \quad \lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n+1)+a_1\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n+2)+\dots+\lambda\, a_{n-1}+a_n=0$$

Il se trouve que plus généralement pour un système matriciel fuschien d'équations différentielles à seulement deux points singuliers réguliers dont l'un est z=0 et l'autre et z=∞, la forme générale de l'équation est : $\frac{d}{dz}(\mathbf{\Phi}(z))=\frac{\mathbf{A}.\mathbf{\Phi}(z)}{z}$*, ce qui peut se ramener par diagonalisation de la matrice et changement de fonction à un système de n équations différentielle de la forme :* $\frac{d}{dz}(\mathbf{\Psi}(z))=\frac{\widetilde{\mathbf{A}}.\mathbf{\Psi}(z)}{z} \quad \widetilde{\mathbf{A}}=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$ *où A est la matrice diagonale de ces valeurs propres. Ainsi qu'il suit :*

$$\widetilde{\mathbf{A}}=\mathbf{U}^{-1}.\mathbf{A}.\mathbf{U} \quad \mathbf{U}\ matrice\ des\ vecteurs\ propres \quad \mathbf{U}=\begin{bmatrix} \vec{u}_1^{\,T} \\ \vec{u}_2^{\,T} \\ \dots \\ \vec{u}_n^{\,T} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Psi}(z)=\mathbf{U}^{-1}.\mathbf{\Phi}(z) \Rightarrow \frac{d}{dz}(\mathbf{\Phi}(z))=\frac{\mathbf{U}.\widetilde{\mathbf{A}}.\mathbf{U}^{-1}.\mathbf{\Phi}(z)}{z} \Leftrightarrow \mathbf{U}^{-1}.\frac{d}{dz}(\mathbf{U}.\mathbf{\Psi}(z))=\mathbf{U}^{-1}.\frac{\mathbf{U}.\widetilde{\mathbf{A}}.\mathbf{\Psi}(z)}{z} \Leftrightarrow \frac{d}{dz}(\mathbf{\Psi}(z))=\frac{\widetilde{\mathbf{A}}.\mathbf{\Psi}(z)}{z}$$

Aussi la forme générale de l'équation différentielle fuchsienne à deux points singuliers du n-ième degré est-elle cohérente avec la théorie générale des systèmes fuchsiens d'équations différentielles du premier degré.

Notions de classe d'une équation différentielle en un point singulier $z=z_0$ à distance finie

Puisqu'un simple changement de variable z-> $z-z_0$ dans toute équation différentielle dont les coefficients sont polynomiaux permet de se placer autour du point singulier z=0 sans changer à la généralité du propos, partons donc de l'équation différentielle du n-ième degré de la forme :

$$y^{(n)}(z)+P_1(z)\,y^{(n-1)}(z)+...+P_{n-1}(z)\,y^{(1)}(z)+P_n(z)\,y(z)=0$$
$$P_1(z)=\frac{p_1(z)}{p_0(z)} \quad .... \quad P_n(z)=\frac{p_n(z)}{p_0(z)}$$

Où z=0 est une racine du coefficient $p_0(z)$. Et notons $\widetilde{w}_l$ les multiplicités des pôles des différents coefficients $P_l(z)$, ce qui signifie que ces coefficients sont de la forme : $P_l(z)=z^{-\widetilde{w}_l}(a_{l,0}+a_{l,1}\,z+...)$. *Formons les valeurs suivantes :* $\{\widetilde{g}_1=\widetilde{w}_1+n-1,\widetilde{g}_2=\widetilde{w}_2+n-2,...,\widetilde{g}_n=\widetilde{w}_n\}$ *et définissons le maximum de ces valeurs :* $g=Max\,\{\widetilde{g}_1=\widetilde{w}_l+n-1,\widetilde{g}_2=\widetilde{w}_2+n-2,...,\widetilde{g}_n=\widetilde{w}_n\}$. *Lorsque z=0 est un point singulier régulier alors toutes les valeurs calculées sont au plus égales à n et au moins une est égale au degré de l'équation :*

$$\widetilde{w}_l\le l\Rightarrow\widetilde{g}_l\le n \quad et \quad \exists r \quad \widetilde{w}_r=r\Rightarrow g=Max\,\{\widetilde{g}_1=\widetilde{w}_1+n-1,\widetilde{g}_2=\widetilde{w}_2+n-2,...,\widetilde{g}_n=\widetilde{w}_n\}=n$$

A contrario pour un point singulier irrégulier alors il existe un indice pour lequel une des valeurs de $\widetilde{g}_l$ est supérieure au degré de l'équation différentielle soit : $\exists\, l \quad \widetilde{w}_l>l\Rightarrow\widetilde{g}_l>n$. *Le maximum de ces valeurs $\widetilde{g}_l$ est donc nécessairement supérieure à n, et l'on peut se poser la question : à partir de quel indice toutes les valeurs $\widetilde{g}_l$ sont strictement inférieures à ce maximum.*

*Si ce point z=0 est régulier, on considère **par définition** que la classe d'une équation différentielle au en ce point est r=0. Comme il existe n solutions que l'on peut construire par le schéma de Fröbenius (dîtes aussi solution régulières), il existe bien n-r = n solutions régulières autour de ce point.*

Si ce point z=0 est irrégulier, formons maintenant l'algorithme suivant pour la recherche de la classe d'une équation différentielle au point singulier z=0 :

l=n-1
Stop=Faux
Tant que Stop=Faux et l >=1 Faire
    Calculer les valeurs $Max\,\{\widetilde{g}_{l+1},\widetilde{g}_{l+2},...,\widetilde{g}_n\}$ ***et*** $g_l=Max\,\{\widetilde{g}_1,\widetilde{g}_2,...,\widetilde{g}_l\}$
    Si $g_l=Max\,\{\widetilde{g}_1,\widetilde{g}_2,...,\widetilde{g}_l\}<Max\,\{\widetilde{g}_{l+1},\widetilde{g}_{l+2},...,\widetilde{g}_n\}$ ***Alors Stop=Vrai Sinon r=r-1 Fin Si***
Fin Tant que
Si Stop=Vrai Alors Classe r = l+1 Sinon Classe r = 1

Cette algorithme est équivalent à la recherche et l'existence de l'indice r tel que :

$$\widetilde{g}_r=\widetilde{w}_r+n-r \qquad \exists\, r \quad / \quad \begin{cases} g_r=Max\,\{\widetilde{g}_{l+1},\widetilde{g}_{l+2},...,\widetilde{g}_n\}=Max\,\{\widetilde{g}_1,\widetilde{g}_2,...,\widetilde{g}_r\} & pour \quad l=r \\ g_l=Max\,\{\widetilde{g}_{l+1},\widetilde{g}_{l+2},...,\widetilde{g}_n\}\le Max\,\{\widetilde{g}_1,\widetilde{g}_2,...,\widetilde{g}_l\} & pour \quad l>r \\ g_l=Max\,\{\widetilde{g}_{l+1},\widetilde{g}_{l+2},...,\widetilde{g}_n\}>Max\,\{\widetilde{g}_1,\widetilde{g}_2,...,\widetilde{g}_l\} & pour \quad l<r \end{cases}$$

Ce qui est également équivalent à rechercher le plus petit indice r tel que :

$$g = Max\{\widetilde{g}_1, \widetilde{g}_2, ..., \widetilde{g}_n\} \qquad r = Min\ \{\ \ l \ \ / \ \ \widetilde{g}_l = \widetilde{w}_l + n - l = g\}$$

ou bien encore qu'il existe un indice r classe de l'équation différentielle en z=0, tel que :

$$\exists r \quad r \in \{1,...,n\} \quad l \in \{1,...,n\} \rightarrow \begin{cases} \widetilde{w}_l + n - l < \widetilde{w}_r + n - r & pour \quad l < r \\ \widetilde{w}_l + n - l = \widetilde{w}_r + n - r & pour \quad l = r \\ \widetilde{w}_l + n - l \leq \widetilde{w}_r + n - r & pour \quad l > r \end{cases}$$

Un théorème nous dit que lorsque la classe r < n alors il existe n-r solutions régulières. Pour cela il convient de déterminer une équation indicielle dont le degré est lui même n-r. Si la classe de l'équation différentielle est r=n, alors il n'existe pas de solutions régulières soit développable selon le schéma de Fröbenius.

Un point singulier irrégulier est dit essentiel s'il n'existe pas de solutions régulières développables autour de ce point, soit lorsque la classe r=n pour ce point.

La classe d'une équation différentielle en un point singulier est également appelée dans les ouvrages anciens « indice caractéristique » de l'équation différentielle, ce qui peut apparaître comme une appellation parfois plus pertinente.

Algorithme de construction de l'équation indicielle pour un point singulier irrégulier à distance finie

1) calcul de la classe r de l'équation différentiel autour du point $z=z_0$
2) calcul des multiplicités $\widetilde{g}_l = \widetilde{w}_l + n - l \quad et \quad g = Max\{\widetilde{g}_1, \widetilde{g}_2, ..., \widetilde{g}_n\} > n$
3) calcul des coefficients indiciels modifiés :

$$\begin{cases} Q_0 = \lim\limits_{z \to z_0} \ (z - z_0)^{g-n} = 0 \\ Q_1 = \lim\limits_{z \to z_0} \ (z - z_0)^{g+1-n} \ p_1(z) \\ ... \\ Q_l = \lim\limits_{z \to z_0} \ (z - z_0)^{g+l-n} \ p_l(z) \\ ... \\ Q_{n-1} = \lim\limits_{z \to z_0} \ (z - z_0)^{g-1} \ p_{n-1}(z) \\ Q_{n,0} = \lim\limits_{z \to z_0} \ (z - z_0)^{g} \ p_n(z) \end{cases}$$

4) les premiers coefficients jusqu'à l'indice r-1 sont tous nuls : $Q_1 = Q_2 = ... = Q_{r-1} = 0$
5) l'équation indicielle se calcule comme suit :

$$\begin{cases} f_0(\rho) = \sum_{l=r}^{l=n} [\rho]_{n-l} Q_l = 0 \\ [\rho]_0 = 1 \qquad [\rho]_i = \rho(\rho - 1) \times .... \times (\rho - (i-1)) \end{cases}$$

Tout se passe ici comme si on multiplie toute l'équation différentielle par le facteur : $(z-z_0)^{g-n}$

Considérons que le point singulier irrégulier est de classe r=n, soit essentiel, alors tous les coefficients $Q_1 = Q_2 = ... = Q_{n-1} = 0$ *sont nuls et l'équation indicielle est triviale :* $Q_n = 0$ *et ne comporte évidemment aucune racine.*

<u>Quelques exemples de détermination de la classe et de l'équation indicielle</u>

<u>Pour l'équation différentielle</u> $z^2 y^{(2)}(z) + a\ y^{(1)}(z) + b\ y(z) = 0 \Leftrightarrow y^{(2)}(z) + \frac{a}{z^2}\ y^{(1)}(z) + \frac{b}{z^2}\ y(z) = 0$*, on calcule les coefficients* $\widetilde{w}_1 = \widetilde{w}_2 = 2 \Rightarrow \widetilde{g}_1 = 3 \quad \widetilde{g}_2 = 2 \Rightarrow g = Max(\widetilde{g}_1, \widetilde{g}_2) = 3 > 2$*. Appliquons l'algorithme, il vient r=1, comme* $\widetilde{g}_1 > \widetilde{g}_2$ *alors il y a sortie de la boucle et Stop=Faux d'où r=1. L'équation indicielle s'écrit :*

$$\begin{cases} Q_0 = \lim_{z\to 0} \quad z = 0 \\ Q_1 = \lim_{z\to 0} \quad z^2 \dfrac{a}{z^2} = a \Rightarrow \sum_{l=r}^{l=n} [\rho]_{n-l} Q_l = 0 = [\rho]_1 Q_1 + [\rho]_0 Q_2 = \rho\ a = 0 \Rightarrow \rho = 0 \\ .Q_2 = \lim_{z\to 0} \quad z^3 \dfrac{b}{z^2} = 0 \end{cases}$$

La solution régulière suit la récurrence suivante :

$$y(z) = \sum_{l=0}^{l=n} c_l z^l \Rightarrow (l+1)\, a\ c_{l+1} + (b + l(l-1))\, c_l = 0 \Rightarrow \frac{c_{l+1}}{c_l} = -\frac{b + l(l-1)}{a\,(l+1)}$$

Cette dernière récurrence diverge, sauf à ce que le développement est fini, par exemple si b=0 et l=1, la solution est triviale y(z)=1.

<u>Pour l'équation différentielle</u> $y^{(3)}(z) + \frac{a_1}{z^2}\ y^{(2)}(z) + \frac{a_2}{z^2}\ y^{(1)}(z) + \frac{a_3}{z^3}\ y(z) = 0$*, on calcule les coefficients* $\widetilde{w}_1 = \widetilde{w}_2 = 2 \quad \widetilde{w}_3 = 3 \Rightarrow (\widetilde{g}_1, \widetilde{g}_2, \widetilde{g}_3) = (4,3,3) \to g = 4 > 3$*. Appliquons l'algorithme, il s'arrête à r=1 et Stop=Faux d'où r=1. Il y a donc au moins deux solutions régulières 3-1=2.*

L'équation indicielle s'écrit :
$$\begin{cases} Q_0 = \lim_{z\to 0} \quad z = 0 \\ Q_1 = \lim_{z\to 0} \quad z^2 \dfrac{a_1}{z^2} = a_1 \\ Q_2 = \lim_{z\to 0} \quad z^3 \dfrac{a_2}{z^2} = 0 \\ Q_3 = \lim_{z\to 0} \quad z^4 \dfrac{a_3}{z^3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \sum_{l=r}^{l=n} [\rho]_{n-l} Q_l = 0 \Rightarrow \rho(\rho - 1) = 0$$

Pour l'équation différentielle $y^{(3)}(z)+\frac{a_1}{z^2}y^{(2)}(z)+\frac{a_2}{z^2}y^{(1)}(z)+\frac{a_3}{z^4}y(z)=0$*, on calcule les coefficients* $(\widetilde{w}_1,\widetilde{w}_2,\widetilde{w}_3)=(2,2,4)\Rightarrow(\widetilde{g}_1,\widetilde{g}_2,\widetilde{g}_3)=(4,3,4)\rightarrow g=4>3$*. Appliquons l'algorithme, il s'arrête à r=1 et Stop=Faux d'où r=1. Il y a donc au moins deux solutions régulières 3-1=2.*

L'équation indicielle s'écrit : $\begin{cases} Q_0=\underset{z\to 0}{Lim} \quad z=0 \\ Q_1=\underset{z\to 0}{Lim} \quad z^2\frac{a_1}{z^2}=a_1 \\ Q_2=\underset{z\to 0}{Lim} \quad z^3\frac{a_2}{z^2}=0 \\ Q_3=\underset{z\to 0}{Lim} \quad z^4\frac{a_3}{z^4}=a_3 \end{cases} \Rightarrow \sum_{l=r}^{l=n}[\rho]_{n-l}Q_l=0\Rightarrow a_1\rho(\rho-1)+a_3=0$

Pour l'équation différentielle $y^{(3)}(z)+\frac{a_1}{z^3}y^{(2)}(z)+\frac{a_2}{z^4}y^{(1)}(z)+\frac{a_3}{z^5}y(z)=0$*, on calcule les coefficients* $(\widetilde{w}_1,\widetilde{w}_2,\widetilde{w}_3)=(3,4,5)\Rightarrow(\widetilde{g}_1,\widetilde{g}_2,\widetilde{g}_3)=(5,5,5)\rightarrow g=5>3$*. Appliquons l'algorithme, il s'arrête à r=1 et Stop=Faux d'où r=1. Il y a donc au moins deux solutions régulières 3-1=2.*

L'équation indicielle s'écrit : $\begin{cases} Q_0=\underset{z\to 0}{Lim} \quad z^2=0 \\ Q_1=\underset{z\to 0}{Lim} \quad z^3\frac{a_1}{z^3}=a_1 \\ Q_2=\underset{z\to 0}{Lim} \quad z^4\frac{a_2}{z^4}=a_2 \\ Q_3=\underset{z\to 0}{Lim} \quad z^5\frac{a_3}{z^5}=a_3 \end{cases} \Rightarrow \sum_{l=r}^{l=n}[\rho]_{n-l}Q_l=0\Rightarrow a_1\rho(\rho-1)+a_2\rho+a_3=0$

Pour l'équation différentielle $y^{(3)}(z)+\frac{a_1}{z^2}y^{(2)}(z)+\frac{a_2}{z^4}y^{(1)}(z)+\frac{a_3}{z^3}y(z)=0$*, on calcule les coefficients .* $(\widetilde{w}_1,\widetilde{w}_2,\widetilde{w}_3)=(2,4,3)\Rightarrow(\widetilde{g}_1,\widetilde{g}_2,\widetilde{g}_3)=(4,5,3)\rightarrow g=5>3$*Appliquons l'algorithme, il s'arrête à r=1 avec Stop=Vrai donc r=2. Il y a donc au moins une solution régulière 3-2=1.*

L'équation indicielle s'écrit : $\begin{cases} Q_0=\underset{z\to 0}{Lim} \quad z^2=0 \\ Q_1=\underset{z\to 0}{Lim} \quad z^3\frac{a_1}{z^2}=0 \\ Q_2=\underset{z\to 0}{Lim} \quad z^4\frac{a_2}{z^4}=a_2 \\ Q_3=\underset{z\to 0}{Lim} \quad z^5\frac{a_3}{z^3}=0 \end{cases} \Rightarrow \sum_{l=r}^{l=n}[\rho]_{n-l}Q_l=0\Rightarrow a_2\rho=0\Rightarrow\rho=0$

Pour l'équation différentielle $y^{(2)}(z)+\frac{a_1(z)}{z^{1+K_1}}y^{(1)}(z)+\frac{a_2(z)}{z^{2+K_2}}y(z)=0$*, où les fonctions* $a_1(z)$ *et* $a_2(z)$ *sont analytiques autour de z=0, soit* $a_1(z)=a_{1,0}+a_{1,1}z+\ldots \quad a_2(z)=a_{2,0}+a_{2,1}z+\ldots$*. On suppose également que* $K_1>=0$ *et* $K_2>=0$*. On calcule les coefficients :*

$$(\widetilde{w}_1,\widetilde{w}_2)_1=(1+K_1,2+K_2)\Rightarrow(\widetilde{g}_1,\widetilde{g}_2)=(K_1+2,K_2+2)\rightarrow g=2+Max(K_1,K_2)>2$$

L'équation indicielle en s'écrivant ainsi on retrouve le nombre de solutions régulières et la classe de l'équation différentielle au point singulier z=0 :

$$\begin{cases} Q_0 = \underset{z\to 0}{Lim} \quad z^{Max(K_1,K_2)} = Si\left(K_2 = K_1 = 0,1,0\right) \\ Q_1 = \underset{z\to 0}{Lim} \quad z^{Max(0,K_2-K_1)} a_{1,0} = Si\left(K_2 <= K_1, a_{1,0}, 0\right) \\ Q_2 = \underset{z\to 0}{Lim} \quad z^{Max(K_1-K_2,0)} a_{2,0} = Si\left(K_1 <= K_2, a_{2,0}, 0\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Si \quad K_1 = K_2 = 0 \to \rho(\rho-1) + \rho\, a_{1,0} + a_{2,0} = 0 \to Classe\ r = 0 \quad point\ régulier \\ Si \quad K_1 = K_2 > 0 \to \rho\, a_{1,0} + a_{2,0} = 0 \to Classe\ r = 1 \quad une\ solution\ régulière \\ Si \quad K_1 < K_2 \to a_{2,0} = 0 \to Classe\ r = 2 \quad pas\ de\ solution\ régulière \\ Si \quad K_1 > K_2 \to \rho\, a_{1,0} = 0 \to Classe\ r = 1 \quad une\ solution\ régulière \end{cases}$$

Si K1=K2=0 alors le point singulier est régulier et l'algorithme ne s'applique pas. Si maintenant K1=K2 >=1, alors l'algorithme commence à r=1 et s'arrête de même avec Stop=Faux donc r=1. Si K1<K2 alors l'algorithme commence à r=1 , comme $\tilde{g}_1 = K_1 + 2 < \tilde{g}_2 = K_2 + 2$ *alors Stop=Vrai et r=2. Finalement si K1>K2 alors l'algorithme commence à r=1 , comme* $\tilde{g}_1 = K_1 + 2 > \tilde{g}_2 = K_2 + 2$ *alors Stop reste à Faux et r=1.*

<u>Pour l'équation différentielle</u> $y^{(2)}(z) = \left(\frac{\alpha}{z^4} + \frac{\beta}{z^3} + \frac{\gamma}{z^2}\right) y(z)$*, cette dernière se ramène au cas précédent en écrivant :* $y^{(2)}(z) - \frac{1}{z^4}\left(\alpha + \beta\, z + \gamma\, z^2\right) y(z) = 0$. *D'où* $K_1 = -1 \quad K_2 = 2 > K_1$. *Donc r=2 et il n'y a pas de solution régulière.*

<u>Pour l'équation différentielle</u> $z^3 y^{(2)}(z) + z\, y^{(1)}(z) + \lambda\, y(z) = 0$*, on calcule les coefficients .* $(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2) = (2,3) \Rightarrow (\tilde{g}_1, \tilde{g}_2) = (3,3) \to g = 3 > 2$. *Appliquons l'algorithme, il commence et s'arrête à r=1 avec Stop=Faux donc r=1. Il y a donc au moins une solution régulière 2-1=1.*

L'équation indicielle s'écrit : $\begin{cases} Q_0 = \underset{z\to 0}{Lim} \quad z = 0 \\ Q_1 = \underset{z\to 0}{Lim} \quad z^2 \frac{1}{z^2} = 1 \Rightarrow \rho + \lambda = 0 \\ Q_2 = \underset{z\to 0}{Lim} \quad z^3 \frac{\lambda}{z^3} = \lambda \end{cases}$

<u>Pour l'équation différentielle</u> $y^{(3)}(z) + \frac{a_1}{z^2} y^{(2)}(z) + \frac{a_2}{z^2} y^{(1)}(z) + \frac{a_3}{z^5} y(z) = 0$*, on calcule les coefficients .* $(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \tilde{w}_3) = (2,2,5) \Rightarrow (\tilde{g}_1, \tilde{g}_2, \tilde{g}_3) = (4,3,5) \to g = 5 > 3$. *Appliquons l'algorithme, il s'arrête à r=2 avec Stop=Vrai donc r=3. Il n'y a pas de solution régulière 3-3=0.*

L'équation indicielle s'écrit : $\begin{cases} Q_0 = \underset{z\to 0}{Lim} \quad z^2 = 0 \\ Q_1 = \underset{z\to 0}{Lim} \quad z^3 \frac{a_1}{z^2} = 0 \\ Q_2 = \underset{z\to 0}{Lim} \quad z^4 \frac{a_2}{z^2} = 0 \\ Q_3 = \underset{z\to 0}{Lim} \quad z^5 \frac{a_3}{z^5} = a_3 \end{cases} \Rightarrow a_3 = 0$*, ce qui confirme l'absence de solution régulière.*

Détermination de la classe d'une équation différentielle au point singulier z=∞

Par la transformation z->1/z le point singulier z=∞ devient le point z=0 et dans ce cas tout ce qui peut-être dit pour le point singulier z=0 peut l'être pour z=∞. Fin de partie, le joueur gagne la manche... Mais tout cela est un peu court car par exemple réaliser la transformation z->1/z sur une équation différentielle à coefficients polynomiaux n'est pas chose aisé et peut conduire à des calculs fastidieux et a fortiori on ne peut pas raisonner avec des formes standards d'équation différentielle.

C'est la raison pour laquelle les auteurs préfèrent traiter ce cas à part à partir de formes standardisées sur laquelle les raisonnements sont plus faciles à illustrer.

Partons donc d'une équation différentielle d'ordre n de la forme :

$$y^{(n)}(z)+P_1(z)\,y^{(n-1)}(z)+...+P_{n-1}(z)\,y^{(1)}(z)+P_n(z)\,y(z)=0$$
$$P_1(z)=\frac{p_1(z)}{p_0(z)}\quad ....\quad P_n(z)=\frac{p_n(z)}{p_0(z)}$$

Et supposons que les coefficients admettent un développement autour du point singulier z=∞ de la forme : $P_l(z)=z^{K_l}\left(a_{l,0}+\frac{a_{l,1}}{z}+\frac{a_{l,2}}{z^2}+...\right)$*. La détermination de la classe r de l'équation différentielle au point z=∞ :* $\begin{array}{l} y^{(n)}(z)+P_1(z)\,y^{(n-1)}(z)+...+P_{n-1}(z)\,y^{(1)}(z)+P_n(z)\,y(z)=0 \\ P_l(z)=z^{K_l}\left(a_{l,0}+\frac{a_{l,1}}{z}+\frac{a_{l,2}}{z^2}+...\right)\end{array}$ *suit un algorithme assez similaire à celui pour z=0 mais avec un calcul de « multiplicité » différent, à savoir :*

l=n-1
Stop=Faux
Tant que Stop=Faux et l >=1 Faire
Calculer les valeurs $\tilde{g}_l=K_l+l \rightarrow Max\,\{\tilde{g}_{l+1},\tilde{g}_{l+2},...,\tilde{g}_n\}$ ***et*** $g_l=Max\,\{\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,...,\tilde{g}_l\}$
Si $g_l=Max\,\{\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,...,\tilde{g}_l\}<Max\,\{\tilde{g}_{l+1},\tilde{g}_{l+2},...,\tilde{g}_n\}$ ***Alors Stop=Vrai Sinon r=r-1 Fin Si***
Fin Tant que
Si Stop=Vrai Alors Classe r = l+1 Sinon Classe r = 1

Cette algorithme est équivalent à la recherche et à l'existence d'un indice r tel que :

$$\tilde{g}_r=K_l+l\qquad \exists\, r\quad /\quad \begin{cases} g_r=Max\,\{\tilde{g}_{l+1},\tilde{g}_{l+2},...,\tilde{g}_n\}=Max\,\{\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,...,\tilde{g}_r\} & pour\quad l=r \\ g_l=Max\,\{\tilde{g}_{l+1},\tilde{g}_{l+2},...,\tilde{g}_n\}\le Max\,\{\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,...,\tilde{g}_l\} & pour\quad l>r \\ g_l=Max\,\{\tilde{g}_{l+1},\tilde{g}_{l+2},...,\tilde{g}_n\}>Max\,\{\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,...,\tilde{g}_l\} & pour\quad l<r \end{cases}$$

Ce qui est également équivalent à rechercher le plus petit indice r tel que :

$$g=Max\,\{\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,...,\tilde{g}_n\}\qquad r=Min\;\{\;\; l\;\;/\;\;\tilde{g}_l=K_l+l=g\;\}$$

ou bien encore qu'il existe un indice r, classe de l'équation différentielle en z=∞, tel que :

$$\exists r\quad r\in\{1,...,n\}\quad l\in\{1,...,n\}\rightarrow\begin{cases}\tilde{g}_l=K_l+l<K_r+r=\tilde{g}_r & pour\quad l<r\\ \tilde{g}_l=K_l+l=K_r+r=\tilde{g}_r & pour\quad l=r\\ \tilde{g}_l=K_l+l\le K_r+r=\tilde{g}_r & pour\quad l>r\end{cases}$$

Ainsi lorsque le rang de l'équation est n cela signifie que : $\forall l\in\{1,...,n-1\}\rightarrow\tilde{g}_l=K_l+l<K_n+n$ *. Un même théorème nous dit que lorsque la classe r < n alors il existe n-r solutions régulières et si la classe de l'équation différentielle est r=n, alors il n'existe pas de solutions régulières et dans ce cas le point singulier irrégulier z=∞ est dit essentiel.*

Algorithme de construction de l'équation indicielle pour le point singulier irrégulier z=∞

1) calcul de la classe r de l'équation différentielle autour du point z=∞
2) calcul des multiplicités $\widetilde{g}_l = K_l + l \quad et \quad g = Max\,\{\widetilde{g}_1, \widetilde{g}_2, ..., \widetilde{g}_n\} \quad avec \quad g = K_r + r > 0$
3) calcul des coefficients indiciels modifiés :

$$\begin{cases} \widetilde{P}_{0,\infty} = \underset{z\to\infty}{Lim} \quad z^{-g} = 0 \\ \widetilde{P}_{1,\infty} = \underset{z\to\infty}{Lim} \quad z^{-g+1}\; P_1(z) = 0 \\ ... \\ \widetilde{P}_{r-1,\infty} = \underset{z\to\infty}{Lim} \quad z^{-g+r-1}\; P_{r-1}(z) = 0 \\ \widetilde{P}_{r,\infty} = \underset{z\to\infty}{Lim} \quad z^{-g+r}\; P_r(z) \\ ... \\ \widetilde{P}_{n-1,\infty} = \underset{z\to\infty}{Lim} \quad z^{-g+n-1}\; P_{n-1}(z) \\ \widetilde{P}_{n,\infty} = \underset{z\to\infty}{Lim} \quad z^{-g+n}\; P_n(z) \end{cases}$$

4) les premiers coefficients jusqu'à l'indice r-1 sont tous nuls : $\widetilde{P}_{1,\infty} = \widetilde{P}_{2,\infty} = ... = \widetilde{P}_{r-1,\infty} = 0$
5) l'équation indicielle se calcule comme suit :

$$\begin{cases} f_0(\rho) = \sum_{l=r}^{l=n} [\widetilde{\rho}]_{n-l}\, \widetilde{P}_{l,\infty} = 0 \quad \widetilde{\rho} = -\rho \\ [\rho]_0 = 1 \qquad [\rho]_i = \rho(\rho-1)\times....\times(\rho-(i-1)) \Rightarrow [\widetilde{\rho}]_i = (-1)^i \rho(\rho+1)\times....\times(\rho+(i-1)) \end{cases}$$

6) l'équation indicielle peut alternativement se calculer également par la mise en œuvre du changement de variable t=1/z :

$$y^{(n)}(t) + \sum_{i=1}^{i=n-1} Q_i(t)\, y^{(n-i)}(t) + Q_n(t)\, y(t) = 0 \quad avec \quad Q_i(t) = \sum_{l=0}^{l=i} \frac{(-1)^l}{t^{l+i}} P_l\left(\frac{1}{t}\right) \frac{(n-l)!\,(n-l-1)!}{(n-i)!\,(n-i-1)!\,(i-l)!} \qquad Q_n(t) = (-1)^n t^{-2n} P_n\left(\frac{1}{t}\right)$$

$$f_0(\rho) = [\rho]_n + [\rho]_{n-1} Q_{1,0} + ... + [\rho]_{n-i} Q_{i,0} + ... + [\rho]_1 Q_{n-1,0} + Q_{n,0} = 0 \qquad \begin{cases} [\rho]_n = \rho(\rho-1)...(\rho-(n-1)) \\ [\rho]_{n-1} = \rho\,(\rho-1)...(\rho-(n-2)) \\ ... \\ [\rho]_1 = \rho\,(\rho-1) \\ [\rho]_0 = 1 \end{cases}$$

$$Q_{i,0} = \sum_{l=0}^{l=i} (-1)^l \widetilde{P}_{l,\infty} \frac{(n-l)!\,(n-l-1)!}{(n-i)!\,(n-i-1)!\,(i-l)!} \quad i \in \{1,...,n-1\} \quad Q_{n,0} = (-1)^n \widetilde{P}_{n,\infty} \qquad \begin{cases} \widetilde{P}_{0,\infty} = \underset{z\to\infty}{Lim} \quad z^{-g} = 0 \\ \widetilde{P}_{1,\infty} = \underset{z\to\infty}{Lim} \quad z^{-g+1}\; P_1(z) = 0 \\ ... \\ \widetilde{P}_{r-1,\infty} = \underset{z\to\infty}{Lim} \quad z^{-g+r-1}\; P_{r-1}(z) = 0 \\ \widetilde{P}_{r,\infty} = \underset{z\to\infty}{Lim} \quad z^{-g+r}\; P_r(z) \\ ... \\ \widetilde{P}_{n-1,\infty} = \underset{z\to\infty}{Lim} \quad z^{-g+n-1}\; P_{n-1}(z) \\ \widetilde{P}_{n,\infty} = \underset{z\to\infty}{Lim} \quad z^{-g+n}\; P_n(z) \end{cases}$$

Tout se passe ici comme si on multiplie toute l'équation différentielle par le facteur : z^{-g}. *Considérons que le point singulier irrégulier est de classe r=n, soit essentiel, alors tous les coefficients* $Q_{1,0} = Q_{2,0} = ... = Q_{n-1,0} = 0$ *ou* $\widetilde{P}_{1,\infty} = \widetilde{P}_{2,\infty} = ... = \widetilde{P}_{n-1,\infty} = 0$ *sont nuls et l'équation indicielle est triviale :* $Q_{n,0} = (-1)^n \widetilde{P}_{n,\infty} = 0$ *et ne comporte évidemment aucune racine.*

Voyons ce que peut devenir l'approche réalisée à partir du changement de variable z->1/z. Tout d'abord avec une équation différentielle du second degré :

Commençons par le premier degré : $y^{(1)}(z)+P_1(z)\,y(z)=0 \Leftrightarrow y^{(1)}(t)+Q_1(t)\,y(z)=0$

$$Q_1(t)=-t^{-1}t^{-(1+K_1)}\left(a_{1,0}+a_{1,1}t+...\right) \Rightarrow \tilde{w}_1=K_1+2 \quad \tilde{\tilde{g}}_l=\tilde{g}_l-1=K_1+1$$

Pour une équation du second degré, on s'assure bien que le calcul des « multiplicités » est identique entre celui de z=∞ et celui de t=0 :

$$y^{(2)}(z)+P_1(z)\,y^{(1)}(z)+P_2(z)\,y(z)=0 \Leftrightarrow y^{(2)}(t)+Q_1(t)\,y^{(1)}(z)+Q_2(t)\,y(t)=0$$
$$Q_1(t)=t^{-1}\left(2-t^{-(1+K_1)}\left(a_{1,0}+a_{1,1}t+...\right)\right) \qquad Q_2(t)=t^{-2}t^{-(2+K_2)}\left(a_{2,0}+a_{2,1}t+...\right)$$
$$\Rightarrow \tilde{w}_1=Max(K_1+2,1) \quad \tilde{w}_2=K_2+4 \Rightarrow \tilde{g}_1=Max(K_1+3,2) \quad \tilde{g}_2=K_2+4$$
$$\tilde{\tilde{g}}_l=\tilde{g}_l-2 \Rightarrow \tilde{\tilde{g}}_1=Max(K_1+1,0) \quad \tilde{\tilde{g}}_2=K_2+2$$

Idem pour une équation du troisième degré :

$$y^{(3)}(z)+P_1(z)\,y^{(2)}(z)+P_2(z)\,y^{(1)}(z)+P_3(z)\,y(z)=0 \Leftrightarrow y^{(3)}(t)+Q_1(t)\,y^{(2)}(t)+Q_2(t)\,y^{(1)}(z)+Q_3(t)\,y(t)=0$$
$$\begin{cases} Q_1(t)=t^{-1}\left(6-t^{-(1+K_1)}\left(a_{1,0}+a_{1,1}t+...\right)\right) \\ Q_2(t)=t^{-2}\left(6-2t^{-(1+K_1)}\left(a_{1,0}+a_{1,1}t+...\right)+t^{-(2+K_2)}\left(a_{2,0}+a_{2,1}t+...\right)\right) \\ Q_3(t)=-t^{-3}t^{-(3+K_3)}\left(a_{3,0}+a_{3,1}t+...\right) \end{cases}$$
$$\Rightarrow \tilde{w}_1=Max(K_1+2,1) \quad \tilde{w}_2=Max(K_1+3,K_2+4,2) \quad \tilde{w}_3=K_3+6$$
$$\Rightarrow \tilde{g}_1=Max(K_1+4,3) \quad \tilde{g}_2=Max(K_1+4,K_2+5,3) \quad \tilde{g}_3=K_3+6$$
$$\Rightarrow \tilde{g}_1-3=Max(K_1+1,0) \quad \tilde{g}_2-3=Max(K_1+1,K_2+2,0) \quad \tilde{g}_3-3=K_3+3$$

Idem pour une équation du quatrième degré :

$$y^{(4)}(z)+P_1(z)\,y^{(3)}(z)+P_2(z)\,y^{(2)}(z)+P_3(z)\,y^{(1)}(z)+P_4(z)\,y(z)=0 \Leftrightarrow y^{(4)}(t)+Q_1(t)y^{(3)}(t)+Q_2(t)\,y^{(2)}(z)+Q_3(t)\,y^{(1)}(t)+Q_4(t)\,y(t)=0$$
$$\begin{cases} Q_1(t)=t^{-1}\left(12-t^{-(1+K_1)}\left(a_{1,0}+a_{1,1}t+...\right)\right) \\ Q_2(t)=t^{-2}\left(36-6t^{-(1+K_1)}\left(a_{1,0}+a_{1,1}t+...\right)+t^{-(2+K_2)}\left(a_{2,0}+a_{2,1}t+...\right)\right) \\ Q_3(t)=t^{-3}\left(24-6t^{-(1+K_1)}\left(a_{1,0}+a_{1,1}t+...\right)+2t^{-(2+K_2)}\left(a_{2,0}+a_{2,1}t+...\right)-t^{-(3+K_3)}\left(a_{3,0}+a_{3,1}t+...\right)\right) \\ Q_4(t)=t^{-4}t^{-(4+K_4)}\left(a_{4,0}+a_{4,1}t+...\right) \end{cases}$$
$$\Rightarrow \tilde{w}_1=Max(K_1+2,1) \quad \tilde{w}_2=Max(K_1+3,K_2+4,2) \quad \tilde{w}_3=Max(K_1+4,K_2+5,K_3+6,3) \quad \tilde{w}_4=K_4+8$$
$$\Rightarrow \tilde{g}_1=Max(K_1+5,4) \quad \tilde{g}_2=Max(K_1+5,K_2+6,4) \quad \tilde{g}_2=Max(K_1+5,K_2+6,K_3+7,4) \quad \tilde{g}_4=K_4+8$$
$$\Rightarrow \tilde{g}_1-4=Max(K_1+1,0) \quad \tilde{g}_2-4=Max(K_1+1,K_2+2,0) \quad \tilde{g}_3-3=Max(K_1+1,K_2+2,K_3+3,0) \quad \tilde{g}_4-4=K_4+4$$

Pour une équation du n-ième degré, il convient donc de calculer la classe en t=0 sur les valeurs suivantes :

$$\tilde{\tilde{g}}_l=\tilde{g}_l-n \rightarrow \begin{cases} \tilde{\tilde{g}}_1=Max(K_1+1,0) \\ \tilde{\tilde{g}}_2=Max(K_1+1,K_2+2,0) \\ ... \\ \tilde{\tilde{g}}_{n-1}=Max(K_1+1,K_2+2,...,K_{n-1}+n-1,0) \\ \tilde{\tilde{g}}_n=K_n+n \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \begin{cases} g_1=K_1+1 \\ g_2=K_2+2 \\ ... \\ g_{n-1}=K_{n-1}+n-1 \\ g_n=K_n+n \end{cases}$$

ce qui revient exactement à effectuer le calcul de « multiplicité » sur les valeurs énoncées précédemment.

Définition d'une équation différentielle de Hamburger

Par définition : *une équation différentielle est dîtes de Hamburger si z=0 et z=∞ sont les seules singularité de l'équation différentielle et si l'une est régulière tandis que l'autre est essentielle.*

Par convention on peut choisir z=0 comme la singularité régulière et z=∞ la singularité irrégulière essentielle.

Notions de rang d'une équation différentielle au point singulier z=∞

La notion de rang d'une équation différentielle en un point singulier irrégulier est défini au départ au point z=∞. D'après la forme générique d'une équation différentielle du n-ième degré proposée par E.L.Ince :

$$y^{(n)}(z)+P_1(z)\,y^{(n-1)}(z)+...+P_{n-1}(z)\,y^{(1)}(z)+P_n(z)\,y(z)=0$$
$$P_l(z)=z^{K_l}\left(a_{l,0}+\frac{a_{l,1}}{z}+\frac{a_{l,2}}{z^2}+...\right)$$

Le rang se définit comme le maximum des expressions suivantes : $h=1+Max\left(\frac{K_l}{l}\quad l\in\{1,...,n\}\right)$. *On note aussi g le maximum de l'expression précédente :* $g=Max\left(\frac{K_l}{l}\quad l\in\{1,...,n\}\right)\quad K_l=K_l(\infty)$. *Eu égard à la notion de classe r définie auparavant :*

$$\exists r\quad r\in\{1,...,n\}\quad \forall l\in\{1,...,n\}\rightarrow\begin{cases}K_l+l<K_r+r & pour\quad l<r\\ K_l+l=K_r+r & pour\quad l=r\\ K_l+l\leq K_r+r & pour\quad l>r\end{cases}$$

E.I.Ince montre que l'on en déduit les trois situations possibles :

$$\exists r\quad r\in\{1,...,n\}\quad \forall l\in\{1,...,n\}\quad g=Max\left(\frac{K_l}{l}\quad l\in\{1,...,n\}\right)\rightarrow\begin{cases}\frac{K_l}{l}\leq g & pour\quad l<r\\ \frac{K_l}{l}=g & pour\quad l=r\\ \frac{K_l}{l}<g & pour\quad l>r\end{cases}$$

En effet posons s=g+1 et d'après la définition du nombre g, nous avons :

$$\exists l\in\{1,...,n\}\quad \frac{K_l}{l}=g\quad et\quad \forall l\in\{1,...,n\}\quad \frac{K_l}{l}\leq g$$
$$\Leftrightarrow \exists l\in\{1,...,n\}\quad K_l=l\,(s-1)\quad et\quad \forall l\in\{1,...,n\}\quad K_l\leq l\,(s-1)$$

Alors tous les nombres de la suite suivante : $\{K_n,K_{n-1}+(s-1),K_{n-2}+2(s-1),...,K_1+(n-1)(s-1),n(s-1)\}$ *sont inférieures ou égal à* $n(s-1)$ *et au moins un autre de ces nombres est aussi égal à* $n(s-1)$. *Plus simplement nous dirions qu'au moins deux nombres de cette suite sont égaux à la valeur maximale* $n(s-1)$ *. Et que les autres nombres lui sont inférieurs ou égaux. Or d'après la définition de la classe r, pour tous les indices l > r, il vient :*

$$K_l+l\leq K_r+r\quad pour\quad l>r$$
$$\Rightarrow K_r+r+n(s-1)-r\,s\geq K_l+l+n(s-1)-r\,s>K_l+l+n(s-1)-l\,s\quad pour\quad l>r$$
$$\Rightarrow K_r+(n-r)(s-1)>K_l+(n-l)(s-1)\quad pour\quad l>r$$

En conséquence pour que l'égalité à $n(s-1)$ *pour la suite des nombres ait lieu, il est nécessaire que l<=r comme suit :* $K_l + (n-l)(s-1) = n(s-1) \Rightarrow K_l = l(s-1) \Rightarrow \frac{K_l}{l} = g \quad pour \quad l \le r$ *pour au moins un indice, et pour les autres :* $K_l \le l(s-1) \Rightarrow \frac{K_l}{l} \le g \quad pour \quad l \le r$. *La conséquence est donc bien que :*

$$\exists r \quad r \in \{1,\dots,n\} \quad \forall l \in \{1,\dots,n\} \quad g = Max\left(\frac{K_l}{l} \quad l \in \{1,\dots,n\}\right) \rightarrow \begin{cases} \frac{K_l}{l} \le g & pour \quad l < r \\ \frac{K_l}{l} = g & pour \quad l = r \\ \frac{K_l}{l} < g & pour \quad l > r \end{cases}$$

Exemple : une équation différentielle de rang 1 indique que h=1, soit donc que g=0. D'après la forme $P_l(z) = z^{K_l}\left(a_{l,0} + \frac{a_{l,1}}{z} + \frac{a_{l,2}}{z^2} + \dots\right) \quad g = 0 = Max\left(\frac{K_l}{l} \quad l \in \{1,\dots,n\}\right)$, *on en déduit que* $\forall l \quad K_l \le 0 \quad l \in \{1,\dots,n\}$. *Cela revient à ce que les coefficients aient la forme générale :* $P_l(z) = a_{l,0} + \frac{a_{l,1}}{z} + \frac{a_{l,2}}{z^2} + \dots$ *avec les coefficients* $a_{l,0}, a_{l,1}, a_{l,2}, \dots$ *non tous nuls.*

<u>Notions de rang d'une équation différentielle en un point singulier z=z₀ à distance finie</u>

Pour définir par extension le rang d'une équation différentielle en z=0 lorsqu'il est un point singulier irrégulier, il convient de réaliser la transformation z=1/t. Cela permet de calculer les coefficients :

$$K_l(\infty) \rightarrow g = Max\left(\frac{K_l(\infty)}{l} \quad l \in \{1,\dots,n\}\right) \Rightarrow h = g + 1$$

Ce qui définit le rang pour le point z=0. Pour un point $z=z_0$, *il suffit d'appliquer les deux transformation:* $z=t+z_0$ *puis t->z, et ensuite, z=1/t puis t->z.* $Rang(z_0) = Max\left(\frac{K_l(\infty)}{l} \quad l \in \{1,\dots,n\}\right) + 1$.

Heureusement il existe une définition plus directe pour déterminer le rang d'une équation différentielle en z=0 et elle nous est donnée par exemple par A.R.Forsyth dans « Vol 4 Theory Of Differential Equations, Chapter VII, Normal integrals , Subnormal integrals ». Pour cela supposons maintenant la forme de l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} y^{(n)}(z) + P_1(z)\, y^{(n-1)}(z) + \dots + P_{n-1}(z)\, y^{(1)}(z) + P_n(z)\, y(z) = 0 \\ P_l(z) = z^{-\widetilde{w}_l}\left(a_{l,0} + a_{l,1} z + a_{l,2} z^2 + \dots\right) \end{cases}$$

Le rang se définit comme le maximum des expressions suivantes : $h = Max\left(\frac{\widetilde{w}_l}{l} \quad l \in \{1,\dots,n\}\right) - 1$. *On note aussi g le maximum de l'expression précédente :* $g = Max\left(\frac{\widetilde{w}_l}{l} \quad l \in \{1,\dots,n\}\right) \quad \widetilde{w}_l = \widetilde{w}_l(0)$. *Eu égard à la notion de classe r définie auparavant :*

$$\exists r \quad r \in \{1,\dots,n\} \quad \forall l \in \{1,\dots,n\} \rightarrow \begin{cases} \widetilde{w}_l + n - l < \widetilde{w}_r + n - r & pour \quad l < r \\ \widetilde{w}_l + n - l = \widetilde{w}_r + n - r & pour \quad l = r \\ \widetilde{w}_l + n - l \le \widetilde{w}_r + n - r & pour \quad l > r \end{cases}$$

Par analogie avec le raisonnement présenté par E.I.Ince pour le cas z=∞, l'on en déduit les trois situations possibles :

$$\exists r \quad r \in \{1,...,n\} \quad \forall l \in \{1,...,n\} \quad g = Max\left(\frac{\widetilde{w}_l}{l} \quad l \in \{1,...,n\}\right) \rightarrow \begin{cases} \frac{\widetilde{w}_l}{l} \leq g & pour \quad l < r \\ \frac{\widetilde{w}_l}{l} = g & pour \quad l = r \\ \frac{\widetilde{w}_l}{l} < g & pour \quad l > r \end{cases}$$

Posons s=g et d'après la définition du nombre g, nous avons :

$$\exists l \in \{1,...,n\} \quad \frac{\widetilde{w}_l}{l} = g \quad et \quad \forall l \in \{1,...,n\} \quad \frac{\widetilde{w}_l}{l} \leq g$$

Alors tous les nombres de la suite suivante :

$$\{\widetilde{w}_n, \widetilde{w}_{n-1} + g, \widetilde{w}_{n-2} + 2\,g, ..., \widetilde{w}_l + (n-l)\,g, ..., \widetilde{w}_1 + (n-1)\,g, n\,g\}$$

sont inférieures ou égal à $n\,g$ *et nous dirions qu'au moins deux nombres de cette suite sont égaux à la valeur maximale* $n\,g$ *. Et que les autres nombres lui sont inférieurs ou égaux. Or d'après la définition de la classe r, pour tous les indices l > r, il vient :*

$$\begin{aligned} & \widetilde{w}_l + n - l \leq \widetilde{w}_r + n - r \quad pour \quad l > r \\ & \Rightarrow \widetilde{w}_r + (n-r) + (n-r)(g-1) \geq \widetilde{w}_l + (n-l) + (n-r)(g-1) \quad pour \quad l > r \\ & \Rightarrow \widetilde{w}_r + (n-r)g \geq \widetilde{w}_l + (n-l)g + (l-r)(g-1) \quad pour \quad l > r \\ & \Rightarrow \widetilde{w}_r + (n-r)g > \widetilde{w}_l + (n-l)g \quad pour \quad l > r \end{aligned}$$

On a par ailleurs supposé ici que g-1 était positif ou nul soit que g est supérieur ou égal à 1. Cela est effectivement vrai lorsque z=0 est un point singulier irrégulier car dans ce cas on suppose qu'au moins pour un des indices $\exists l \quad l \in \{1,...,n\} \quad w_l > l$ *. On peut même affirmer dans ce cas que g>1.*

En conséquence pour que l'égalité à la valeur $n\,g$ *pour la suite des nombres ait lieu, il est nécessaire que l<=r comme suit :* $\widetilde{w}_l + (n-l)\,g = n\,g \Rightarrow \widetilde{w}_l = l\,g \Rightarrow \frac{\widetilde{w}_l}{l} = g \quad pour \quad l \leq r$ *pour au moins un indice, et pour les autres :* $\widetilde{w}_l \leq l\,g \Rightarrow \frac{\widetilde{w}_l}{l} \leq g \quad pour \quad l \leq r$*. La conséquence est donc que :*

$$\exists r \quad r \in \{1,...,n\} \quad \forall l \in \{1,...,n\} \quad g = Max\left(\frac{\widetilde{w}_l}{l} \quad l \in \{1,...,n\}\right) \rightarrow \begin{cases} \frac{\widetilde{w}_l}{l} \leq g & pour \quad l < r \\ \frac{\widetilde{w}_l}{l} = g & pour \quad l = r \\ \frac{\widetilde{w}_l}{l} < g & pour \quad l > r \end{cases}$$

Exemple : une équation différentielle de rang 0 indique que h=g-1=0, soit donc que g=1. D'après la forme $P_l(z) = z^{-\widetilde{w}_l}(a_{l,0} + a_{l,1}z + a_{l,2}z^2 + ...) \quad g = 1 = Max\left(\frac{\widetilde{w}_l}{l} \quad l \in \{1,...,n\}\right)$*. Cela revient à ce que les coefficients aient la forme générale :* $P_l(z) = z^{-l}(a_{l,0} + a_{l,1}z + a_{l,2}z^2 + ...)$ *avec les coefficients* $a_{l,0}, a_{l,1}, a_{l,2}, ...$ *non tous nuls, soit une équation dont le point singulier z=0 est régulier. Une équation de rang 1 indique qu'au moins pour un indice l, le coefficient est de la forme :* $\exists l \quad l \in \{1,...,n\} \quad P_l(z) = z^{-2l}(a_{l,0} + a_{l,1}z + a_{l,2}z^2 + ...)$.

Détermination de la forme normale des solutions d'une équation différentielle du premier degré aux points singuliers irréguliers z=0 ou z=∞

Partons d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre de la forme :

$$y^{(1)}(z)+P_1(z)\,y(z)=0 \quad avec \quad P_1(z)=z^{K_1}\left(a_0+\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\dots\right) \quad ou \quad P_1(z)=z^{-1-\mu_1}\left(b_0+b_1 z+b_2 z^2+\dots\right)$$

Pour que le point z=0 soit un point irrégulier, il suffit que $\mu_1>0 \quad et \quad b_0\neq 0$*. Pour que le point z=∞ soit un point irrégulier, il suffit que* $K_1\geq 0 \quad et \quad a_0\neq 0$.

Avant de définir la forme normale pour ce type d'équation différentielle qui est d'ailleurs parfaitement intégrable autour des points singuliers réguliers z=0 et z=∞ pour des formes suffisamment diverses de la fonction $P_1(z)$*, voyons comment calculer le rang de cette équation différentielle du premier degré :*

Pour cela prenons une forme assez générale de la fonction $P_1(z)$*, s'inspirant de l'exemple pris par E.L.Ince soit un« polynôme » en puissances positives et négatives de z :*

$$\widetilde{Q}(z)=m\frac{a_m}{z^{m+1}}+(m-1)\frac{a_{m-1}}{z^m}+\dots+\frac{a_1}{z^2} \qquad \widetilde{\Phi}(z)=\varphi_0+2\varphi_1 z+3\,\varphi_2 z^2+\dots+(l+1)\,\varphi_l z^l \qquad P_1(z)=\widetilde{Q}(z)-\frac{\rho}{z}-\widetilde{\Phi}(z)$$

Autour du point singulier irrégulier z=∞, $P_1(z)$ *peut aussi s'écrire :*

$$P_1(z)=z^l\times\left(m\frac{a_m}{z^{m+1+l}}+(m-1)\frac{a_{m-1}}{z^{m+l}}+\dots+\frac{a_1}{z^{2+l}}-\frac{\rho}{z^{1+l}}-\left(\frac{\varphi_0}{z^l}+2\frac{\varphi_1}{z^{l-1}}+3\frac{\varphi_2}{z^{l-2}}+\dots+(l+1)\,\varphi_l\right)\right)$$

La valeur de $Max(K_1+1)$ *est égale à l+1 et la classe de cette équation du premier degré est automatiquement égale à 1, puisqu'il n'y a qu'un seul indice. Donc r=1, sauf à ce que le point z=∞ soit un point régulier, soit si l=0 et* $\varphi_0=0$ *soit* $P_1(z)=m\frac{a_m}{z^{m+1}}+(m-1)\frac{a_{m-1}}{z^m}+\dots+\frac{a_1}{z^2}-\frac{\rho}{z}$ *et dans ce cas par définition r=0.*

Le rang de cette équation différentielle en z=∞ est $1+Max(K_1/1)=1+l$*. Pour qu'elle soit de rang 1, il suffit que* $P_1(z)$ *soit de la forme :* $P_1(z)=m\frac{a_m}{z^{m+1}}+(m-1)\frac{a_{m-1}}{z^m}+\dots+\frac{a_1}{z^2}-\frac{\rho}{z}-\varphi_0$*, car si* $\varphi_0\neq 0$ *le point z=∞ est irrégulier .*

Pour ce qui est de la classe au point z=0, $P_1(z)$ peut aussi s'écrire :

$$P_1(z)=z^{-m-1}\left(m\,a_m+(m-1)\,a_{m-1}z+\ldots+a_1\,z^{m-1}-\rho\,z^m-z^{m+1}\left(\varphi_0+2\varphi_1 z+3\varphi_2 z^2+\ldots+(l+1)\,\varphi_l z^l\right)\right)$$

Si m=0, alors le point z=0 est régulier et $P_1(z)$ s'écrit : $P_1(z)=-\frac{\rho}{z}-\left(\varphi_0+2\varphi_1 z+3\varphi_2 z^2+\ldots+(l+1)\,\varphi_l z^l\right)$ *et par définition la classe de l'équation est r=0. La classe r=1 si m>0 et le point est irrégulier, sans solution régulière autour de z=0.*

Le rang de cette équation différentielle peut se calculer par le changement de variable t=1/z, soit :

$$-t^2y'(t)+P_1\left(\frac{1}{t}\right)y(t)=0\quad P_1(t)=t^{m+1}\left(m\,a_m+(m-1)\,\frac{a_{m-1}}{t}+\ldots+\frac{a_1}{t^{m-1}}-\frac{\rho}{t^m}-\frac{1}{t^{m+1}}\left(\varphi_0+2\frac{\varphi_1}{t}+3\frac{\varphi_2}{t^2}+\ldots+(l+1)\,\frac{\varphi_l}{t^l}\right)\right)$$

$$\Rightarrow y'(t)+Q_1(t)y=0\quad P_1(t)=-t^{m-1}\left(m\,a_m+(m-1)\,\frac{a_{m-1}}{t}+\ldots+\frac{a_1}{t^{m-1}}-\frac{\rho}{t^m}-\frac{1}{t^{m+1}}\left(\varphi_0+2\frac{\varphi_1}{t}+3\frac{\varphi_2}{t^2}+\ldots+(l+1)\,\frac{\varphi_l}{t^l}\right)\right)$$

Le nombre g est m-1 et le rang de l'équation différentielle en z=0 est donc m. Pour qu'elle soit de rang 1 en z=0 il suffit donc que $P_1(z)$ *soit de la forme :* $P_1(z)=\frac{a_1}{z^2}-\frac{\rho}{z}-\left(\varphi_0+2\varphi_1 z+3\varphi_2 z^2+\ldots+(l+1)\,\varphi_l z^l\right)$.

Poursuivons toujours par l'exemple qu'E.L.Ince introduit pour recouper les deux cas d'irrégularité z=0 ou z=∞ en le transformation légèrement.

$$\widetilde{Q}(z)=m\,\frac{a_m}{z^{m+1}}+(m-1)\frac{a_{m-1}}{z^m}+\ldots+\frac{a_1}{z^2}\qquad\widetilde{\Phi}(z)=\varphi_0+2\varphi_1 z+3\,\varphi_2 z^2+\ldots+(l+1)\,\varphi_l z^l\qquad P_1(z)=\widetilde{Q}(z)-\frac{\rho}{z}-\widetilde{\Phi}(z)$$

La solution de l 'équation différentielle s'écrit :

$$y(z)=c_0e^{Q(z)}z^{\rho}\;e^{\Phi(z)}\qquad Q(z)=\frac{a_m}{z^m}+\frac{a_{m-1}}{z^{m-1}}+\ldots+\frac{a_1}{z}\qquad\Phi(z)=\varphi_0 z+\varphi_1 z^2+\ldots+\varphi_l z^{l+1}$$

En effet : $y'(z)=\left(Q'(z)+\frac{\rho}{z}+\Phi'(z)\right)y(z)\quad Q'(z)=-\widetilde{Q}(z)\quad\Phi'(z)=\widetilde{\Phi}(z)\Rightarrow y'(z)+\left(\widetilde{Q}(z)-\frac{\rho}{z}-\widetilde{\Phi}(z)\right)y(z)=0$

Dès lors que l'un des coefficients $(a_1,a_2,\ldots,a_m)$ *n'est pas nul alors z=0 est un point singulier irrégulier et de même si l'un des coefficients* $(\varphi_0,\varphi_1,\ldots,\varphi_l)$ *n'est pas nul alors z=∞ est aussi un point singulier irrégulier.*

Par évidence si l<=0 alors le point singulier z=∞ est régulier et il n'est plus question d'existence d'une forme normale, mais d'une forme régulière avec $\Phi(z)=0$. *Et de même si m<=0 alors le point singulier z=0 est également régulier et il n'est plus question d'existence d'une forme normale, mais d'une forme régulière avec* $Q(z)=0$.

En écrivant la solution de l'équation du premier tantôt comme : $y(z)=e^{Q(z)}u_0(z)$ *ou comme* $y(z)=e^{\Phi(z)}u_\infty(z)$. *Alors l'équation différentielle du premier degré s'écrit de deux manières différentes :* $u_0'(z)+\left(-\frac{\rho}{z}-\widetilde{\Phi}(z)\right)u_0(z)=0$ *ou* $u_\infty'(z)+\left(\widetilde{Q}(z)-\frac{\rho}{z}\right)u_\infty(z)=0$. *Dans le premier cas le point z=0 a cessé d'être un point singulier irrégulier et c'est le point z=+∞ qui devient régulier dans le second cas. <u>La présence du terme exponentiel dans les deux cas a donc pour effet (ou mission) de transformer l'irrégularité du point en sa régularité.</u>*

En remplaçant le polynôme par une fonction holomorphe autour de z=0 $\widetilde{\Phi}(z)=\varphi_0+2\varphi_1 z+3\,\varphi_2 z^2+\ldots+(l+1)\,\varphi_l z^l+\ldots$*, la solution de cette équation différentielle ordinaire du premier degré est de la forme :*

$$y(z)=e^{Q(z)}z^{\rho}\ e^{\Phi(z)}\quad avec\quad \Phi(z)=\int_c^z dt\ \widetilde{\Phi}(t)$$

$$Q(z)=\frac{a_m}{z^m}+\frac{a_{m-1}}{z^{m-1}}+\ldots+\frac{a_1}{z}\qquad \Phi(z)=\varphi_0 z+\varphi_1 z^2+\ldots+\varphi_l z^{l+1}+\ldots$$

En remplaçant le polynôme de puissance négative par une fonction holomorphe autour de z=∞ $\widetilde{Q}(z)=\frac{a_1}{z^2}+2\frac{a_2}{z^3}+\ldots+(m-1)\frac{a_{m-1}}{z^m}+m\frac{a_m}{z^{m+1}}+\ldots$ *, la solution de cette équation différentielle ordinaire du premier degré est de la forme :*

$$y(z)=e^{Q(z)}z^{\rho}\ e^{\Phi(z)}\quad avec\quad Q(z)=\int_c^z dt\ \widetilde{Q}(t)$$

$$Q(z)=\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\ldots+\frac{a_{m-1}}{z^{m-1}}+\frac{a_m}{z^m}+\ldots\qquad \Phi(z)=\varphi_0 z+\varphi_1 z^2+\ldots+\varphi_l z^{l+1}$$

Tous ces exemples illustrent le fait qu'il existe un terme en exponentiel d'une forme polynomiale soit en z soit en 1/z. C'est ce que l'on désigne comme forme normale.

Supposons maintenant que les puissances du terme $P_1(z)$ soit rationnelles et de la forme :

$$\sigma_0>p>0\quad \sigma_\infty>0\qquad P_1(z)=\sum_{l=p+1}^{l=\sigma_0}\left(\frac{l}{p}-1\right)a_l z^{-\frac{l}{p}}+\sum_{l=1}^{l=p-1}\left(\frac{l}{p}-1\right)a_l z^{-\frac{l}{p}}-\frac{a_p}{z}-\sum_{l=0}^{l=\sigma_\infty}b_l\left(\frac{l}{p}+1\right)z^{\frac{l}{p}}$$

Alors la solution de l'équation différentielle $y^{(1)}(z)+P_1(z)\,y(z)=0$ *s'écrit ainsi :*

$$y(z)=c_0e^{Q(z)}z^{a_p}e^{\Phi(z)}\qquad Q(z)=z\times\left(\sum_{l=p+1}^{l=\sigma_0}a_l z^{-\frac{l}{p}}+\sum_{l=1}^{l=p-1}a_l z^{-\frac{l}{p}}\right)\qquad \Phi(z)=z\sum_{l=0}^{l=\sigma_\infty}b_l\ z^{\frac{l}{p}}$$

$$Puisque\quad Q'(z)+\frac{a_p}{z}+\Phi'(z)=-P_1(z)$$

Si $P_1(z)$ prend la forme :

$$\sigma_0>p>0\qquad P_1(z)=\sum_{l=p+1}^{l=\sigma_0}\left(\frac{l}{p}-1\right)a_l z^{-\frac{l}{p}}+\sum_{l=1}^{l=p-1}\left(\frac{l}{p}-1\right)a_l z^{-\frac{l}{p}}-\frac{a_p}{z}-\widetilde{\Phi}\left(z^{\frac{1}{p}}\right)\qquad \widetilde{\Phi}(z)\quad holomorphe\ en\ z=0\rightarrow\widetilde{\Phi}(z)=\sum_{l=0}^{l=\infty}b_l\ z^l$$

Alors la solution est de la forme :

$$y(z)=c_0e^{Q(z)}z^{a_p}e^{\Phi(z)}\qquad Q(z)=z\times\left(\sum_{l=p+1}^{l=\sigma_0}a_l z^{-\frac{l}{p}}+\sum_{l=1}^{l=p-1}a_l z^{-\frac{l}{p}}\right)$$

$$\Phi(z)=\int_c^z dt\ \widetilde{\Phi}\left(t^{\frac{1}{p}}\right)=\sum_{l=0}^{l=\infty}\frac{pb_l}{l+p}\ z^{\frac{l}{p}+1}=z\times\sum_{l=0}^{l=\infty}\frac{pb_l}{l+p}\ z^{\frac{l}{p}}\quad avec\quad Q'(z)+\frac{a_p}{z}+\Phi'(z)=-P_1(z)$$

Et si $P_1(z)$ prend la forme :

$$\sigma_0 > p > 0 \quad \sigma_\infty > 0 \qquad P_1(z) = \widetilde{Q}(z) + \sum_{l=1}^{l=p-1} \left(\frac{l}{p} - 1\right) a_l z^{-\frac{l}{p}} - \frac{a_p}{z} - \sum_{l=0}^{l=\sigma_\infty} b_l \left(\frac{l}{p} + 1\right) z^{\frac{l}{p}}$$

$$\widetilde{Q}(z) = \sum_{l=1}^{l=\infty} \frac{l}{p} a_l z^{-1-\frac{l}{p}} = \frac{1}{z} \Psi\left(z^{-\frac{1}{p}}\right) \quad \Psi(z) \quad holomorphe\ en\ z = \infty \quad \Psi(\infty) = 0$$

Alors la solution est de la forme :

$$y(z) = c_0 e^{\Phi(z)} z^{a_p} e^{Q(z)} \qquad \Phi(z) = z \times \left(\sum_{l=1}^{l=p-1} a_l z^{-\frac{l}{p}} + \sum_{l=0}^{l=\sigma_\infty} b_l\ z^{\frac{l}{p}}\right) \qquad Q(z) = -\int_c^z dt\, \frac{1}{t} \Psi\left(t^{-\frac{1}{p}}\right) = \sum_{l=1}^{l=\infty} a_l z^{-\frac{l}{p}}$$

$$\Rightarrow Q'(z) = -\frac{1}{z} \Psi\left(z^{-\frac{1}{p}}\right) = -\widetilde{Q}(z) \Rightarrow Q'(z) + \frac{a_p}{z} + \Phi'(z) = -P_1(z)$$

Ces exemples illustrent le fait qu'il existe un terme en exponentiel d'une forme polynomiale soit en $z^{1/p}$ soit en $z^{-1/p}$. C'est ce que l'on désigne comme forme subnormale.

<u>Une propriété simple d'une équation différentielle de premier degré</u>

Soit l'équation différentielle : $z\ y'(z) = u(z) y(z) \quad u(z) = \sum_{l=0}^{l=\infty} u_l z^l \quad holomorphe\ autour\ de\ z = 0$ *alors la solution de cette équation différentielle peut toujours s'écrire sous la forme :*

$$\frac{y'(z)}{y(z)} = \frac{u(z)}{z} \Rightarrow y(z) \propto z^{u_0} e^{u_1 z + u_2 \frac{z^2}{2} + \dots} \to y(z) \propto z^{u_0} e^{\sum_{l=1}^{l=\infty} u_l \frac{z^l}{l}}$$

On a ainsi « séparé » la partie régulière de la fonction y(z) de sa partie holomorphe.

De même inversement toute fonction $y(z) \propto z^{u_0} v(z)$ *qui se décompose en sa partie régulière et v(z) sa partie holomorphe autour de z=0, alors cette dernière peut toujours s'écrire sous la forme :* $v(z) \propto e^{u_1 z + u_2 \frac{z^2}{2} + \dots}$ *. Prenons le développement analytique de la fonction v(z) dont la valeur en z=0 peut être posée à 1 sans restreindre la généralité, il vient :*

$$v(z) = 1 + z\ v'(0) + \frac{z^2}{2!} v''(0) + \frac{z^3}{3!} v^{(3)}(0) + \dots.$$

$$Si\ v(z) = e^{u_1 z + u_2 z^2 + u_3 z^3 \dots} \quad \Phi(z) = u_1 z + u_2 z^2 + u_3 z^3 \dots \Rightarrow u_l = l!\, \Phi^{(l)}(0)$$

$$\begin{cases} v'(z) = \Phi'(z) e^{\Phi(z)} \Rightarrow u_1 = v'(0) \\ v''(z) = \left(\Phi''(z) + (\Phi'(z))^2\right) e^{\Phi(z)} \Rightarrow \Phi^{(2)}(0) + (\Phi'(0))^2 = v''(0) \\ v^{(3)}(z) = \left(\Phi^{(3)}(z) + 2\Phi'(z)\Phi''(z) + \Phi'(z)\left(\Phi''(z) + (\Phi'(z))^2\right)\right) e^{\Phi(z)} \Rightarrow \Phi^{(3)}(0) + 2\Phi'(0)\Phi''(0) + \Phi'(0)\left(\Phi''(0) + (\Phi'(0))^2\right) = v^{(3)}(0) \\ \dots \\ v^{(l)}(z) = \Phi^{(l)}(z) + f\left(\Phi'(z), \Phi''(z), \dots, \Phi^{(l-1)}(z)\right) \Rightarrow \Phi^{(l)}(0) = v^{(l)}(0) - f\left(\Phi'(0), \Phi''(0), \dots, \Phi^{(l-1)}(0)\right) \end{cases}$$

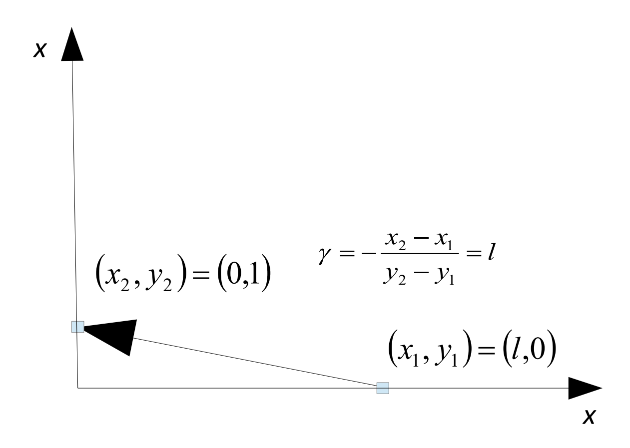
Et de proche en proche toutes les dérivées de la fonction ϕ(z) se calcule de manière univoque avec la fonction f qui est par nature algébrique et polynomiale à partir de celles de la fonction v(z), donc tous les termes du développement dans l'exponentiel sont parfaitement définis ainsi.

<u>Notion de diagramme de Newton/Puisieux pour une équation différentielle du premier degré au point irrégulier z=∞</u>

Illustrons maintenant la notion de diagramme de Newton/Puisieux pour cette équation différentielle du premier degré lié au point irrégulier z=∞. Comme $P_1(z)$ peut s'écrire :

$$P_1(z) = z^l \times \left(m \frac{a_m}{z^{m+1+l}} + (m-1)\frac{a_{m-1}}{z^{m+l}} + \ldots + \frac{a_1}{z^{2+l}} - \frac{\lambda}{z^{1+l}} - \left(\frac{\varphi_0}{z^l} + 2\frac{\varphi_1}{z^{l-1}} + 3\frac{\varphi_2}{z^{l-2}} + \ldots + (l+1)\varphi_l \right) \right)$$

l est la puissance maximale de z à retenir. Reportons dans un diagramme (x,y) les deux points (0,r=1) et (K_1=l,0) et traçons le segment reliant ces deux points dans le sens (l,0) ->(0,1). C'est une ligne polygonale triviale dont <u>l'enveloppe convexe supérieure</u> s'identifie avec le segment. Calculons la pente calculée par rapport à l'axe des ordonnées en respectant le sens $(x_1, y_1) = (l,0) \to (x_2, y_2) = (0,1)$ se calcule ainsi : $\gamma = -\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} = l$



Pour z=∞, le terme normale est de la forme : $e^{\Omega(z)} \to \Omega(z) = \alpha_0 z + \alpha_1 z^2 + \ldots + \alpha_s z^{s+1}$ *et la valeur admissible de la puissance s maximale est s=γ+1 = l+1, soit* $\Omega(z) = \alpha_0 z + \alpha_1 z^2 + \ldots + \alpha_l z^{l+1}$ *. Pour déterminer les valeurs des paramètres :* $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_l$ *formons l'expression* $(\Omega'(z))^1 + P_1(z)(\Omega'(z))^0 = \Omega'(z) + P_1(z) = 0$ *en annulant les l premiers termes de puissance maximale décroissante en z , il vient un système d'équation algébrique (il se trouve qu'il est linéaire et de solution triviale dans ce cas) :*

$$P_1(z) = -\left(\varphi_0 + 2\varphi_1 z + 3\,\varphi_2 z^2 + \ldots + (l+1)\,\varphi_l z^l\right) - \frac{\lambda}{z} + \frac{a_1}{z^2} + \ldots + (m-1)\frac{a_{m-1}}{z^m} + m\,\frac{a_m}{z^{m+1}}$$

$$\Rightarrow \alpha_0 + 2\alpha_1 z + \ldots + (l+1)\alpha_l z^l - \left(\varphi_0 + 2\varphi_1 z + 3\,\varphi_2 z^2 + \ldots + (l+1)\,\varphi_l z^l\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_0 = \varphi_0 \\ \alpha_1 = \varphi_1 \\ \ldots \\ \alpha_l = \varphi_l \end{cases}$$

Une fois le terme de forme normale déterminé, il suffit d'injecter ce dernier dans l'équation différentielle sous la forme $y(z) = e^{\Omega(z)} u(z)$ *pour obtenir l'équation différentielle de la fonction u(z) qui se trouve être par évidence :*

$$u'(z) + \widetilde{P}_1(z)\,u(z) = 0 \quad avec \quad \widetilde{Q}(z) = m\,\frac{a_m}{z^{m+1}} + (m-1)\frac{a_{m-1}}{z^m} + \ldots + \frac{a_1}{z^2} \qquad \widetilde{P}_1(z) = \widetilde{Q}(z) - \frac{\lambda}{z}$$

Cette fois le point z=∞ est devenu régulier et l'équation indicielle est ρ=-λ, dans ce cas il suffit de développer la solution de l'équation en u(z) par la méthode de Fröbenius sous la forme du développement : $u(z)=\left(\frac{1}{z}\right)^{-\rho}\sum_{i=0}^{i=+\infty} b_i z^{-i} = z^{\rho} \times \sum_{i=0}^{i=+\infty} b_l z^{-i}$ *. Il se trouve que l'injection de cette forme conduit à la récurrence à m termes suivante :* $\begin{cases} b_{-i} = 0 \quad \forall i > 0 \qquad b_0 = 1 \\ i\ b_i = \sum_{j=1}^{j=m-1} j\ a_j\ b_{i-j} \quad \forall i \geq 1 \end{cases}$ *. Il se trouve que cette récurrence est exactement celle du développement en série autour de z=∞ de la fonction exponentielle :* $e^{\frac{a_m}{z^m}+\frac{a_{m-1}}{z^{m-1}}+\ldots+\frac{a_1}{z}}$ *donc la solution de l'équation en u(z) est alors :*

$$u(z) = z^{\rho} \times e^{\frac{a_m}{z^m}+\frac{a_{m-1}}{z^{m-1}}+\ldots+\frac{a_1}{z}}$$

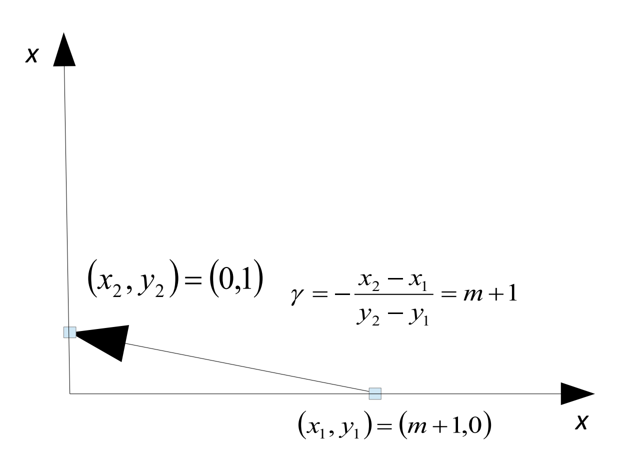
On retrouve bien la solution de l'équation différentielle du premier degré par intégration directe.

Notion de diagramme de Newton/Puisieux pour une équation différentielle du premier degré au point irrégulier z=0

Le diagramme de Newton/Puisieux au point irrégulier z=0 pour cette équation différentielle du premier degré se construit d'une manière assez similaire. Comme $P_1(z)$ peut s'écrire :

$$P_1(z) = z^{-m-1}\left(m\, a_m + (m-1)\, a_{m-1} z + \ldots + a_1\, z^{m-1} - \rho\, z^m - z^{m+1}\left(\varphi_0 + 2\varphi_1 z + 3\varphi_2 z^2 + \ldots + (l+1)\,\varphi_l z^l\right)\right)$$

m+1 est la puissance maximale de 1/z à retenir. Reportons dans un diagramme (x,y) les deux points (0,r=1) et (m+1,0) et traçons le segment reliant ces deux points dans le sens (m+1,0) ->(0,1). C'est une ligne polygonale triviale dont l'enveloppe convexe supérieure s'identifie avec le segment. Calculons la pente calculée par rapport à l'axe des ordonnées en respectant le sens $(x_1, y_1) = (m+1, 0) \rightarrow (x_2, y_2) = (0,1)$ *se calcule ainsi :* $\gamma = -\dfrac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} = m+1$



Pour z=0, le terme normale est de la forme : $e^{\Omega(z)} \rightarrow \Omega(z) = \dfrac{\alpha_s}{z^s} + \dfrac{\alpha_{s-1}}{z^{s-1}} + \ldots + \dfrac{\alpha_1}{z}$ *et la valeur admissible de la puissance s maximale est s=γ-1=m, soit* $\Omega(z) = \dfrac{\alpha_m}{z^m} + \dfrac{\alpha_{m-1}}{z^{m-1}} + \ldots + \dfrac{\alpha_1}{z}$ *. Pour déterminer les valeurs des paramètres :* $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ *formons l'expression* $(\Omega'(z))^1 + P_1(z)\,(\Omega'(z))^0 = \Omega'(z) + P_1(z) = 0$ *en annulant les m premiers termes de puissance maximale décroissante en 1/z , il vient un système d'équation algébrique (linéaire également et de solution triviale dans ce cas) :*

$$P_1(z) = \frac{a_1}{z^2} + \ldots + (m-1)\frac{a_{m-1}}{z^m} + m\,\frac{a_m}{z^{m+1}} - \left(\varphi_0 + 2\varphi_1 z + 3\,\varphi_2 z^2 + \ldots + (l+1)\,\varphi_l z^l\right) - \frac{\lambda}{z}$$

$$\Rightarrow \frac{a_1}{z^2} + \ldots + (m-1)\frac{a_{m-1}}{z^m} + m\,\frac{a_m}{z^{m+1}} - \left(\frac{\alpha_1}{z^2} + \ldots + (m-1)\frac{\alpha_{m-1}}{z^m} + m\,\frac{\alpha_m}{z^{m+1}}\right) \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = a_1 \\ \ldots \\ \alpha_m = a_m \end{cases}$$

Une fois le terme de forme normale déterminé, il suffit d'injecter ce dernier dans l'équation différentielle sous la forme $y(z) = e^{\Omega(z)} u(z)$ *pour obtenir l'équation différentielle de la fonction u(z) qui se trouve être par évidence :*

$$u'(z) + \widetilde{P}_1(z)\,u(z) = 0 \quad avec \quad \widetilde{P}_1(z) = -\left(\varphi_0 + 2\varphi_1 z + 3\,\varphi_2 z^2 + \ldots + (l+1)\,\varphi_l z^l\right) - \frac{\lambda}{z}$$

Cette fois le point z=0 est devenu régulier et l'équation indicielle est ρ=λ, dans ce cas il suffit de développer la solution de l'équation en u(z) par la méthode de Fröbenius sous la forme du développement : $u(z)=z^{\rho}\sum_{i=0}^{i=+\infty} b_i z^i$ *. Il se trouve que l'injection de cette forme conduit à la récurrence à l termes suivante :* $\begin{cases} b_{-i}=0 \quad \forall i>0 \qquad b_0=1 \\ i\, b_i = \sum_{j=1}^{j=l-1} j\, a_j\, b_{i-j} \quad \forall i \geq 1 \end{cases}$ *. Il se trouve que cette récurrence est exactement celle du développement en série autour de z=0 de la fonction exponentielle :* $e^{\varphi_0 z+\varphi_1 z^2+\varphi_2 z^3+\ldots+\varphi_l z^{l+1}}$ *donc la solution de l'équation en u(z) est alors :* $u(z)=z^{\rho}\times e^{\varphi_0 z+\varphi_1 z^2+\varphi_2 z^3+\ldots+\varphi_l z^{l+1}}$

On retrouve bien la solution de l'équation différentielle du premier degré par intégration directe.

<u>Détermination de la forme normale des solutions d'une équation différentielle du n-ième degré au point singulier irrégulier z=∞</u>

Soit donc l'équation différentielle du n-ième degré :

$$\begin{cases} y^{(n)}(z)+P_1(z)\,y^{(n-1)}(z)+\ldots+P_{n-1}(z)\,y^{(1)}(z)+P_n(z)\,y(z)=0 \\ P_l(z)=z^{K_l}\left(a_{l,0}+\dfrac{a_{l,1}}{z}+\dfrac{a_{l,2}}{z^2}+\ldots\right) \end{cases}$$

La notion de forme normale a pour la première fois été introduite dans les travaux du mathématicien allemand L.W. Thomé dans le journal de Mathématique : « Journal für die reine und angewandte Mathematik » entre 1872 et 1884. Dans ces travaux L.W. Thomé y émet l'hypothèse de l'existence de solutions de cette équation différentielle sous la forme : $y(z)=e^{\Omega(z)}u(z)$ *avec le terme exponentiel de la forme :* $e^{\Omega(z)} \to \Omega(z)=\alpha_1 z+\alpha_2 z^2+\ldots+\alpha_s z^s$ *. Pour la fonction u(z) le point z=∞ n'est plus irrégulier et dans ce cas il est possible de développer des solutions de Fröbenius. Toutefois ces solutions de Fröbenius ont le mauvais goût de ne pas converger en général sur l'axe des réels, sauf si le développement est finie évidemment.*

Ces solutions sont parfois appelée solutions de Thomé ou plus communément forme normale pour un point singulier irrégulier (ici z=∞). Plusieurs questions se posent alors :
- les solutions de forme normale existe-t-elle pour une équation différentielle donnée ?
- comment choisir la puissance s adéquate pour la construction de ces solutions ?
- hormis le cas d'un développement fini de la fonction u(z) dans $y(z)=e^{\Omega(z)}u(z)$*, existe-t-il des secteurs du plan complexe dans lequel le développement de Fröbenius de u(z) converge ? Ce problème est en relation directe avec ce que l'on appelle les « lignes de Stockes ». Ce dernier problème est de nos jours toujours aussi complexe, car il implique de caractériser les lignes de Stockes bornant zone de convergence dans le plan complexe, puis d'effectuer un prolongement analytique notamment sur l'axe des réels sous la forme d'une formule de connexion qui met en jeu des multiplicateurs de Stockes.*

Dans son ouvrage « Ordinary Differential Equation » E.L.Ince décrit assez bien le mode opératoire pour construire ces solutions. Depuis les années 1950, il existe une méthode matricielle qui permet également la construction de ces solutions. Ici je me contente de décrire l'algorithme de construction de ces solutions tel que je l'ai compris à la lecture de l'exposé d'E.L.Ince.

<u>Pour répondre tout d'abord à la première question</u> : les solutions de forme normale existe-t-elle pour l'équation différentielle ? Une première réponse à ce problème consiste à calculer le rang de l'équation différentielle comme décrit précédemment :

$$g = Max\left(\frac{K_l}{l} \quad l \in \{1,\ldots,n\}\right) \qquad Rang \quad h = g+1$$

Si g est un entier et qu'il est strictement négatif alors il n'existe pas de solutions sous forme normale. Après tout c'est logique car le point singulier z=∞ est un point régulier ou n'est pas singulier. E.L.Ince montre plus précisément que si g>-1 alors le point z=∞ est point irrégulier, a contrario si g<=-1 alors le point z=∞ est un point régulier ou n'est pas singulier.

Si maintenant g est négatif et plus précisément si -1<g<0, soit si le rang est 0<rang<1, il se peut que g soit un nombre rationnel négatif et le rang un nombre rationnel strictement positif et strictement inférieur à 1. Par exemple pour l'équation du second degré : $y^{(2)}(z)+\frac{1}{z}y^{(1)}(z)+\frac{1}{z}y(z)=0$,

le rang de l'équation est calculé ainsi :

$$K_1=-1 \qquad K_2=-1 \Rightarrow g = Max\left(\left\{-1,-\frac{1}{2}\right\}\right) \Rightarrow g=-\frac{1}{2} \quad Rang \quad h=\frac{1}{2}$$

Alors il n'existe pas de solution de forme normale, par contre il existe des solutions dîtes de forme <u>« subnormale »</u> lorsque le rang est un nombre rationnel positif.

Pour la suite et temporairement on suppose que <u>s est de valeur entière</u>.

Ce n'est pas sans raison que l'on calcule le rang ou la valeur g au point irrégulier z=∞. Il faut pour cela revenir à la forme normale proposée, à savoir : $y(z)=e^{\Omega(z)}u(z) \quad avec \quad \Omega(z)=\alpha_1 z+\alpha_2 z^2+\ldots+\alpha_s z^s$ *et définir <u>les valeurs s entières admissibles</u> de telle manière que l'existence d'une solution régulière de la fonction u(z) soit possible. Substituons la forme proposée dans l'équation différentielle de départ. Il vient le schéma de récurrence suivant :*

$$\left(e^{\Omega(z)}\right)^{(0)}=e^{\Omega(z)} \quad \left(e^{\Omega(z)}\right)^{(1)}=\Omega'(z)e^{\Omega(z)} \Rightarrow \left(e^{\Omega(z)}\right)^{(l)}=t_l(z)e^{\Omega(z)} \quad t_0(z)=1 \quad t_1(z)=\Omega'(z) \to t_l(z)=\left(t_{l-1}(z)\right)'+t_{l-1}(z)\Omega'(z) \quad pour\ l\geq 1$$

$$\Omega(z)=\alpha_1 z+\alpha_2 z^2+\ldots+\alpha_s z^s \to \Omega(z)\propto z^s \quad t_1(z)\propto z^{s-1} \quad t_2(z)\propto z^{2(s-1)} \quad \ldots \quad t_l(z)\propto z^{l(s-1)} \qquad P_l(z)\propto z^{K_l}$$

$$y^{(n)}(z)+P_1(z)y^{(n-1)}(z)+\ldots+P_{n-1}(z)y^{(1)}(z)+P_n(z)y(z)=0 \Leftrightarrow u^{(n)}(z)+Q_1(z)u^{(n-1)}(z)+\ldots+Q_{n-1}(z)u^{(1)}(z)+Q_n(z)u(z)=0$$

$$Avec \quad \begin{cases} Q_0(z)=1 \\ Q_1(z)=P_1(z)+n\,t_1(z) \\ \ldots \\ Q_l(z)=P_l(z)+(n-l+1)t_1(z)P_{l-1}(z)+C_2^{n-l+2}t_2(z)P_{l-2}(z)+\ldots+C_i^{n-l+i}t_i(z)P_{l-i}(z)+\ldots+C_{l-1}^{n}t_{l-1}(z)P_1(z)+C_l^n t_l(z) \\ \ldots \\ Q_n(z)=P_n(z)+t_1(z)P_{n-1}(z)+t_2(z)P_{l-2}(z)+\ldots+t_i(z)P_{l-i}(z)+\ldots+t_{n-1}(z)P_1(z)+t_n(z) \end{cases} \qquad C_l^n=\frac{n!}{l!(n-l)!}$$

Pour que u(z) possède au moins une solution régulière, il est nécessaire que z=∞ ne soit pas une singularité essentielle ou encore que la classe de l'équation ne soit pas égale à n, soit encore que la multiplicité $\widetilde{K}_n + n \to Q_n(z) = z^{\widetilde{K}_n}\left(a_{n,0} + \frac{a_{n,1}}{z} + \ldots\right) \quad a_{n,0} \neq 0$ *soit la plus importante de toutes les multiplicités des autres coefficients* $\widetilde{K}_l + l < \widetilde{K}_n + n \quad \forall l \leq n-1 \quad avec \quad Q_l(z) = z^{\widetilde{K}_l}\left(a_0 + \frac{a_1}{z} + \ldots\right)$. *Sans cela l'équation indicielle se réduit au seul terme* $a_{n,0}=0$ *qui n'a pas de solution puisque ce coefficient est non nul.*

Dans l'expression suivante du terme $Q_l(z)$ *les puissances de z qui se rencontrent dans l'ordre :*

$$Q_l(z) = P_l(z) + (n-l+1)\,t_1(z)P_{l-1}(z) + C_2^{n-l+2}t_2(z)P_{l-2}(z) + \ldots + C_i^{n-l+i}t_i(z)P_{l-i}(z) + \ldots + C_{l-1}^{n}t_{l-1}(z)P_1(z) + C_l^{n}t_l(z)$$

Sont : $\{K_l, K_{l-1}+(s-1), \ldots, K_{l-i}+i(s-1), \ldots, K_1+(l-1)(s-1), l(s-1)\}$. *Par conséquent dans le terme* $Q_{l-1}(z)$ *les puissance dans l'ordre sont :* $\{K_{l-1}, K_{l-2}+(s-1), \ldots, K_{l-i}+i(s-1), \ldots, K_1+(l-2)(s-1), (l-1)(s-1)\}$. *Donc en théorie le maximum des puissances de z de* $Q_l(z)$ *excède systématiquement celui de* $Q_{l-1}(z)$ *au moins de la valeur (s-1) :*

$$\begin{aligned}
&M_{l-1} = \widetilde{K}_{l-1} = Max\{K_{l-1}, K_{l-2}+(s-1), \ldots, K_{l-i}+i(s-1), \ldots, K_1+(l-2)(s-1), (l-1)(s-1)\}\\
&M_l = \widetilde{K}_l = Max\{K_l, K_{l-1}+(s-1), \ldots, K_{l-i}+i(s-1), \ldots, K_1+(l-1)(s-1), l(s-1)\} = Max\{K_l, M_{l-1}+s-1\}\\
&\Rightarrow \begin{cases} Si \quad K_l \geq M_{l-1}+s-1 \Rightarrow M_l \geq M_{l-1}+s-1 \\ Si \quad K_l < M_{l-1}+s-1 \Rightarrow M_l = M_{l-1}+s-1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Pour les premiers termes : $M_0 = 0 \quad M_1 = Max\{K_1, (s-1)\} = Max\{K_l, M_{l-1}+s-1\} \Rightarrow M_1 \geq s-1$. *Pour le dernier terme on a :* $M_n = \widetilde{K}_n = Max\{K_n, K_{n-1}+(s-1), \ldots\ldots, K_1+(n-1)(s-1), n(s-1)\} \geq M_{n-1}+s-1$. *Donc en théorie le terme dominant en z de* $Q_n(z)$ *sera le terme de plus grande puissance de tous les autres termes* $Q_l(z)$. *Cette situation conduit donc à ce que z=∞ soit une singularité essentielle (l'équation indicielle n'a pas de solution) ce qui n'est pas le but recherché, sauf à ce que le terme dominant en z de* $Q_n(z)$ *soit au moins d'une puissance inférieure d'une unité au terme dominant en z de* $Q_{n-1}(z)$. *En d'autre terme il suffit que :* $\widetilde{K}_n = \widetilde{K}_{n-1} - 1 \to \widetilde{K}_n + n = \widetilde{K}_{n-1} + n - 1$ *pour que par exemple la classe r de l'équation passe de r=n à r=n-1 et qu'il existe au moins une solution régulière. Précédemment il a été établi que :* $M_l \geq M_{l-1}+s-1 \quad \forall l \in \{1,n\}$, *si l'on applique cela en chaîne, il vient :*

$$M_n \geq M_{n-1}+s-1 \geq M_{n-2}+2(s-1) \geq \ldots \geq M_1+(n-1)(s-1) \geq n(s-1)$$

Pour que la puissance dominante en z de $Q_n(z)$ *soit au moins inférieure d'une unité à celle de* $Q_{n-1}(z)$, *il suffit que dans la liste* $\{K_n, K_{n-1}+(s-1), \ldots\ldots, K_1+(n-1)(s-1), n(s-1)\}$ *chaque élément de liste n'est pas supérieure à la liste complémentaire à cette valeur :*

$$\begin{aligned}
&V_n = \{K_n, K_{n-1}+(s-1), \ldots\ldots, K_1+(n-1)(s-1), n(s-1)\}\\
&\forall v \in V_n \quad v \leq Max(V_n - \{v\})
\end{aligned}$$

Cette assertion est équivalente à considérer que parmi les éléments de la liste au moins deux éléments ont la même valeur maximale (le complémentaire contient toujours une valeur maximale : $\begin{aligned}&V_n = \{K_n, K_{n-1}+(s-1), \ldots\ldots, K_1+(n-1)(s-1), n(s-1)\}\\ &\exists\, v_1, v_2 \in V_n \quad tq \quad v_1 = v_2 = Max(V_n)\end{aligned}$.

Cette assertion est également vraie pour la liste constituée des valeurs diminuées de n(s-1).

$$\widetilde{V}_n = \{v - n(s-1), v \in V_n\} = \{K_n - n(s-1), K_{n-1} + (n-1)(s-1), \ldots\ldots, K_1 + (s-1), 0\}$$
$$\exists\, v_1, v_2 \in V_n \quad tq \quad v_1 = v_2 = Max(\widetilde{V}_n) = Max(\{K_l - l(s-1), l \in \{0,\ldots,l\}\}) \quad K_0 = 0$$

Comme 0 est un élément de la liste on en déduit qu'il existe au moins un indice tel que :

$$\exists\, l_1 \in \{1,\ldots,n\} \quad tq \quad K_{l_1} \geq l_1(s-1) \Rightarrow \frac{K_{l_1}}{l_1} \geq s-1$$

Si nous calculons g comme défini plus haut : $g = Max\left(\frac{K_l}{l} \quad l \in \{1,\ldots,n\}\right)$*, alors nous avons :* $g \geq \frac{K_{l_1}}{l_1} \geq s-1$ *donc* $g \geq s-1$*. Or la solution est censée être de forme normale, soit donc que par hypothèse s>0. Il vient* $g > -1 \Leftrightarrow g \geq 0$*. Cela confirme un résultat qui peut être obtenu par l'un des critères sur l'irrégularité du point z=∞ :* $\exists\, l_1 \in \{1,\ldots,n\} \quad tq \quad K_{l_1} \geq 1 - l_1 \Rightarrow \frac{K_{l_1}}{l_1} \geq \frac{1}{l_1} - 1 > -1$*. Et par conséquent* $g > -1$*.*

Comme $g \geq 0$ *il suffit qu'une seule des multiplicités* K_l *soit positive pour que la forme normale soit possible.*

<u>Il résulte de cette courte étude que les valeurs admissibles de s sont réduites par l'inégalité :</u> $s \leq g+1$

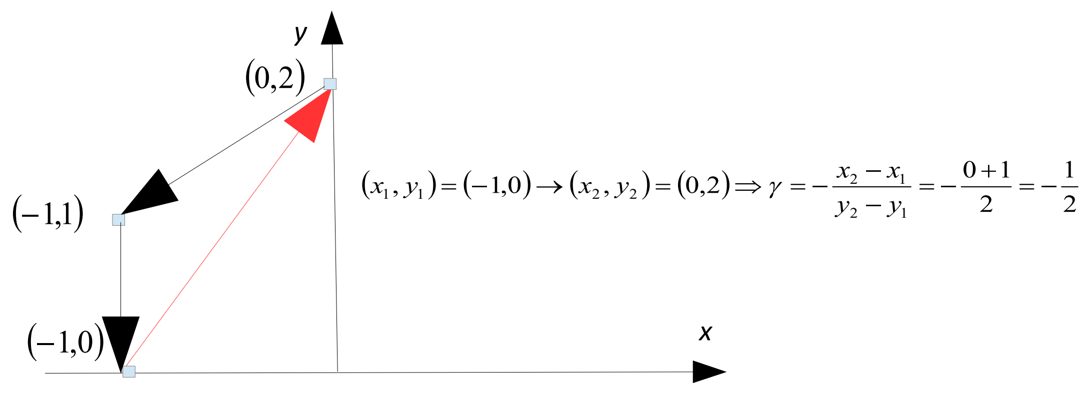
<u>La deuxième question</u> concerne sur la méthode détermination de la valeur entière ou rationnelle de s admissible dans l'expression du facteur exponentiel de la forme normale . C'est là qu'entre en jeu le diagramme de Newton-Puisieux déjà introduit dans le cas de l'équation différentielle du premier degré. Calculons <u>la classe r de l'équation différentielle en ce point</u>, puis reportons dans un diagramme (x,y) la suite des points suivants {(0,r), $(K_1,r-1)$*,* $(K_2,r-2)$*,...* $(K_n,0)$*} et traçons la ligne polygonale reliant ces points et parcourons cette suite <u>dans le sens inverse des aiguilles d'une montre</u>. Puis formons <u>l'enveloppe convexe</u> de ce polygone et <u>enfin son enveloppe convexe supérieure</u>.*

Il faut préciser ce qu'E.L.Ince présente comme l'ensemble des lignes polygonales de l'enveloppe convexe telles qu'aucun point du diagramme de Newton-Puisieux ne soit situé en haut à droite, en direction du quadrant n°1 du plan cartésien (quadrant n°1, x>0, y>0). L'exemple qui suit est paradoxalement un contre exemple puisque dans ce cas aucun point ne doit être situé en bas à droite de la ligne polygonale (quadrant n°4, x>0, y<0). Ce cas particulier est lié à l'existence de forme dîtes subnormale.

Prenons pour exemple l'équation différentielle suivante :

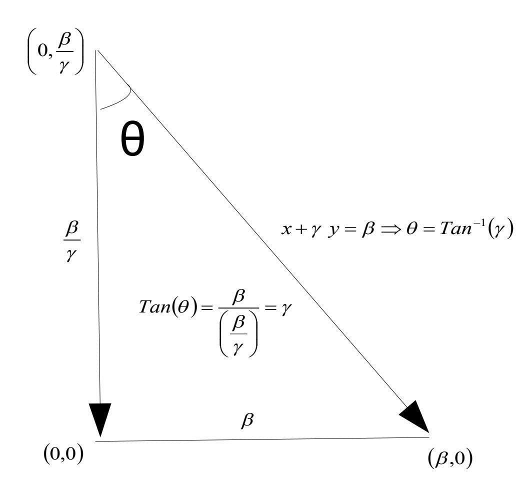
$$z\ y''(z)+2\ y'(z)-\left(\frac{1}{4}+\frac{5}{16\ z}\right)y(z)=0\Rightarrow K_1=-1\quad K_2=-1\rightarrow g=-\frac{1}{2}$$

La classe r de cette équation est r=2. Les trois points sont {(0,2),(-1,1),(-1,0)}. Le diagramme se présente comme suit :



Le calcul de la pente γ correspond à considérer l'équation implicite d'une droite de la forme :

$$x+\gamma\ y=\beta\quad \beta:intercepte\quad \gamma:pente\quad droite\ passant\ par\quad (x_1,y_1),(x_2,y_2)\Rightarrow\gamma=-\frac{x_2-x_1}{y_2-y_1}\quad \beta=\frac{y_2x_1-x_2y_1}{y_2-y_1}$$

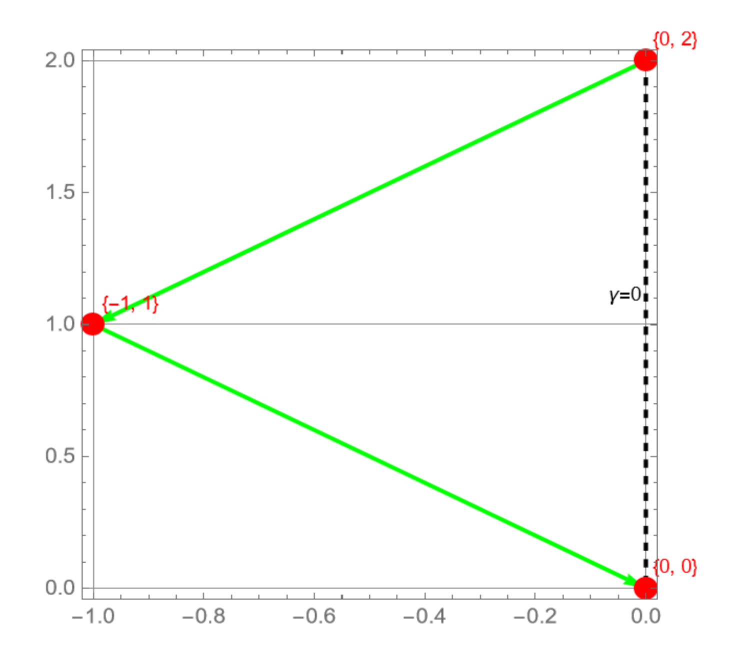


Nota.Bene : si l'enveloppe convexe supérieure comporte des lignes polygonales parallèle à l'axe des abscisses, soit si pour un couple de points : $y_2=y_1$ *alors la pente γ est infinie. <u>Ainsi de l'enveloppe convexe supérieure doit être systématiquement retirés les points extrémaux si ces derniers sont situés sur un segment parallèle à l'axe des abscisses</u>.*

Intermède mathématique : comment revenir à des puissances entières

Ici pour l'équation différentielle $z\,y''(z)+2\,y'(z)-\left(\frac{1}{4}+\frac{5}{16\,z}\right)y(z)=0$*, s=1/2. Comme s est un rationnel il convient d'effectuer le changement de variable* $\zeta=\sqrt{z}$*. Par ce changement de variable l'équation différentielle devient :* $y''(\zeta)+\frac{3}{\zeta}\,y'(\zeta)-\left(1+\frac{5}{4\,\zeta}\right)y(\zeta)=0$*. A ce stade tout se passe maintenant comme si nous étudions une nouvelle équation différentielle de point irrégulier z=∞.*

Le diagramme de Newton-Puisieux pour cette équation est le suivant :



Au passage on retrouve le cas plus général où la ligne polygonale est l'enveloppe convexe dont aucun point ne sont situés au delà de la ligne dans la direction des quadrant 1 et 4 (à droite).

Plus généralement si s est une fraction irréductible, qu'il en résulte donc que s est multiple de la 1/p où p est un entier, alors il suffit de réaliser le changement de variable : $\zeta=\sqrt[p]{z}=z^{\frac{1}{p}}$*. Cela entraîne une nouvelle équation différentielle dont le point z=∞ est toujours un point singulier irrégulier de même classe mais de rang entier. Le tracé du diagramme de Newton/Puisieux confirme que la pente γ prend maintenant une valeur entière. Et l'on revient à la construction d'une solution de forme normale*

Fin de l'intermède mathématique

Dans ces conditions il est toujours possible d'en revenir à des valeurs de γ et donc de s, et toutes les multiplicités K_l/l *en valeurs strictement entières.*

Pour toutes les sections de segment autre de l'enveloppe convexe supérieure est calculée la « pente » γ et les valeurs admissibles de la puissance s du terme exponentielle sont s= γ+1.

Prenons deux points d'un des segments de l'enveloppe convexe supérieure dont les indices dans la liste sont dans l'ordre de la suite des points {(0,r), (K_1,r-1), (K_2,r-2),... (K_r,0)} : $l_1 < l_2$:

$$\left(x_1 = K_{l_1}, y_1 = n - l_1\right), \left(x_2 = K_{l_2}, y_2 = n - l_2\right) \Rightarrow \gamma = s - 1 = \frac{K_{l_2} - K_{l_1}}{l_2 - l_1}$$

$$K_{l_2} = K_{l_1} + (s-1)(l_2 - l_1) \quad Posons \quad \frac{K_{l_1}}{l_1} = s_1 \quad \frac{K_{l_2}}{l_2} = s_2 \Rightarrow l_2(s_2 + 1 - s) = l_1(s_1 + 1 - s)$$

On pourrait penser que s_1=s_2=s-1 est une solution admissible en général, mais ceci ne peut être vrai que si le segment correspond à la plus forte pente s=g+1. Car si c'était vrai pour d'autres segments du diagramme de Newton-Puisieux alors on aurait de bout en bout de l'enveloppe convexe supérieure $\frac{K_l}{l} = s - 1 = g$, ce qui ne peut être le cas puisque certaines pentes sont inférieures à g. Par contre il est clair que pour le segment de pente maximale, les deux points sont ceux pour lesquels advient : $\frac{K_{l_1}}{l_1} = \frac{K_{l_2}}{l_2} = g$.

Pour la valeur admissible entière s=γ+1 la plus haute possible, soit s=g+1, de terme exponentiel : $\Omega(z) = \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \ldots + \alpha_s z^s$ calculons les deux positions d'indice minimale et maximale pour lesquelles $\frac{K_l}{l} = g$:

$$g = Max\left(\frac{K_l}{l} \quad l \in \{1,\ldots,n\}\right) \rightarrow r = Max\left(l \quad tel\ que \quad \frac{K_l}{l} = g\right) \qquad m = Min\left(l \quad tel\ que \quad \frac{K_l}{l} = g\right)$$

On sait que l'indice maximum est justement la classe r de l'équation différentielle. m est donc un nouvel indice à déterminer. Et formons l'expression suivante $(\Omega'(z))^n + \sum_{l=m}^{l=r} P_l(z) \times (\Omega'(z))^{n-l}$ pour le calcul des coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{s-1}, \alpha_s$. Pour déterminer les coefficients du terme exponentiel $\Omega(z) = \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \ldots + \alpha_s z^s$ il suffit d'annuler les s premiers termes en puissance décroissante de z de l'expression $(\Omega'(z))^n + \sum_{l=m}^{l=r} P_l(z) \times (\Omega'(z))^{n-l}$. Pour le coefficient α_s il est même possible de donner la forme analytique de l'équation algébrique qui en résulte. A cette fin, prenons l'expression modifiée du terme exponentielle sous la forme : $\Omega(z) = \alpha_1 z + \frac{\alpha_2}{2} z^2 + \frac{\alpha_3}{3} z^2 + \ldots + \frac{\alpha_s}{s} z^s$. Puisque $P_l(z) = z^{K_l}\left(a_{l,0} + \frac{a_{l,1}}{z} + \frac{a_{l,2}}{z^2} + \ldots\right)$, il est possible de calculer explicitement le terme de puissance maximale en z.

$$\Omega'(z) = \alpha_1 + \alpha_2 z + \ldots + \alpha_s z^{s-1} \rightarrow (\Omega'(z))^n + \sum_{l=m}^{l=r} P_l(z) \times (\Omega'(z))^{n-l} = (\Omega'(z))^n + P_m(z) \times (\Omega'(z))^{n-m} + P_{m+1}(z) \times (\Omega'(z))^{n-m-1} + \ldots + P_r(z) \times (\Omega'(z))^{n-r}$$

$$\Rightarrow (\alpha_s)^n z^{n(s-1)} + (\alpha_s)^{n-m} z^{K_m + (n-m)(s-1)} a_{m,0} + (\alpha_s)^{n-m-1} z^{K_{m+1} + (n-m-1)(s-1)} a_{m+1,0} + \ldots + (\alpha_s)^{n-r+1} z^{K_{r-1} + (n-r+1)(s-1)} a_{r,0} + (\alpha_s)^{n-r} z^{K_r + (n-r)(s-1)} a_{r,0} = 0$$

$$Or \quad \frac{K_m}{m} = \frac{K_r}{r} = g = s - 1 \Rightarrow K_m + (n-m)(s-1) = K_r + (n-r)(s-1) = n(s-1) \quad \forall l \quad \frac{K_l}{l} \leq g \Rightarrow K_l + (n-l)(s-1) \leq n(s-1)$$

$$\Rightarrow (\alpha_s)^n + (\alpha_s)^{n-m} a_{m,0} + (\alpha_s)^{n-m-1} a_{m+1,0} + \ldots + (\alpha_s)^{n-r+1} a_{r-1,0} + (\alpha_s)^{n-r} a_{r,0} = 0$$

$$\Rightarrow (\alpha_s)^{n-r} \neq 0 \rightarrow (\alpha_s)^r + a_{m,0}(\alpha_s)^{r-m} + a_{m+1,0}(\alpha_s)^{r-m-1} + \cdots + a_{r-1,0}(\alpha_s)^1 + a_{r,0}(\alpha_s)^0 = 0 \Leftrightarrow (\alpha_s)^r + a_{m,0}(\alpha_s)^{r-m} + a_{m+1,0}(\alpha_s)^{r-m-1} + \cdots + a_{r-1,0}\alpha_s + a_{r,0} = 0$$

L'équation algébrique pour la détermination de α_s est une équation polynomiale de degré r correspondant à r valeurs possibles, soit r solutions de forme normale possibles.

Il n'est pas aussi facile de déterminer tous les autres coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{s-1}$ du terme exponentielle. Pour ma part j'utilise Mathematica pour réaliser ce travail, à partir d'un développement de l'expression $(\Omega'(z))^n + \sum_{l=m}^{l=r} P_l(z) \times (\Omega'(z))^{n-l}$ autour de z=∞, à l'ordre 0. Ce développement ne donne que l'expression en terme de puissances positives de z. Il suffit d'identifier rapidement les s premières puissances maximales de z en ordre décroissant et d'annuler les coefficients de ces puissances pour obtenir un système de s équations algébriques de degré r à s inconnus.

Le terme exponentiel de la forme normale étant déterminé, le reste du travail est purement calculatoire. Par le changement de fonction $y(z) = e^{\Omega(z)} u(z) \quad \Omega(z) = \alpha_1 z + \frac{\alpha_2}{2} z^2 + \frac{\alpha_3}{3} z^2 + \ldots + \frac{\alpha_s}{s} z^s$, l'équation différentielle se transforme en une équation différentielle de la fonction u(z) :

$$\begin{cases} u^{(n)}(z) + Q_1(z) u^{(n-1)}(z) + \ldots + Q_{n-1}(z) u^{(1)}(z) + Q_n(z) u(z) = 0 \\ u(z) = z^{\rho} \sum_{l=0}^{l=\infty} c_l z^{-l} \end{cases}$$

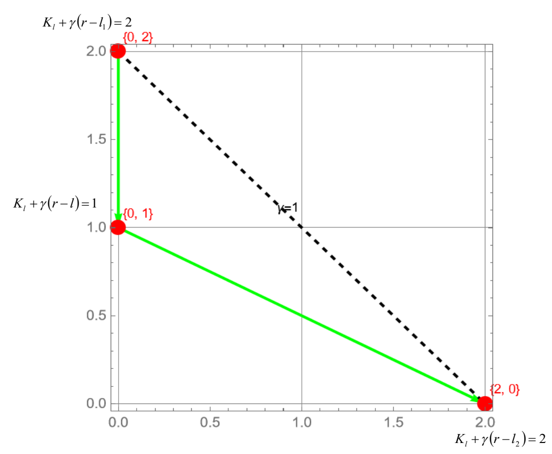
dont on recherche une solution de Fröbenius par le procédé classique exposé précédemment dans ce document, soit en résumé la détermination de la valeur de l'exposant ρ par l'équation indicielle et la détermination de la récurrence de la solution Fröbenius.

Dernière étape de l'algorithme : les autres valeurs admissible de s

La valeur maximale s=g+1, n'est pas la seule admissible s'il y a d'autres segments à retenir d'après le diagramme de Newton-Puisieux, la valeur de s admissible est plus faible s<g+1. Notons les deux indices extrémaux de ce segment : l_1, l_2. Tous les points situés sur ce segment (en effet il est possible qu'il y en ait plus de deux) satisfont à l'équation implicite de la droite :

$$x + \gamma\, y = \beta \Leftrightarrow K_{l_1} + \gamma\,(r - l_1) = K_{l_2} + \gamma\,(r - l_2) \quad S_{l_1,l_2} = \text{Intervalle des indices entre } l_1 \text{ et } l_2$$

En dehors du segment comme il s'agit de l'enveloppe convexe supérieure pour tous les autres points il vient : $\forall l \quad l \notin S_{l_1,l_2} \quad K_l + \gamma\,(r-l) < K_{l_1} + \gamma\,(r - l_1) = K_{l_2} + \gamma\,(r - l_2)$



Toutefois tous les indices dans l'intervalle ne sont pas tous égaux à la valeur aux extrêmes, sauf s'ils se situent sur le segment du diagramme : $\forall l \quad l \in S_{l_1,l_2} \quad K_l + \gamma\,(r-l) \leq K_{l_1} + \gamma\,(r - l_1) = K_{l_2} + \gamma\,(r - l_2)$. Renommons donc l'ensemble des indices, autres que l_1 et l_2, qui atteignent cette valeur comme :

$$S_{l_1,l_2} = \text{Ensemble des indices entre } l_1 \text{ et } l_2 \text{ tels que } K_{l_i} + \gamma\,(r - l_i) = K_{l_1} + \gamma\,(r - l_1) = K_{l_2} + \gamma\,(r - l_2) \text{ autre que } l_1 \text{ et } l_2$$

Alors la détermination du coefficients α_s est obtenue par l'annulation du terme de puissance maximal en z de l'expression : $(\Omega'(z))^n + \sum_{l=l_1}^{l=l_2} P_l(z)\times(\Omega'(z))^{n-l}$ *. La puissance maximale de z est ici égale à n(s-1), et elle n'est atteinte que pour tous les indices entre l_1 et l_2 <u>dont le point correspondant sur le diagramme de Newton-Puisieux est situé sur la droite</u> reliant les points d'indices extrémaux l_1 et l_2 . Aussi dans la sommation ne sont retenus que ces indices. Cela donne l'équation algébrique polynomiale pour α_s :*

$$\Omega(z) = \alpha_1 z + \frac{\alpha_2}{2}z^2 + \frac{\alpha_3}{3}z^2 + \ldots + \frac{\alpha_s}{s}z^s \Rightarrow \Omega'(z) = \alpha_1 + \alpha_2 z + \ldots + \alpha_s z^{s-1} \to (\Omega'(z))^n + \sum_{l=l_1}^{l=l_2} P_l(z)\times(\Omega'(z))^{n-l}$$

$$\Rightarrow (\alpha_s)^n z^{n(s-1)} + (\alpha_s)^{n-l_1} z^{K_{l_1}+(n-l_1)(s-1)} a_{l_1,0} + \sum_{l_i \in S_{l_1,l_2}} (\alpha_s)^{n-l_i} z^{K_{l_i}+(n-l_i-1)(s-1)} a_{l_i,0} + (\alpha_s)^{n-l_2} z^{K_{l_2}+(n-l_2)(s-1)} a_{l_2,0} = 0$$

$$Or \quad \forall l_i \in S_{l_1,l_2} \to \frac{K_{l_i}}{l_i} = \frac{K_{l_1}}{l_1} = \frac{K_{l_2}}{l_2} = s-1 \Rightarrow K_{l_1} + (n-l_1)(s-1) = K_{l_i} + (n-l_i)(s-1) = K_{l_2} + (n-l_2)(s-1) = n\,(s-1)$$

$$\Rightarrow (\alpha_s)^n + (\alpha_s)^{n-l_1} a_{l_1,0} + \sum_{l_i \in S_{l_1,l_2}} (\alpha_s)^{n-l_i} a_{l_i,0} + (\alpha_s)^{n-l_2} a_{l_2,0} = 0 \Rightarrow (\alpha_s)^{l_2} + (\alpha_s)^{l_2-l_1} a_{l_1,0} + \sum_{l_i \in S_{l_1,l_2}} (\alpha_s)^{l_2-l_i} a_{l_i,0} + a_{l_2,0} = 0$$

Avec Mathematica, on peut facilement déterminer les autres coefficients du terme exponentiel en développant l'expression $(\Omega'(z))^n + \sum_{l=l_1}^{l=l_2} P_l(z)\times(\Omega'(z))^{n-l}$ *autour de z=∞, à l'ordre 0 et en ne retenant que les s premiers termes en puissance maximale de z par ordre décroissant et en les annulant successivement. La première équation algébrique est celle décrite plus haut pour la détermination du coefficients α_s*

<u>Conclusion sur la construction des formes normales autour de z=∞</u>

Cet algorithme de construction systématique des solutions de forme normale se trouve être effectif comme j'essaierais de l'illustrer dans ce document par de nombreux exemples.

L'algorithme pour le point singulier irrégulier x=0 est tout à fait similaire. C'est d'ailleurs ce que je me propose maintenant de vous présenter.

<u>Détermination de la forme normale des solutions d'une équation différentielle du n-ième degré au point singulier irrégulier z=0</u>

Soit donc l'équation différentielle du n-ième degré :

$$\begin{cases} y^{(n)}(z)+P_1(z)\,y^{(n-1)}(z)+...+P_{n-1}(z)\,y^{(1)}(z)+P_n(z)\,y(z)=0 \\ P_l(z)=z^{-\widetilde{w}_l}\left(a_{l,0}+a_{l,1}z+a_{l,2}z^2+...\right) \quad \widetilde{w}_l \quad \textit{multiplicité du pôle en } z=0 \end{cases}$$

La notion de forme normale pour le point singulier irrégulier z=0 selon L.W. Thomé consiste à supposer l'existence de solutions de cette équation différentielle sous la forme : $y(z)=e^{\Omega(z)}u(z)$ *avec le terme exponentiel de la forme :* $e^{\Omega(z)} \rightarrow \Omega(z)=\frac{\alpha_1}{z}+\frac{\alpha_2}{z^2}+...+\frac{\alpha_s}{z^s}$. *Pour la fonction u(z) le point z=0 n'est plus irrégulier et dans ce cas il est possible de développer des solutions de Fröbenius. Toutefois ces solutions de Fröbenius ont le mauvais goût de ne pas converger en général sur l'axe des réels, sauf si le développement est fini évidemment.*

Comme pour z=∞, plusieurs questions se posent alors :
- les solutions de forme normale existe-t-elle pour une équation différentielle donnée ?
- comment choisir la puissance s adéquate pour la construction de ces solutions ?
- hormis le cas d'un développement fini de la fonction u(z) dans $y(z)=e^{\Omega(z)}u(z)$, *existe-t-il des secteurs du plan complexe dans lequel le développement de Fröbenius de u(z) converge ?*

Dans son ouvrage « Ordinary Differential Equation » E.L.Ince ne décrit pas directement la construction de la forme normale pour z=0 mais plutôt pour z=∞. Aussi en recherchant j'ai trouvé cette construction décrite comme l'originale de L.W. Thomé dans l'ouvrage de A.R.Forsyth « Vol 4 Theory Of Differential Equations » notamment au « Chapter VII, Normal integrals , Subnormal integrals ».

<u>La réponse à la première question</u> : les solutions de forme normale existe-t-elle pour l'équation différentielle ? Une première réponse à ce problème consiste à calculer le rang de l'équation différentielle en z=0 :

$$g=Max\left(\frac{\widetilde{w}_l}{l} \quad l\in\{1,...,n\}\right) \qquad Rang \quad h=g-1$$

Si g est un entier et qu'il est strictement inférieur à 2 alors il n'existe pas de solutions sous forme normale. C'est logique car le point singulier z=0 est soit un point régulier ou n'est pas singulier. A.R.Forsyth montre plus précisément que si g>=2 alors le point z=0 est un point irrégulier, a contrario si g<2 (soit g<=1 si g est entier) alors le point z=0 est un point régulier ou n'est pas singulier. Si maintenant g n'est pas un entier et plus précisément si 1<g<2, soit si le rang est 0<Rang<1, il se peut que g soit un nombre rationnel et le rang un nombre rationnel strictement positif et strictement inférieur à 1. Par exemple pour l'équation du second degré le rang de l'équation est calculé comme ½ :

$$\begin{aligned} & y^{(2)}(z)+\frac{p(z)}{z}\,y^{(1)}(z)+\frac{q(z)}{z^3}\,y(z)=0 \quad p(z),q(z)\,\textit{holomorphe et } p(0)\neq 0,q(0)\neq 0 \\ & \Rightarrow g=Max\left(1,\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}\Rightarrow Rang\ h=\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Alors il n'existe pas de solution de forme normale, par contre il existe des solutions dîtes de forme « subnormale » lorsque le rang est un nombre rationnel positif.

Comme pour le point irrégulier z=∞ il y a bien une pour calculer la valeur g au point irrégulier z=0. Revenons à la forme normale proposée, à savoir : $y(z)=e^{\Omega(z)}u(z) \quad avec \quad \Omega(z)=\frac{\alpha_1}{z}+\frac{\alpha_2}{z^2}+\ldots+\frac{\alpha_s}{z^s}$ *et définissons les valeurs s admissibles de telle manière que l'existence d'une solution régulière de la fonction u(z) soit possible. Prenons alors* <u>*s comme une valeur entière*</u> *et substituons la forme proposée dans l'équation différentielle de départ. Il vient le schéma de récurrence suivant :*

$$\left(e^{\Omega(z)}\right)^{(0)}=e^{\Omega(z)} \quad \left(e^{\Omega(z)}\right)^{(1)}=\Omega'(z)e^{\Omega(z)} \Rightarrow \left(e^{\Omega(z)}\right)^{(l)}=t_l(z)e^{\Omega(z)} \quad t_0(z)=1 \quad t_1(z)=\Omega'(z)\rightarrow t_l(z)=\left(t_{l-1}(z)\right)'+t_{l-1}(z)\Omega'(z) \quad pour\ l\geq 1$$

$$\Omega(z)=\frac{\alpha_1}{z}+\frac{\alpha_2}{z^2}+\ldots+\frac{\alpha_s}{z^s}\rightarrow \Omega(z)\propto z^{-s} \quad t_1(z)\propto z^{-(s+1)} \quad t_2(z)\propto z^{-2(s+1)} \quad \ldots \quad t_l(z)\propto z^{-l(s+1)} \qquad P_l(z)\propto z^{-\widetilde{w}_l}$$

$$y^{(n)}(z)+P_1(z)y^{(n-1)}(z)+\ldots+P_{n-1}(z)y^{(1)}(z)+P_n(z)y(z)=0 \Leftrightarrow u^{(n)}(z)+Q_1(z)u^{(n-1)}(z)+\ldots+Q_{n-1}(z)u^{(1)}(z)+Q_n(z)u(z)=0$$

$$Avec \quad \begin{cases} Q_0(z)=1 \\ Q_1(z)=P_1(z)+n\,t_1(z) \\ \ldots \\ Q_l(z)=P_l(z)+(n-l+1)\,t_1(z)P_{l-1}(z)+C_2^{n-l+2}t_2(z)P_{l-2}(z)+\ldots+C_i^{n-l+i}t_i(z)P_{l-i}(z)+\ldots+C_{l-1}^{n}t_{l-1}(z)P_1(z)+C_l^n t_l(z) \\ \ldots \\ Q_n(z)=P_n(z)+t_1(z)P_{n-1}(z)+t_2(z)P_{l-2}(z)+\ldots+t_i(z)P_{l-i}(z)+\ldots+t_{n-1}(z)P_1(z)+t_n(z) \end{cases} \qquad C_l^n=\frac{n!}{l!(n-l)!}$$

Pour que u(z) possède au moins une solution régulière, il est nécessaire que z=0 ne soit pas une singularité essentielle ou encore que la classe de l'équation ne soit pas égale à n, soit encore que la multiplicité $\widetilde{W}_n \rightarrow Q_n(z)=z^{-\widetilde{W}_n}\left(a_{n,0}+a_{n,1}z+\ldots\right) \quad a_{n,0}\neq 0$ *soit la plus importante de toutes les multiplicités des autres coefficients* $\widetilde{W}_l+n-l<\widetilde{W}_n \quad \forall l\leq n-1 \quad avec \quad Q_l(z)=z^{-\widetilde{W}_n}\left(a_{n,0}+a_{n,1}z+\ldots\right) \quad a_{n,0}\neq 0$. *Sans cela l'équation indicielle se réduit au seul terme* $a_{n,0}=0$ *qui n'a pas de solution puisque ce coefficient est non nul.*

Dans l'expression suivante du terme $Q_l(z)$ *les puissances dominantes de 1/z qui se rencontrent dans l'ordre de ces l+1 termes :*

$$Q_l(z)=P_l(z)+(n-l+1)\,t_1(z)P_{l-1}(z)+C_2^{n-l+2}t_2(z)P_{l-2}(z)+\ldots+C_i^{n-l+i}t_i(z)P_{l-i}(z)+\ldots+C_{l-1}^{n}t_{l-1}(z)P_1(z)+C_l^n t_l(z)$$

Sont : $\{\widetilde{w}_l,\widetilde{w}_{l-1}+(s+1),\ldots,\widetilde{w}_{l-i}+i(s+1),\ldots,\widetilde{w}_1+(l-1)(s+1),l(s+1)\}$. *Par conséquent dans le terme* $Q_{l-1}(z)$ *les puissance dans l'ordre des l termes sont :* $\{\widetilde{w}_{l-1},\widetilde{w}_{l-2}+(s+1),\ldots,\widetilde{w}_{l-i}+i(s+1),\ldots,\widetilde{w}_1+(l-2)(s+1),(l-1)(s+1)\}$. *Donc en théorie le maximum des puissances de 1/z de* $Q_l(z)$ *excède systématiquement celui de* $Q_{l-1}(z)$ *au moins de la valeur (s+1) :*

$$\begin{aligned} &M_{l-1}=\widetilde{W}_{l-1}=Max\{\widetilde{w}_{l-1},\widetilde{w}_{l-2}+(s+1),\ldots,\widetilde{w}_{l-i}+i(s+1),\ldots,\widetilde{w}_1+(l-2)(s+1),(l-1)(s+1)\} \\ &M_l=\widetilde{W}_l=Max\{\widetilde{w}_l,\widetilde{w}_{l-1}+(s+1),\ldots,\widetilde{w}_{l-i}+i(s+1),\ldots,\widetilde{w}_1+(l-1)(s+1),l(s+1)\}=Max\{\widetilde{w}_l,M_{l-1}+s+1\} \\ &\Rightarrow \begin{cases} Si \quad \widetilde{w}_l\geq M_{l-1}+s+1\Rightarrow M_l\geq M_{l-1}+s+1 \\ Si \quad \widetilde{w}_l< M_{l-1}+s+1\Rightarrow M_l= M_{l-1}+s+1 \end{cases} \end{aligned}$$

Pour les premiers termes : $M_0=0 \quad M_1=Max\{\widetilde{w}_1,(s+1)\}=Max\{\widetilde{w}_1,M_0+s+1\}\Rightarrow M_1\geq s+1$. *Pour le dernier terme on a :* $M_n=\widetilde{W}_n=Max\{\widetilde{w}_n,\widetilde{w}_{n-1}+(s+1),\ldots\ldots,\widetilde{w}_1+(n-1)(s+1),n(s+1)\}\geq M_{n-1}+s+1$. *Donc en théorie le terme dominant en 1/z de* $Q_n(z)$ *sera le terme de plus grande puissance de tous les autres termes* $Q_l(z)$. *Cette situation conduit donc à ce que z=0 soit une singularité essentielle (l'équation indicielle n'a pas de solution) ce qui n'est pas le but recherché, sauf à ce que le terme dominant en 1/z de* $Q_n(z)$ *soit au moins d'une puissance inférieure d'une unité au terme dominant en 1/z de* $Q_{n-1}(z)$.

En d'autre terme il suffit que : $\widetilde{W}_n = \widetilde{W}_{n-1} - 1 \rightarrow \widetilde{W}_n + n = \widetilde{W}_{n-1} + n - 1$ *pour que par exemple la classe r de l'équation passe de r=n à r=n-1 et qu'il existe au moins une solution régulière. Précédemment il a été établi que :* $M_l \geq M_{l-1} + s + 1 \quad \forall l \in \{1, n\}$*, si l'on applique cela en chaîne, il vient :*

$$M_n \geq M_{n-1} + s + 1 \geq M_{n-2} + 2(s+1) \geq ... \geq M_1 + (n-1)(s+1) \geq n(s+1)$$

Pour que la puissance dominante en 1/z de $Q_n(z)$ *soit au moins inférieure d'une unité à celle de* $Q_{n-1}(z)$*, il suffit que dans la liste* $\{\widetilde{w}_n, \widetilde{w}_{n-1} + (s+1), ..., \widetilde{w}_1 + (n-1)(s+1), n(s+1)\}$ *chaque élément de liste n'est pas supérieure à la liste complémentaire à cette valeur :*

$$V_n = \{\widetilde{w}_n, \widetilde{w}_{n-1} + (s+1), ..., \widetilde{w}_1 + (n-1)(s+1), n(s+1)\}$$
$$\forall v \in V_n \quad v \leq Max(V_n - \{v\})$$

Cette assertion est équivalente à considérer que parmi les éléments de la liste au moins deux éléments ont la même valeur maximale (le complémentaire contient toujours une valeur maximale : $V_n = \{\widetilde{w}_n, \widetilde{w}_{n-1} + (s+1), ..., \widetilde{w}_1 + (n-1)(s+1), n(s+1)\}$ $\exists\, v_1, v_2 \in V_n \quad tq \quad v_1 = v_2 = Max(V_n)$*. Cette assertion est également vraie pour la liste constituée des valeurs diminuées de n(s+1).*

$$\widetilde{V}_n = \{v - n(s+1), v \in V_n\} = \{\widetilde{w}_n - n(s+1), \widetilde{w}_{n-1} + (n-1)(s+1), ..., \widetilde{w}_1 + (s+1), 0\}$$
$$\exists\, v_1, v_2 \in V_n \quad tq \quad v_1 = v_2 = Max(\widetilde{V}_n) = Max(\{\widetilde{w}_l - l(s+1), l \in \{0, ..., l\}\}) \quad K_0 = 0$$

Comme 0 est un élément de la liste on en déduit qu'il existe au moins un indice tel que :

$$\exists\, l_1 \in \{1, ..., n\} \quad tq \quad \widetilde{w}_{l_1} \geq l_1(s+1) \Rightarrow \frac{\widetilde{w}_{l_1}}{l_1} \geq s + 1$$

Si nous calculons g comme défini plus haut : $g = Max\left(\frac{\widetilde{w}_l}{l} \quad l \in \{1, ..., n\}\right)$*, alors nous avons :* $g \geq \frac{\widetilde{w}_{l_1}}{l_1} \geq s + 1$ *donc* $g \geq s + 1$*. Or la solution est censée être de forme normale, soit donc que par hypothèse s>0. Il vient* $g \geq 2$*. Cela confirme un résultat qui peut être obtenu par l'un des critères sur l'irrégularité du point z=0 :* $\exists l \quad \widetilde{w}_l > l \Leftrightarrow \frac{\widetilde{w}_l}{l} > 1$ *et par conséquent* $g > 1$*.*

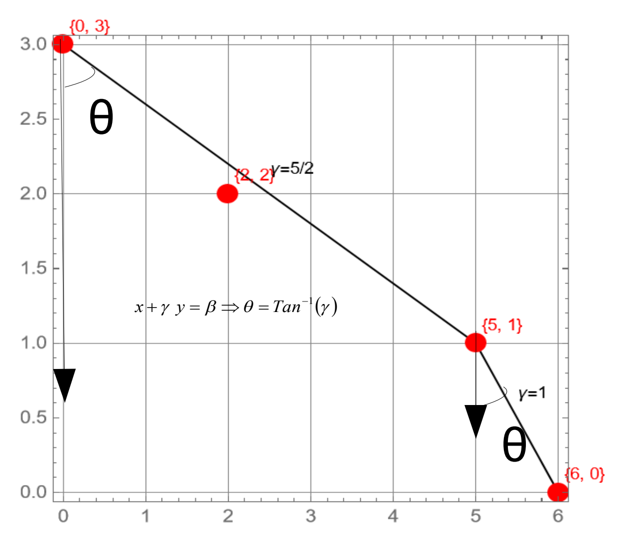
<u>Il résulte de cette courte étude sur l'irrégularité de z=0 que les valeurs admissibles de s sont réduites par l'inégalité :</u> $0 < s \leq g - 1$

La deuxième question porte sur la détermination de la valeur entière ou rationnelle de s admissible dans l'expression du facteur exponentiel de la forme normale. C'est là qu'entre en jeu le diagramme de Newton-Puisieux déjà introduit dans le cas de l'équation différentielle du premier degré. Calculons la classe r de l'équation différentielle en ce point z=0, puis reportons dans un diagramme (x,y) la suite des points suivants {(0,n), ($\widetilde{w}_1$,n-1), (w_2,n-2),... (w_n,0)} et traçons la ligne polygonale reliant ces points et parcourons cette suite dans le sens des aiguilles d'une montre. Puis formons l'enveloppe convexe de ce polygone et enfin son enveloppe convexe supérieure.

Prenons pour exemple l'équation différentielle du troisième degré :

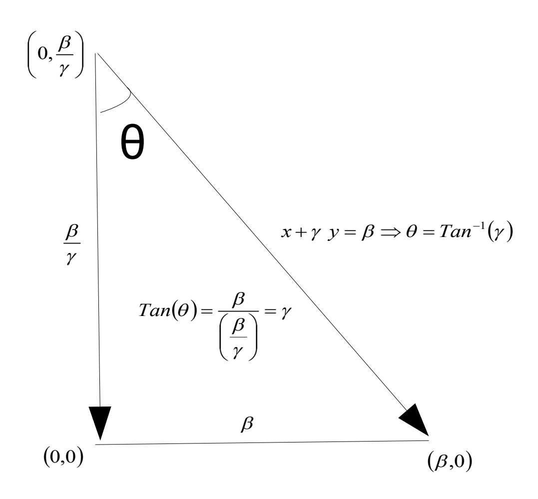
$$y^{(3)}(z)+\frac{\alpha}{z^2}y^{(2)}(z)+\frac{\beta}{z^5}y^{(1)}(z)+\frac{\gamma}{z^6}y(z)=0\Rightarrow \widetilde{w}_1=2 \quad \widetilde{w}_2=5 \quad \widetilde{w}_3=6\rightarrow g=\frac{5}{2}$$

La classe r de cette équation est r=2 (il y a donc 3-2=1, soit une seule solution régulière). Les 4 points sont {(0,3),(2,2),(5,1),(6,0)}. Le diagramme où je ne représente que l'enveloppe convexe supérieure est comme suit :



Le calcul de la pente γ correspond à considérer l'équation d'une droite de la forme :

$$x+\gamma\ y=\beta \quad \beta:intercepte \quad \gamma:pente \quad droite\ passant\ par \quad (x_1,y_1),(x_2,y_2)\Rightarrow\gamma=-\frac{x_2-x_1}{y_2-y_1} \quad \beta=\frac{y_2x_1-x_2y_1}{y_2-y_1}$$



Nota.Bene : si l'enveloppe convexe supérieure comporte des lignes polygonales parallèle à l'axe des abscisses, soit si pour un couple de points : $y_2 = y_1$ *alors la pente γ est infinie. <u>Ainsi de l'enveloppe convexe supérieure doit être systématiquement retirés les points extrémaux si ces derniers sont situés sur un segment parallèle à l'axe des abscisses</u>.*

<u>Pour toutes les sections de segment autre de l'enveloppe convexe supérieure est calculée la « pente » γ et les valeurs admissibles de la puissance s du terme exponentielle sont s= γ-1. La valeur de pente la plus forte est s=g-1 où g est</u> $g = Max\left(\frac{\widetilde{w}_l}{l} \quad l \in \{1,\ldots,n\} \right)$

Intermède mathématique : comment revenir à des puissances entières

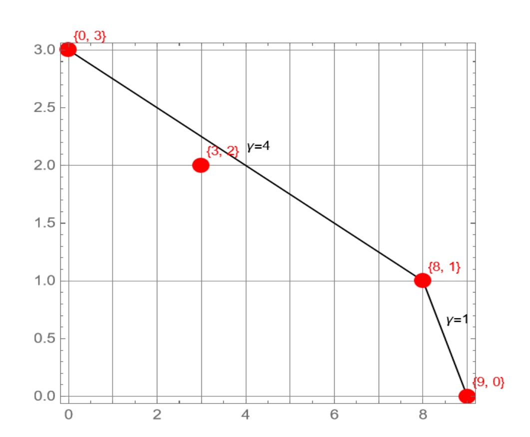
Ici pour l'équation différentielle :

$$y^{(3)}(z) + \frac{\alpha}{z^2} y^{(2)}(z) + \frac{\beta}{z^5} y^{(1)}(z) + \frac{\gamma}{z^6} y(z) = 0 \Rightarrow \widetilde{w}_1 = 2 \quad \widetilde{w}_2 = 5 \quad \widetilde{w}_3 = 6 \rightarrow g = \frac{5}{2}$$

l'exposant s=3/2. Comme s est un rationnel il convient d'effectuer le changement de variable $\zeta = \sqrt{z}$. *Par ce changement de variable l'équation différentielle devient :*

$$y^{(3)}(\zeta) + \frac{2\alpha - 3\zeta^2}{\zeta^2} y^{(2)}(\zeta) + \frac{4\beta - 2\alpha\zeta^4 + 3\zeta^6}{\zeta^8} y^{(1)}(\zeta) + \frac{8\gamma}{\zeta^9} y(\zeta) = 0 \Rightarrow \widetilde{w}_1 = 2 \quad \widetilde{w}_2 = 8 \quad \widetilde{w}_3 = 9 \rightarrow g = 4$$

A ce stade tout se passe maintenant comme si nous étudions une nouvelle équation différentielle de point irrégulier z=0. Le diagramme de Newton-Puisieux pour cette équation est le suivant :



Plus généralement si s est une fraction irréductible, qu'il en résulte donc que s est multiple de la 1/p où p est un entier, alors il suffit de réaliser le changement de variable : $\zeta = \sqrt[p]{z} = z^{\frac{1}{p}}$. *Cela entraîne une nouvelle équation différentielle dont le point z=∞ est toujours un point singulier irrégulier de même classe mais de rang entier. Le tracé du diagramme de Newton/Puisieux confirme que la pente γ prend maintenant une valeur entière. Et l'on revient à la construction d'une solution de forme normale*

Fin de l'intermède mathématique

Pour la valeur admissible maximale s=g-1 entière formons le terme exponentiel : $\Omega(z)=\frac{\alpha_1}{z}+\frac{\alpha_2}{z^2}+...+\frac{\alpha_s}{z^s}$. *Pour l'équation différentielle calculons les deux positions d'indice minimale et maximale pour lesquelles* $\frac{\widetilde{w}_l}{l}=g$ *:*

$$g=Max\left(\frac{\widetilde{w}_l}{l}\quad l\in\{1,...,n\}\right)\rightarrow r=Max\left(l\quad tel\ que\quad \frac{\widetilde{w}_l}{l}=g\right)\qquad m=Min\left(l\quad tel\ que\quad \frac{\widetilde{w}_l}{l}=g\right)$$

On sait que l'indice maximum est justement la classe r de l'équation différentielle. m est donc un nouvel indice à déterminer. Et formons l'expression suivante : $(\Omega'(z))^n+\sum_{l=m}^{l=r}P_l(z)\times(\Omega'(z))^{n-l}$ *pour déterminer la seule valeur de* α_s. *En revanche pour déterminer les autres coefficients* $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{s-1}$ *du terme exponentiel* $\Omega(z)=\frac{\alpha_1}{z}+\frac{\alpha_2}{z^2}+...+\frac{\alpha_s}{z^s}$, *il suffit d'annuler les s-1 premiers termes en puissance décroissante de 1/z dans l'expression* $(\Omega'(z))^n+\sum_{l=1}^{l=n}P_l(z)\times(\Omega'(z))^{n-l}$. *Prenons l'expression modifiée du terme exponentielle sous la forme :* $\Omega(z)=-\left(\frac{\alpha_1}{z}+\frac{1}{2}\frac{\alpha_2}{z^2}+...+\frac{1}{s}\frac{\alpha_s}{z^s}\right)\Rightarrow\Omega'(z)=\frac{\alpha_1}{z^2}+\frac{\alpha_2}{z^3}+...+\frac{\alpha_s}{z^{s+1}}$. *Puisque* $P_l(z)=z^{-\widetilde{w}_l}\left(a_{l,0}+a_{l,1}z+a_{l,2}z^2+...\right)$ *il est possible de calculer explicitement le terme de puissance maximale en 1/z qui permet de calculer l'équation algébrique du coefficient* α_s *uniquement à partir de l'expression* $(\Omega'(z))^n+\sum_{l=m}^{l=r}P_l(z)\times(\Omega'(z))^{n-l}$ *:*

$$\Omega'(z)=\frac{\alpha_1}{z^2}+\frac{\alpha_2}{z^3}+...+\frac{\alpha_s}{z^{s+1}}\rightarrow(\Omega'(z))^n+\sum_{l=m}^{l=r}P_l(z)\times(\Omega'(z))^{n-l}=(\Omega'(z))^n+P_m(z)\times(\Omega'(z))^{n-m}+P_{m+1}(z)\times(\Omega'(z))^{n-m-1}+...+P_r(z)\times(\Omega'(z))^{n-r}$$

$$\Rightarrow(\alpha_s)^n z^{-\widetilde{w}_n n(s+1)}+(\alpha_s)^{n-m}z^{-(\widetilde{w}_m+(n-m)(s+1))}a_{m,0}+(\alpha_s)^{n-m-1}z^{-(\widetilde{w}_{m+1}+(n-m-1)(s+1))}a_{m+1,0}+...+(\alpha_s)^{n-r+1}z^{-(\widetilde{w}_{r-1}+(n-r+1)(s+1))}a_{r,0}+(\alpha_s)^{n-r}z^{-(\widetilde{w}_r+(n-r)(s+1))}a_{r,0}=0$$

$$Or\quad\frac{\widetilde{w}_m}{m}=\frac{\widetilde{w}_r}{r}=g=s+1\Rightarrow\widetilde{w}_m+(n-m)(s+1)=\widetilde{w}_r+(n-r)(s+1)=n(s+1)\quad\forall l\quad\frac{\widetilde{w}_l}{l}\le g\Rightarrow\widetilde{w}_l+(n-l)(s+1)\le n(s+1)$$

$$\Rightarrow(\alpha_s)^n+(\alpha_s)^{n-m}a_{m,0}+(\alpha_s)^{n-m-1}a_{m+1,0}+...+(\alpha_s)^{n-r+1}a_{r-1,0}+(\alpha_s)^{n-r}a_{r,0}=0$$

$$\Rightarrow\alpha_s\ne0\quad(\alpha_s)^r+a_{m,0}(\alpha_s)^{r-m}+a_{m+1,0}(\alpha_s)^{r-m-1}+\cdots+a_{r-1,0}(\alpha_s)^1+a_{r,0}(\alpha_s)^0=0$$

L'équation algébrique pour la détermination de α_s *est équation polynomiale de degré r correspondant à r valeurs possibles, soit r solutions de forme normale possible. Il n'est pas aussi facile de déterminer tous les autres coefficients* $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{s-1}$ *du terme exponentiel. Pour ma part j'utilise Mathematica pour réaliser ce travail, à partir d'un développement de l'expression* $(\Omega'(z))^n+\sum_{l=1}^{l=n}P_l(z)\times(\Omega'(z))^{n-l}$ *autour de z=0, à l'ordre 0. Ce développement ne donne que l'expression en termes de puissance positive de 1/z. Il suffit d'identifier rapidement les s premières puissances maximales de 1/z en ordre décroissant et d'annuler les coefficients de ces puissances pour obtenir un système de s équations algébriques de degré r à s inconnues. Le terme exponentiel de la forme normale étant déterminé, le reste du travail est purement calculatoire. Par le changement de fonction* $y(z)=e^{\Omega(z)}u(z)\quad\Omega(z)=-\left(\frac{\alpha_1}{z}+\frac{1}{2}\frac{\alpha_2}{z^2}+...+\frac{1}{s}\frac{\alpha_s}{z^s}\right)$, *l'équation différentielle se transforme en une équation différentielle de la fonction u(z) :*

$$u(z)=z^\rho\sum_{l=0}^{l=\infty}c_l z^{-l}\qquad u^{(n)}(z)+Q_1(z)u^{(n-1)}(z)+...+Q_{n-1}(z)u^{(1)}(z)+Q_n(z)u(z)=0$$

dont on recherche une solution de Fröbenius par le procédé classique exposé précédemment dans ce document, soit en résumé la détermination de la valeur de l'exposant ρ par l'équation indicielle et la détermination de la récurrence de la solution Fröbenius.

Dernière étape de l'algorithme : les autres valeurs admissible de s

La valeur maximale s=g-1, n'est pas la seule admissible s'il y a d'autres segments à retenir d'après le diagramme de Newton-Puisieux, la valeur de s admissible est plus faible s<g-1. Notons les deux indices extrémaux de ce segment : l_1,l_2. Tous les points situés sur ce segment (en effet il est possible qu'il y en ait plus de deux) satisfont à l'équation implicite de la droite :

$$\begin{cases} x+\gamma\ y=\beta \Leftrightarrow \widetilde{w}_{l_1}+\gamma\left(n-l_1\right)=\widetilde{w}_{l_2}+\gamma\left(n-l_2\right) \\ \gamma=s+1 \end{cases} \qquad S_{l_1,l_2}=\textit{Intervalle des indices entre } l_1 \textit{ et } l_2$$

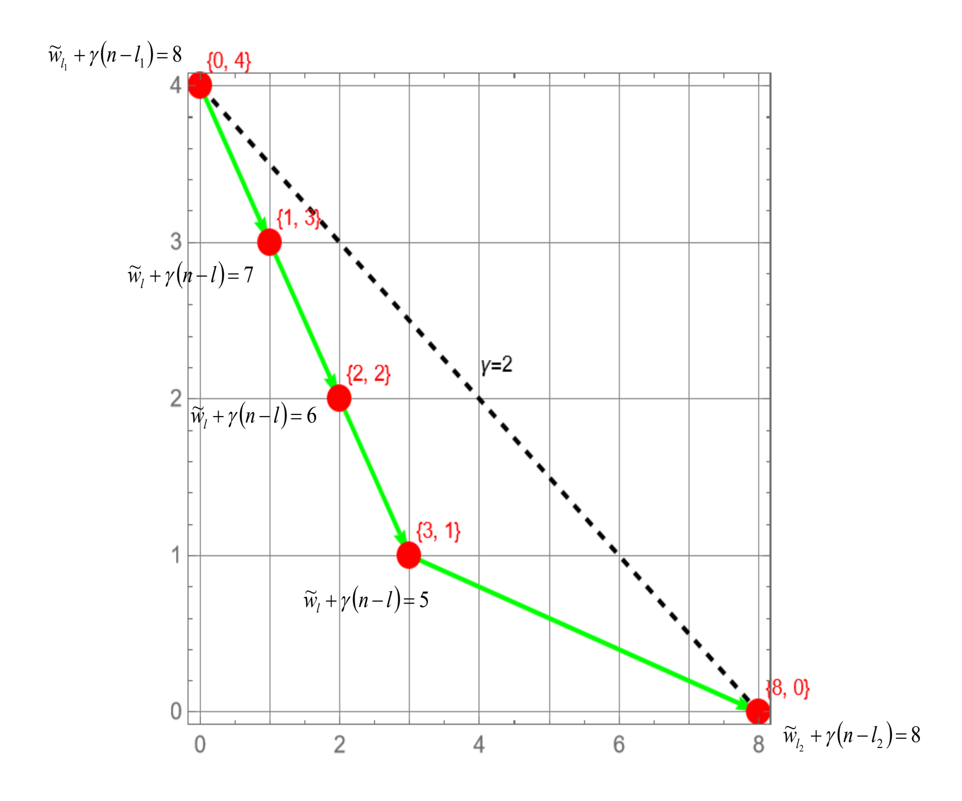
En dehors du segment comme il s'agit de l'enveloppe convexe supérieure tous les autres points :

$$\forall l \quad l\notin S_{l_1,l_2} \quad \widetilde{w}_l+\gamma\left(n-l\right)<\widetilde{w}_{l_1}+\gamma\left(n-l_1\right)=\widetilde{w}_{l_2}+\gamma\left(n-l_2\right)$$

Prenons pour exemple l'équation différentielle du quatrième degré :

$$y^{(4)}(z)+\frac{12}{z}y^{(3)}(z)+\frac{36-2a}{z^2}y^{(2)}(z)-\frac{8\left(a-3\right)}{z^3}y^{(1)}(z)+\frac{a\left(a-b\right)z^4-c^4}{z^8}y(z)=0$$

Le diagramme de Newton-Puisieux se présente comme suit :



Toutefois tous les indices dans l'intervalle ne sont pas tous égaux à la valeur aux extrêmes, sauf s'ils se situent sur le segment du diagramme : $\forall l \quad l\in S_{l_1,l_2} \quad \widetilde{w}_l+\gamma\left(n-l\right)\le\widetilde{w}_{l_1}+\gamma\left(n-l_1\right)=\widetilde{w}_{l_2}+\gamma\left(n-l_2\right)$. *Renommons donc l'ensemble des indices, autres que l_1 et l_2, qui atteignent cette valeur comme :*

$$S_{l_1,l_2}=\textit{Ensemble des indices entre } l_1 \textit{ et } l_2 \left(\textit{autre que } l_1 \textit{ et } l_2\right) \textit{tels que } \widetilde{w}_{l_i}+\gamma\left(n-l_i\right)=\widetilde{w}_{l_1}+\gamma\left(n-l_1\right)=\widetilde{w}_{l_2}+\gamma\left(n-l_2\right)$$

Alors la détermination du coefficients α_s est obtenue par l'annulation du terme de puissance maximal en 1/z de l'expression : $\sum_{l=l_1}^{l=l_2} P_l(z)\times(\Omega'(z))^{n-l}$. La puissance maximale en 1/z est ici égale à n(s+1), et elle n'est atteinte que pour tous les indices entre l_1 et l_2 <u>dont le point correspondant sur le diagramme de Newton-Puisieux est situé sur la droite</u> reliant les points d'indices extrémaux l_1 et l_2 . Aussi dans la sommation ne sont retenus que ces indices. Cela donne l'équation algébrique polynomiale pour α_s :

$$\Omega'(z)=\frac{\alpha_1}{z^2}+\frac{\alpha_2}{z^3}+\ldots+\frac{\alpha_s}{z^{s+1}}\rightarrow(\Omega'(z))^n+\sum_{l=l_1}^{l=l_2} P_l(z)\times(\Omega'(z))^{n-l}$$

$$\Rightarrow(\alpha_s)^n z^{-n(s+1)}+(\alpha_s)^{n-l_1} z^{-\left(\widetilde{w}_{l_1}+(n-l_1)(s+1)\right)}a_{l_1,0}+\sum_{l_i\in S_{l_1,l_2}}(\alpha_s)^{n-l_i} z^{-\left(\widetilde{w}_{l_i}+(n-l_i)(s+1)\right)}a_{l_i,0}+(\alpha_s)^{n-l_2} z^{-\left(\widetilde{w}_{l_2}+(n-l_2)(s+1)\right)}a_{l_2,0}=0$$

$$Or \quad \forall l_i\in S_{l_1,l_2}\rightarrow\frac{\widetilde{w}_{l_i}}{l_i}=\frac{\widetilde{w}_{l_1}}{l_1}=\frac{\widetilde{w}_{l_2}}{l_2}=s+1\Rightarrow\widetilde{w}_{l_i}+(n-l_i)(s+1)=\widetilde{w}_{l_1}+(n-l_1)(s+1)=\widetilde{w}_{l_2}+(n-l_2)(s+1)=n(s+1)$$

$$Puisque \quad \forall l \quad \frac{\widetilde{w}_l}{l}\leq s+1\Rightarrow\widetilde{w}_l+(n-l)(s+1)\leq n(s+1)$$

$$\Rightarrow\alpha_s\neq 0\quad(\alpha_s)^n+(\alpha_s)^{n-l_1}a_{l_1,0}+\sum_{l_i\in S_{l_1,l_2}}(\alpha_s)^{n-l_i}a_{l_i,0}+(\alpha_s)^{n-l_2}a_{l_2,0}=0\Rightarrow(\alpha_s)^{l_2}+(\alpha_s)^{l_2-l_1}a_{l_1,0}+\sum_{l_i\in S_{l_1,l_2}}(\alpha_s)^{l_2-l_i}a_{l_i,0}+a_{l_2,0}=0$$

Avec Mathematica, on peut facilement déterminer les autres coefficients du terme exponentiel en développant l'expression $(\Omega'(z))^n+\sum_{l=l_1}^{l=l_2} P_l(z)\times(\Omega'(z))^{n-l}$ autour de z=0, à l'ordre 0 et en ne retenant que les s premiers termes en puissance maximale de 1/z et en les annulant successivement. La première équation algébrique est celle décrite plus haut pour la détermination du coefficients α_s

<u>*Conclusion sur la construction des formes normales autour de z=0*</u>

Il s'agit donc bien d'un algorithme de construction systématique des solutions de forme normale, qui se trouve être effectif comme j'essaierais de l'illustrer dans ce document par de nombreux exemples.

Équations de Hamburger, Théorème de Weirstrass et dénombrement des solutions de forme normale et régulières

La construction et l'existence d'une forme normale n'a de sens que si le développement associé converge, soit pour la majorité des cas que le développement soit fini. Supposons qu'il en soit ainsi. Envisageons maintenant le cas particulier des équations différentielles qui ne possède que deux singularités dont l'une est essentielle et l'autre régulière, soit les équations dîtes de Hamburger. Comme nous l'avons défini auparavant une équation différentielle est dîtes de Hamburger si z=0 et z=∞ sont les seules singularités de l'équation différentielle et si l'une est régulière tandis que l'autre est essentielle.

Dans ce qui suit une fonction dîtes « entière » ou encore « intégrale » (en anglais « entire » ou « integral ») désigne une fonction holomorphe dans tout le plan complexe. Le théorème de factorisation de Weirstrass concerne ces fonctions entières. Dans le cas où l'on peut définir tous les zéros d'une fonction entière dans le plan complexe et en nombre k fini à l'intérieur d'un rayon |z| <R limité, aussi grand soit-il, alors la fonction entière peut se factoriser ainsi :

$$f(z)=e^{g(z)}\prod_{l=1}^{l=k}(z-z_l)$$

Le nombre k implique également la répétition des zéros (différent de l'origine) de la fonction z en relation avec leur multiplicité respective. g(z) est une fonction entière. Si la fonction entière f(z) s'annule en z=0 avec une multiplicité m, alors factorise la fonction entière comme suit : $f(z)=z^m e^{g(z)}\prod_{l=1}^{l=k}(z-z_l)$ *avec les mêmes propriétés pour g(z) et les zéros de la fonction f(z) en dehors de l'origine.*

Revenons au problème qui nous occupe des équations de Hamburger. La solution régulière est convergente au moins dans un rayon autour de la singularité, ainsi que le développement inclus dans la forme normale qui lui étant supposé fini converge de facto partout dans le plan complexe hormis éventuellement autour de la singularité essentielle. Il est donc logique de penser que ces deux solutions coïncident dans tout le plan complexe hormis éventuellement sur les points singuliers respectifs. A.R.Forsythe choisi de définir z=0 comme la singularité essentielle, tandis qu'E.L.Ince choisi z=∞ comme point essentiel. Commençons par l'option prise par E.L.Ince.

z=0 est une singularité régulière, z=∞ est une singularité essentielle

Comme z=0 est une singularité régulière la solution de l'équation différentielle :

$$y^{(n)}(z)+P_1(z)\,y^{(n-1)}(z)+\ldots+P_{n-1}(z)\,y^{(1)}(z)+P_n(z)\,y(z)=0$$

s'écrit comme suit : $y(z)=z^{\rho}V(z)$ *où V(z) est une fonction entière et ρ est une racine de l'équation indicielle :* $\begin{cases}\rho(\rho-1)\ldots(\rho-(n-1))+p_1\,\rho(\rho-1)\ldots(\rho-(n-2))+\ldots+p_n=0\\ p_l=\lim\limits_{z\to0}\quad z^lP_l(z)\end{cases}$.

Dans le même temps l'existence d'une forme normale sur la singularité essentielle z=∞, permet d'écrire cette même solution sous la forme :

$$y(z)=e^{\Omega(z)}z^{\sigma}U(z)\quad \Omega(z)=a_1z+\ldots+\frac{a_s}{s}z^s$$

Où U(z) est une fonction holomorphe dans toute région du plan complexe en dehors de z=0 et ne s'annule pas en z=∞. C'est à dire que U(z) se développe comme suit : $U(z)=b_0+\frac{b_1}{z}+\frac{b_2}{z^2}+\ldots\quad b_0\neq0$.

Ainsi l'on peut écrire : $\frac{y'(z)}{y(z)}=a_1+\ldots+a_sz^{s-1}+\frac{\sigma}{z}+\frac{U'(z)}{U(z)}=\frac{\rho}{z}+\frac{V'(z)}{V(z)}$

Cela signifie que $\frac{V'(z)}{V(z)}=a_1+\ldots+a_sz^{s-1}+\frac{\sigma-\rho}{z}+\frac{U'(z)}{U(z)}$*. Soit que l'expression* $\frac{V'(z)}{V(z)}$ *est développable en une série de puissance décroissante de z comportant seulement un nombre fini de puissance de z positives. Ce développement n'est donc possible que si la fonction entière V(z) ne possède qu'un nombre fini de zéros dans un rayon limité R aussi grand soit-il. V(z) est donc une fonction entière dans les conditions du théorème de Weierstrass.*

On peut alors écrire que : $V(z)=P(z)e^{g(z)}\rightarrow y(z)=z^{\rho}P(z)e^{g(z)}=e^{\Omega(z)}z^{\sigma}U(z)$*. Ici le polynôme P(z) est la forme développée du produit* $P(z)=\prod_{l=1}^{l=k}(z-z_l)$*. P(z) est donc de degré k en puissance positive de z. La fonction g(z) est une fonction holomorphe de la forme* $g(z)=c_1z+c_2z^2+\ldots$.

L'existence de ces deux types de factorisation permet d'identifier g(z) par évidence comme le polynôme Ω(z) du terme exponentiel de la forme normale. De même P(z) va s'écrire par identification : $P(z)=z^k\tilde{U}\left(\frac{1}{z}\right)$ *avec* $\tilde{U}\left(\frac{1}{z}\right)$ *polynôme de degré k en 1/z qui peut s'identifier avec le développement U(z) dans la forme normale. Il en résulte que :* $z^{\rho+k}=z^{\sigma}\quad et\quad \tilde{U}\left(\frac{1}{z}\right)=U(z)$. *Cela conduit à la relation nécessaire sur les exposants indiciels du terme régulier :* $\sigma=\rho+k$.

Il y a donc une relation entre les exposants indicielles ρ et σ qui implique qu'il soit séparé par une valeur entière k positive, ρ est défini lors de la construction de la solution de Fröbenius autour de la singularité régulière z=0 et σ dans la construction de la forme normale et du terme régulier qui en découle autour de z=∞.

Remarque sur la relation dans le cas des solutions de forme subnormale : lorsque la solution est de forme subnormale avec un nombre rationnel 1/p, alors un changement de variable $\zeta^p=z$ *a été effectué aussi l'exposant σ dans la relation avec ρ doit être remplacé par* $\frac{\sigma}{p}$ *de même pour l'entier k qui devient k/p. Ainsi la relation devient donc :* $\frac{\sigma}{p}=\rho+\frac{k}{p}$

z=0 est une singularité essentielle, z=∞ est une singularité régulière

A.R.Forsythe présente le cas inverse où cette fois c'est z=0 qui est la singularité essentielle. C'est exactement le même raisonnement qui permet de se mettre dans les conditions du théorème de Weierstrass appliqué cette fois autour de la singularité régulière z=∞. Comme z=∞ est une singularité régulière la solution de l'équation différentielle :

$$y^{(n)}(z)+P_1(z)\,y^{(n-1)}(z)+\ldots+P_{n-1}(z)\,y^{(1)}(z)+P_n(z)\,y(z)=0$$

s'écrit comme suit : $y(z)=z^{-\rho}V\left(\frac{1}{z}\right)$ *où V(1/z) est une fonction entière de 1/z et ρ est la racine de l'équation indicielle :* $\begin{cases}(-\rho)(-\rho-1)\ldots(-\rho-(n-1))+p_1\,(-\rho)(-\rho-1)\ldots(-\rho-(n-2))+\ldots+p_n=0\\ p_l=\underset{z\to\infty}{Lim}\quad z^lP_l(z)\end{cases}$.

Dans le même temps l'existence d'une forme normale sur la singularité essentielle z=0, permet d'écrire cette même solution sous la forme :

$$y(z)=e^{\Omega(z)}z^{\sigma}U(z)\quad \Omega(z)=-\left(\frac{a_1}{z}+\ldots+\frac{1}{s}\frac{a_s}{z^s}\right)\quad \Omega'(z)=\frac{a_1}{z^2}+\ldots+\frac{a_s}{z^{s+1}}$$

Où U(z) est une fonction holomorphe dans toute région du plan complexe en dehors de z=∞ et ne s'annule pas en z=0. C'est à dire que U(z) se développe comme suit : $U(z)=b_0+b_1z+b_2z^2+\ldots.\quad b_0\neq 0$.

Ainsi l'on peut écrire : $\frac{y'(z)}{y(z)}=\frac{a_1}{z^2}+\ldots+\frac{a_s}{z^{s+1}}+\frac{\sigma}{z}+\frac{U'(z)}{U(z)}=-\frac{\rho}{z}+\frac{V'\left(\frac{1}{z}\right)}{V\left(\frac{1}{z}\right)}$

Cela signifie que $\frac{V'\left(\frac{1}{z}\right)}{V\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{a_1}{z^2}+\ldots+\frac{a_s}{z^{s+1}}+\frac{\sigma+\rho}{z}+\frac{U'(z)}{U(z)}$.

Soit que l'expression $\frac{V'\left(\frac{1}{z}\right)}{V\left(\frac{1}{z}\right)}$ *est développable en une série de puissances décroissantes de 1/z comportant seulement un nombre fini de puissances de 1/z positives. Ce développement n'est donc possible que si la fonction entière V(1/z) ne possède qu'un nombre fini de zéros au delà d'un rayon limité R aussi petit soit-il. V(1/z) est donc une fonction entière dans les conditions du théorème de Weierstrass.*

On peut alors écrire que : $V\left(\frac{1}{z}\right)=P\left(\frac{1}{z}\right)e^{g\left(\frac{1}{z}\right)}\rightarrow y(z)=z^{-\rho}P\left(\frac{1}{z}\right)e^{g\left(\frac{1}{z}\right)}=e^{\Omega(z)}z^{\sigma}U(z)$. *Ici le polynôme P(1/z) est la forme développée du produit* $P\left(\frac{1}{z}\right)=\prod_{l=1}^{l=k}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z_l}\right)$ *où* $1/z_l$ *représente l'un des k zéros de la fonction V(1/z). P(1/z) est donc de degré k en puissances positives de 1/z. g(1/z) est une fonction entière de 1/z, soit développable en série* $g\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{b_1}{z}+\frac{b_2}{z^2}+\ldots$. *L'existence de ces deux types de factorisation permet d'identifier g(1/z) comme le polynôme Ω(z) du terme exponentiel de la forme normale. P(z) va donc s'écrire par identification :* $P(z)=z^{-k}\tilde{U}(z)$ *avec* $\tilde{U}(z)=c_0+c_1z+\ldots+c_kz^k$ *polynôme de degré k en z d'où le résultat suivant :* $z^{-\rho-k}=z^{\sigma}\quad et\quad \tilde{U}(z)=U(z)$. *Cela conduit à la relation nécessaire sur les exposants indicielle du terme régulier :* $\sigma=-\rho-k$. *Il y a donc une relation entre les exposants indicielles ρ et σ qui implique qu'il soit séparé par une valeur entière k négative, ρ est défini lors de la construction de la solution de Fröbenius autour de la singularité régulière z=∞ et σ dans la construction de la forme normale et du terme régulier qui en découle autour de z=0 .*

Cette juxtaposition des solutions régulières et normale dans les deux cas, permet à partir de la construction des solutions de Fröbenius et leur énumération de considérer l'existence et le dénombrement simultanée des solutions de forme normale en quelque sorte en miroir de ces dernières. C'est ce que nous allons chercher à illustrer également dans les exemples qui suivent.

Remarque sur la relation dans le cas des solutions de forme subnormale : lorsque la solution est de forme subnormale avec un nombre rationnel 1/p, alors un changement de variable $\zeta^{p}=z$ *a été effectué aussi l'exposant σ dans la relation avec ρ doit être remplacé par* $\frac{\sigma}{p}$ *de même pour l'entier k qui devient k/p. Ainsi la relation devient donc :* $\frac{\sigma+k}{p}=-\rho$.

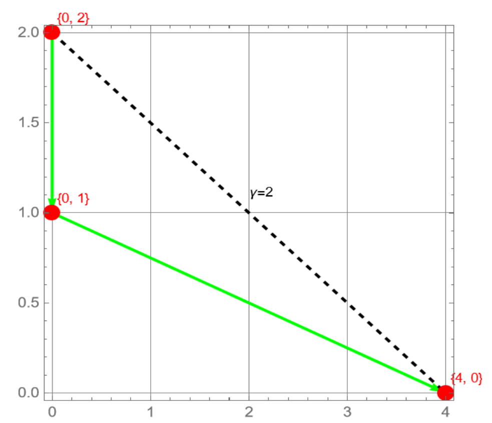
Exemples de construction de forme normale autour du point singulier irrégulier z=0

Dans la suite pour les exposants indiciels, je distinguerais ρ comme l'exposant de la solution régulière au point singulier éponyme et σ l'exposant pour la partie régulière de la forme normale. S est le degré du polynôme en 1/z du terme exponentiel de la forme normale. Lorsque la singularité étudiée est z=∞ alors par le changement de variable préalable z→1/z la singularité est ramenée à z=0.

Exemple 1 A.R.Forsythe Chapitre 91, page 280

Soit l'équation différentielle du second degré $y''(z)-\frac{\alpha+\beta\, z+\tilde{\gamma}\, z^2}{z^4}y(z)=0$. *Le point z=∞ est régulier. L'équation indicielle en ce point est* $\rho(\rho+1)-\tilde{\gamma}=0$. *Cela indique qu'il est possible de développer la solution autour de z=∞ sous la forme* $y(z)=z^{-\rho}\sum_{l=0}^{l=1}c_l z^{-l}$. *Les deux racines possibles de l'équation indicielle au point z=∞ sont telles que :* $\rho^2+\rho-\tilde{\gamma}=0 \Rightarrow \rho_1\rho_2=-\tilde{\gamma} \quad \rho_1+\rho_2=-1$.

Le point z=0 est irrégulier l'équation indicielle étant $-\alpha=0$. *Le polygone de Newton-Puisieux est de la forme :*



L'exposant s admissible est donc s=γ-1=1. Ce qui conduit à proposer une forme normale comme suit : $y(z)=e^{\Omega(z)}u(z) \quad \Omega(z)=\frac{a}{z}$. *Le développement en série de l'expression* $(\Omega'(z))^2+P_1(z)(\Omega'(z))^1+P_2(z)(\Omega'(z))^0$ *autour de z=0 à l'ordre 0 donne l'expression suivante :*

$$(\Omega'(z))^2+P_1(z)(\Omega'(z))^1+P_2(z)(\Omega'(z))^0=\frac{a^2-\alpha}{z^4}-\frac{\beta}{z^3}-\frac{\tilde{\gamma}}{z^2}+O(z)\Rightarrow a^2=\alpha$$

L'annulation du terme de puissance maximale en 1/z donne donc la valeur de $a=\pm\sqrt{\alpha}$. *L'équation différentielle pour la fonction u(z) est la suivante :* $u''(z)-\frac{2a}{z^2}u'(z)-\frac{2a-\beta-\tilde{\gamma}\, z}{z^3}u(z)=0$. *Cette équation possède bien une solution régulière dont l'équation indicielle est la suivante :* $2a-\beta-2a\sigma=0 \Leftrightarrow \sigma=1-\frac{\beta}{2a}$. *Le développement de la solution u(z) sous la forme* $u(z)=z^{1-\frac{\beta}{2a}}\sum_{l=0}^{l=\infty}c_l z^l$ *conduit à la récurrence à deux termes suivantes :*

$$\sigma=1-\frac{\beta}{2a}\rightarrow\begin{cases} c_0=1 \\ c_l=\dfrac{\dfrac{(2a(l-1)-\beta)(2a\, l-\beta)}{4\, a^2}-\tilde{\gamma}}{2a\, l}c_{l-1}=\dfrac{\left(l-1-\dfrac{\beta}{2a}\right)\left(l-\dfrac{\beta}{2a}\right)-\tilde{\gamma}}{2a\, l}c_{l-1}=\dfrac{(\sigma+l-1)(\sigma+l-2)-\tilde{\gamma}}{2a\, l}c_{l-1}\end{cases}$$

Cette récurrence s'arrête lorsque le terme $\left(l-1-\frac{\beta}{2a}\right)\left(l-\frac{\beta}{2a}\right)-\tilde{\gamma}=\frac{(\sigma+l-1)(\sigma+l-2)-\tilde{\gamma}}{2a\,l}=0$ *s'annule pour une valeur entière l=ϑ+1 strictement positive, soit* $(\sigma+\theta)(\sigma+\theta-1)-\tilde{\gamma}=0$. *Lorsque le développement est finie, cela signifie également que l'exposant indiciel pour la solution régulière à z=∞ conduit à une solution identique. Et l'on sait par application de la méthode de Hamburger que les exposants indiciels ρ et σ sont liés par la relation :*

$$\sigma+\rho=-k \quad k>0$$

Dressons les valeurs possibles des exposants indiciels :

$$\text{Posons} \quad a=\sqrt{\alpha}\rightarrow\sigma_1=1-\frac{\beta}{2a} \quad \sigma_2=1+\frac{\beta}{2a}\rightarrow\sigma_1+\sigma_2=2$$
$$\sigma_1+\rho_1=-k_1 \quad \sigma_2+\rho_2=-k_2\Rightarrow\sigma_1+\rho_1+\sigma_2+\rho_2=-k_1-k_2=2-1=1$$

Si la condition d'arrêt de la récurrence $(\sigma+\theta)(\sigma+\theta-1)-\tilde{\gamma}=0$ *a lieu pour des valeurs de σ distinctes alors il ne peut y avoir coexistence de deux formes normales car on aboutit à* $k_1+k_2=-1$ *ce qui est impossible. Si donc β est non nul alors il n'existe qu'une seule solution de forme normale que l'on peut construire soit depuis la singularité régulière z=∞ par la méthode de Fröbenius, soit encore plus facilement par la forme normale puisque le développement de la partie régulière est fini. Il vient :*

$$y(z)=e^{\frac{a}{z}}z^{1-\frac{\beta}{2a}}\sum_{l=0}^{l=\vartheta}c_l z^l \quad c_0=1 \quad c_l=\frac{(\sigma+l-1)(\sigma+l-2)-\tilde{\gamma}}{2a\,l}c_{l-1} \quad l>0 \quad et \quad (\sigma+\vartheta)(\sigma+\vartheta-1)-\tilde{\gamma}=0\rightarrow c_{\vartheta+1}=\ldots=c_l=0 \quad l>\vartheta$$

Ici il faut bien voir que a peut prendre les deux valeurs $a=\pm\sqrt{\alpha}$, *mais alors que la condition d'arrêt de la récurrence n'est possible que pour la seule valeur choisie, il n'y a donc pas coexistence de deux formes normales possibles coïncidant avec deux solutions régulières construites sur deux racines ρ distinctes si l'on apporte pas de contrainte supplémentaire sur les paramètres* $\tilde{\gamma}$, *α et β.*

En revanche, il y a bien coexistence de deux formes normales si les deux exposants σ proviennent de la même racine indicielle ρ. A cet effet introduisons justement des contraintes sur les paramètres $\tilde{\gamma}$, *α et β et revenons sur l'exposant indiciel ρ régulier:* $\rho^2+\rho-\tilde{\gamma}=0\Rightarrow\rho_{1,2}=-\frac{1\pm\sqrt{1+4\tilde{\gamma}}}{2}$. *En changeant de paramètres et en supposant que* $\tilde{\gamma}$ *soit le produit de deux entiers successifs positifs, il vient :* $\sqrt{1+4\tilde{\gamma}}=2p+1\in\mathbf{N} \quad \tilde{\gamma}=p(p+1)\Rightarrow\rho_{1,2}=-\frac{1\pm(2p+1)}{2}=\begin{cases}-p-1\\ p\end{cases}$, *alors les deux racines indicielles sont entières (au passage cela indique qu'il y a potentiellement existence d'une solution avec un terme logarithmique).*

Prenons par exemple comme racine indicielle $\rho_1 = -p-1$ *et définissons les deux exposants :*

$$\sigma_1 + \rho_1 = 1 - \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}} - p - 1 = -k_1 \Rightarrow k_1 = \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}} + p$$
$$\sigma_2 + \rho_1 = 1 + \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}} - p - 1 = -k_2 \Rightarrow k_2 = -\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}} + p$$

Il suffit donc que $\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}$ *soit un entier de telle manière que* k_1 *et* k_2 *soit positif et comme la condition d'arrêt de récurrence s'exprime ainsi :* $\tilde{\gamma} = p(p+1) \Rightarrow (\sigma + \theta - 1)(\sigma + \theta) - p(p+1) = 0$ *alors elle est respectée lorsque l'entier* ϑ *est égal soit à* k_1*, soit à* k_2 *:*

$$\sigma_1 + k_1 = -\rho_1 = p+1 \quad \sigma_2 + k_2 = -\rho_1 = p+1$$
$$\theta = k_1 \Rightarrow (\sigma_1 + k_1 - 1)(\sigma_1 + k) = p(p+1)$$
$$\theta = k_2 \Rightarrow (\sigma_2 + k_2 - 1)(\sigma_2 + k) = p(p+1)$$

On a donc coexistence de deux formes normales. La première étant :

$$y(z) = e^{\frac{\sqrt{\alpha}}{z}} z^{1-\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}} \sum_{l=0}^{l=k_1} c_l z^l \quad c_0 = 1 \quad c_l = \frac{(\sigma + l - 1)(\sigma + l - 2) - \tilde{\gamma}}{2\sqrt{\alpha}\, l} c_{l-1} \quad l > 0 \quad et$$
$$\sigma = 1 - \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}} \quad et \quad \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}, p \in \mathbf{N} \quad \tilde{\gamma} = p(p+1) \quad k_1 = \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}} + p \quad et \quad \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}} \geq -p$$

La seconde étant :

$$y(z) = e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{z}} z^{1+\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}} \sum_{l=0}^{l=k_2} c_l z^l \quad c_0 = 1 \quad c_l = -\frac{(\sigma + l - 1)(\sigma + l - 2) - \tilde{\gamma}}{2\sqrt{\alpha}\, l} c_{l-1} \quad l > 0 \quad et$$
$$\sigma = 1 + \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}} \quad et \quad \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}, p \in \mathbf{N} \quad et \quad \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}} \leq p \quad et \quad \tilde{\gamma} = p(p+1) \quad k_2 = -\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}} + p$$

La coexistence des deux formes normales n'est donc possible que si $-p \leq \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}} \leq p$ *.*

Si la racine indicielle choisie est cette fois $\rho_2 = p$ *alors les deux exposants s'écrivent :*

$$\sigma_1 + \rho_2 = 1 - \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}} + p = -k_1 \Rightarrow k_1 = \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}} - p - 1$$
$$\sigma_2 + \rho_2 = 1 + \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}} + p = -k_2 \Rightarrow k_2 = -\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}} - p - 1$$

Dans ces conditions il faut que $\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}} \in \mathbf{N}$ *et que* $\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}} \geq p+1 \quad ou \quad \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}} \leq -p-1$ *. Ces deux conditions ne peuvent donc être réalisées simultanément , il en résulte une seule forme normale à la fois parmi ces deux solutions :*

$$y(z) = e^{\frac{\sqrt{\alpha}}{z}} z^{1-\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}} \sum_{l=0}^{l=k_1} c_l z^l \quad c_0 = 1 \quad c_l = \frac{(\sigma + l - 1)(\sigma + l - 2) - \tilde{\gamma}}{2\sqrt{\alpha}\, l} c_{l-1} \quad l > 0 \quad et$$
$$\sigma = 1 - \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}} \quad et \quad \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}, p \in \mathbf{N} \quad et \quad \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}} \geq p+1 \quad \tilde{\gamma} = p(p+1) \quad k_1 = \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}} - p - 1$$

ou

$$y(z) = e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{z}} z^{1+\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}} \sum_{l=0}^{l=k_2} c_l z^l \quad c_0 = 1 \quad c_l = -\frac{(\sigma + l - 1)(\sigma + l - 2) - \tilde{\gamma}}{2\sqrt{\alpha}\, l} c_{l-1} \quad l > 0 \quad et$$
$$\sigma = 1 + \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}} \quad et \quad \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}, p \in \mathbf{N} \quad et \quad \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}} \leq -p-1 \quad et \quad \tilde{\gamma} = p(p+1) \quad k_2 = -\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}} - p - 1$$

Supposons maintenant que $\sqrt{1+4\tilde{\gamma}} = 2p \in \mathbf{N} \quad \tilde{\gamma} = \left(p - \frac{1}{2}\right)\left(p + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \rho_{1,2} = -\frac{1 \pm 2p}{2} = \begin{cases} -p - \frac{1}{2} \\ p - \frac{1}{2} \end{cases}$.

Prenons par exemple comme racine indicielle $\rho_1 = -p - \frac{1}{2}$ *et définissons les deux exposants :*

$$\sigma_1 + \rho_1 = 1 - \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}} - p - \frac{1}{2} = -k_1 \Rightarrow k_1 = \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}} + p - \frac{1}{2} \quad et \quad \sigma_1 + k_1 = -\rho_1 = p + \frac{1}{2}$$
$$\sigma_2 + \rho_1 = 1 + \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}} - p - \frac{1}{2} = -k_2 \Rightarrow k_2 = -\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}} + p - \frac{1}{2} \quad et \quad \sigma_2 + k_2 = -\rho_1 = p + \frac{1}{2}$$

Il suffit donc que $\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}$ *soit un demi-entier de telle manière que* k_1 *et* k_2 *soit positif et comme la condition d'arrêt de récurrence s'écrit :* $\tilde{\gamma} = \left(p - \frac{1}{2}\right)\left(p + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow (\sigma + \theta - 1)(\sigma + \theta) - \left(p - \frac{1}{2}\right)\left(p + \frac{1}{2}\right) = 0$ *alors elle est respectée lorsque l'entier* ϑ *est égal soit à* k_1*, soit à* k_2 *:*

$$\sigma_1 + k_1 = -\rho_1 = p + \frac{1}{2} \quad \sigma_2 + k_2 = -\rho_1 = p + \frac{1}{2}$$
$$\theta = k_1 \Rightarrow (\sigma_1 + k_1 - 1)(\sigma_1 + k) = \left(p - \frac{1}{2}\right)\left(p + \frac{1}{2}\right)$$
$$\theta = k_2 \Rightarrow (\sigma_2 + k_2 - 1)(\sigma_2 + k) = \left(p - \frac{1}{2}\right)\left(p + \frac{1}{2}\right)$$

On a donc coexistence de deux formes normales. La première étant :

$$y(z)=e^{\frac{\sqrt{\alpha}}{z}}z^{1-\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}}\sum_{l=0}^{l=k_1}c_l z^l \quad c_0=1 \quad c_l=\frac{(\sigma+l-1)(\sigma+l-2)-\tilde{\gamma}}{2\sqrt{\alpha}\ l}c_{l-1} \quad l>0 \quad et$$

$$\sigma=1-\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}} \quad et \quad n,p\in\mathbf{N} \quad et \quad \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}=n+\frac{1}{2} \quad \tilde{\gamma}=\left(p-\frac{1}{2}\right)\left(p+\frac{1}{2}\right) \quad k_1=n+p \quad et \quad n\geq -p$$

La seconde étant :

$$y(z)=e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{z}}z^{1+\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}}\sum_{l=0}^{l=k_2}c_l z^l \quad c_0=1 \quad c_l=-\frac{(\sigma+l-1)(\sigma+l-2)-\tilde{\gamma}}{2\sqrt{\alpha}\ l}c_{l-1} \quad l>0 \quad et$$

$$\sigma=1+\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}} \quad et \quad n,p\in\mathbf{N} \quad et \quad \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}=n+\frac{1}{2} \quad \tilde{\gamma}=\left(p-\frac{1}{2}\right)\left(p+\frac{1}{2}\right) \quad k_2=-n+p-1 \quad et \quad n\leq p-1$$

La coexistence des deux formes normales n'est donc possible que si $\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}=n+\frac{1}{2} \quad et \quad -p\leq n\leq p-1$.

Si la racine indicielle choisie est cette fois $\rho_2=p-\frac{1}{2}$ *alors les deux exposants s'écrivent :*

$$\sigma_1+\rho_2=1-\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}+p-\frac{1}{2}=-k_1\Rightarrow k_1=\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}-p-\frac{1}{2}$$
$$\sigma_2+\rho_2=1+\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}+p-\frac{1}{2}=-k_2\Rightarrow k_2=-\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}-p-\frac{1}{2}$$

Dans ces conditions il faut toujours que $\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}$ *soit un demi-entier et que* $\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}\geq p+\frac{1}{2}$ *ou* $\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}\leq -p-\frac{1}{2}$.
Ces deux conditions ne peuvent donc être réalisées simultanément , il en résulte une seule forme normale à la fois parmi ces deux solutions :

$$y(z)=e^{\frac{\sqrt{\alpha}}{z}}z^{1-\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}}\sum_{l=0}^{l=k_1}c_l z^l \quad c_0=1 \quad c_l=\frac{(\sigma+l-1)(\sigma+l-2)-\tilde{\gamma}}{2\sqrt{\alpha}\ l}c_{l-1} \quad l>0 \quad et$$

$$\sigma=1-\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}} \quad et \quad n,p\in\mathbf{N} \quad et \quad \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}=n+\frac{1}{2} \quad \tilde{\gamma}=\left(p-\frac{1}{2}\right)\left(p+\frac{1}{2}\right) \quad k_1=n-p \quad et \quad n\geq p$$

ou

$$y(z)=e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{z}}z^{1+\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}}\sum_{l=0}^{l=k_2}c_l z^l \quad c_0=1 \quad c_l=-\frac{(\sigma+l-1)(\sigma+l-2)-\tilde{\gamma}}{2\sqrt{\alpha}\ l}c_{l-1} \quad l>0 \quad et$$

$$\sigma=1+\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}} \quad et \quad n,p\in\mathbf{N} \quad et \quad \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}=n+\frac{1}{2} \quad \tilde{\gamma}=\left(p-\frac{1}{2}\right)\left(p+\frac{1}{2}\right) \quad k_2=-n-p-1 \quad et \quad n\leq -p-1$$

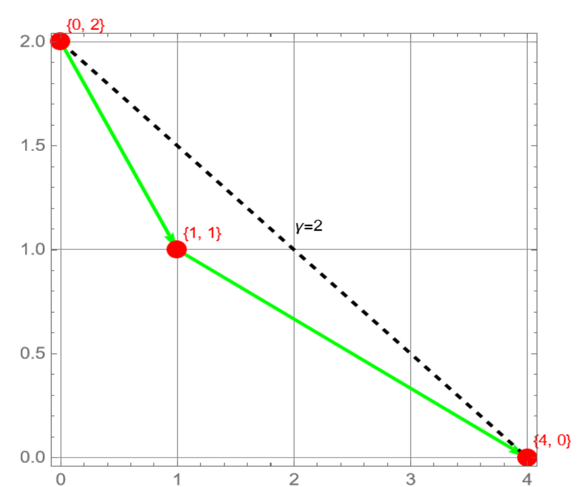
Prenons maintenant le dernier cas où β=0. Alors les deux exposants indiciels $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ *sont identiques, et la coexistence de deux formes normales ne posent plus de problème :*

$$\begin{cases} y_1(z) = e^{\frac{\sqrt{\alpha}}{z}} \times z \times \sum_{l=0}^{l=\vartheta} c_l z^l & c_0 = 1 \quad c_l = \dfrac{l(l-1) - \tilde{\gamma}}{2\sqrt{\alpha}\, l} c_{l-1} \quad l > 0 \\ y_2(z) = e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{z}} \times z \times \sum_{l=0}^{l=\vartheta} c_l z^l & c_0 = 1 \quad c_l = -\dfrac{l(l-1) - \tilde{\gamma}}{2\sqrt{\alpha}\, l} c_{l-1} \quad l > 0 \end{cases} \quad et \quad \tilde{\gamma} = \vartheta(1 + \vartheta)$$

<u>Exemple E.L.Ince Chapitre 17.62, page 435</u>

Soit l'équation différentielle du second degré $y''(z) - \frac{a + 2b\,z + c\,z^2}{z^2} y(z) = 0$. *Le point z=0 est régulier. L'équation indicielle en ce point est* $\rho(\rho - 1) - c = 0$. *Cela indique qu'il est possible de développer la solution autour de z=0 sous la forme* $y(z) = z^\rho \sum_{l=0}^{l=1} c_l z^l$ *. Les deux racines possibles de l'équation indicielle au point z=0 sont telles que :* $\rho^2 - \rho - c = 0 \Rightarrow \rho_1 \rho_2 = -c \quad \rho_1 + \rho_2 = 1$.

Le point z=∞ est irrégulier et l'équation indicielle est $-a = 0$ *soit sans solution. On choisit de transformer l'équation différentielle par le changement de variable z->1/z. L'équation devient :* $y''(z) + \frac{2}{z} y'(z) - \frac{a + 2b\,z + c\,z^2}{z^4} y(z) = 0$. *Cette fois pour z=0 le polygone de Newton-Puisieux est de la forme :*



L'exposant s admissible est donc s=γ-1=1. Ce qui conduit à proposer une forme normale comme suit : $y(z) = e^{\Omega(z)} u(z) \quad \Omega(z) = \frac{\alpha}{z}$. *Le développement en série de l'expression* $(\Omega'(z))^2 + P_1(z)(\Omega'(z))^1 + P_2(z)(\Omega'(z))^0$ *autour de z=0 à l'ordre 0 donne l'expression suivante :*

$$(\Omega'(z))^2 + P_1(z)(\Omega'(z))^1 + P_2(z)(\Omega'(z))^0 = \frac{-a + \alpha^2}{z^4} - \frac{2(a_0 + b)}{z^3} - \frac{c}{z^2} + O(z) \Rightarrow \alpha^2 = a$$

L'annulation du terme de puissance maximale en 1/z donne donc la valeur de $\alpha = \pm\sqrt{a}$.

L'équation différentielle pour la fonction u(z) est la suivante : $u''(z)+\frac{2(z-\alpha)}{z^2}u'(z)-\frac{2b+c\,z}{z^3}u(z)=0$. *Par le changement de variable inverse z->1/z sur cette équation différentielle il vient l'équation différentielle :* $u''(z)+2a_0u'(z)-\frac{2b\,z+c}{z^2}u(z)=0$. *On revient ainsi à la singularité sur z=∞. Cette équation possède bien une solution régulière dont l'équation indicielle est la suivante :* $\sigma=-\frac{b}{\alpha}$. *Le développement de la solution u(z) sous la forme* $u(z)=z^{\frac{b}{\alpha}}\sum_{l=0}^{l=\infty}c_l z^{-l}$ *conduit à la récurrence à deux termes suivantes :* $\sigma=-\frac{b}{\alpha}\rightarrow\begin{cases}c_0=1\\ c_l=\frac{(\sigma+l)(\sigma+l-1)-c}{2\alpha\,l}c_{l-1}\end{cases}$.

Les conditions d'arrêt de la récurrence se résume à l'observance de la relation sur un entier ϑ *:* $(\sigma+\vartheta)(\sigma+\vartheta-1)-c=0$. *Dans ces conditions la solution de forme normale s'écrit :*

$$y(z)=e^{\alpha\,z}z^{\frac{b}{\alpha}}\sum_{l=0}^{l=\vartheta-1}c_l z^{-l}\qquad c_0=1\quad c_l=\frac{\left(l-\frac{b}{\alpha}\right)\left(l-\frac{b}{\alpha}-1\right)-c}{2a\,l}c_{l-1}\qquad c=\left(\vartheta-\frac{b}{\alpha}\right)\left(\vartheta-\frac{b}{\alpha}-1\right)\qquad \alpha^2=a$$

Les conditions d'existence et le dénombrement des solutions peuvent faire l'objet d'une discussion comme dans l'exemple précédent, mais je préfère illustrer des solutions concrètes avec un développement fini de la forme normale :

$$\vartheta=1\rightarrow y(z)=e^{a_0z}z^{\frac{b}{a_0}}\qquad c=-\frac{b}{a_0}\left(1-\frac{b}{a_0}\right)\qquad {a_0}^2=a$$

$$\vartheta=2\rightarrow y(z)=e^{a_0z}z^{\frac{b}{a_0}}\left(1-\frac{1}{z}\times\frac{a_0-b}{{a_0}^2}\right)\qquad c=\left(2-\frac{b}{a_0}\right)\left(1-\frac{b}{a_0}\right)\qquad {a_0}^2=a$$

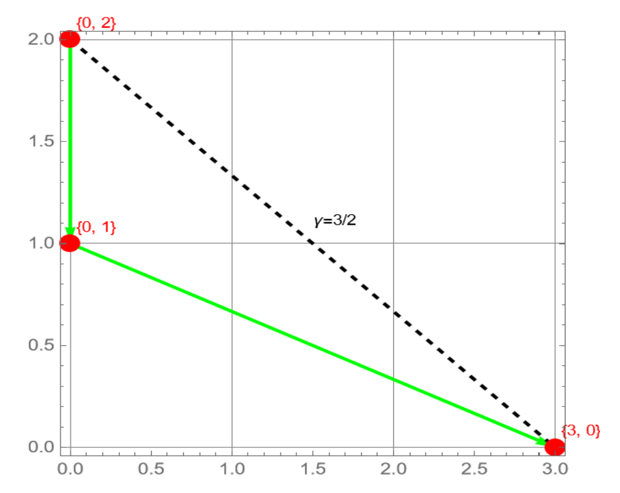
$$\vartheta=3\rightarrow y(z)=e^{a_0z}z^{\frac{b}{a_0}}\left(1-\frac{1}{z}\times\frac{3a_0-2b}{{a_0}^2}+\frac{1}{z^2}\times\frac{3a_0-2b}{{a_0}^2}\times\frac{2a_0-b}{{a_0}^2}\right)\qquad c=\left(3-\frac{b}{a_0}\right)\left(2-\frac{b}{a_0}\right)\qquad {a_0}^2=a$$

$$\vartheta=4\rightarrow y(z)=e^{a_0z}z^{\frac{b}{a_0}}\left(1-\frac{1}{z}\times\frac{3\,(2a_0-b)}{{a_0}^2}+\frac{1}{z^2}\times\frac{5\,a_0-2b}{2\,{a_0}^2}\times\frac{3\,(2a_0-b)}{{a_0}^2}-\frac{1}{z^3}\times\frac{3\,a_0-b}{3\,{a_0}^2}\times\frac{5\,a_0-2b}{2\,{a_0}^2}\times\frac{3\,(2a_0-b)}{{a_0}^2}\right)\qquad c=\left(3-\frac{b}{a_0}\right)\left(2-\frac{b}{a_0}\right)$$

<u>Exemple E.L.Ince Chapitre 17.62, page 428</u>

Soit l'équation différentielle du second degré $y''(z)+\frac{2}{z}y'(z)-\frac{1}{z}\left(\frac{1}{4}+\frac{5}{16\,z}\right)y(z)=0$. *Le point z=0 est régulier. L'équation indicielle en ce point est* $\rho^2+\rho-\frac{5}{16}=0\Rightarrow\rho_1=\frac{1}{4}\quad\rho_2=-\frac{5}{4}$. *Cela indique qu'il est possible de développer la solution autour de z=0 sous la forme* $y(z)=z^{\rho}\sum_{l=0}^{l=1}c_l z^{l}$. *Le point z=∞ est irrégulier d'équation indicielle* $-\frac{1}{4}=0$ *soit sans solution régulière. On choisit de transformer l'équation différentielle par le changement de variable z->1/z pour se ramener au cas z=0.*

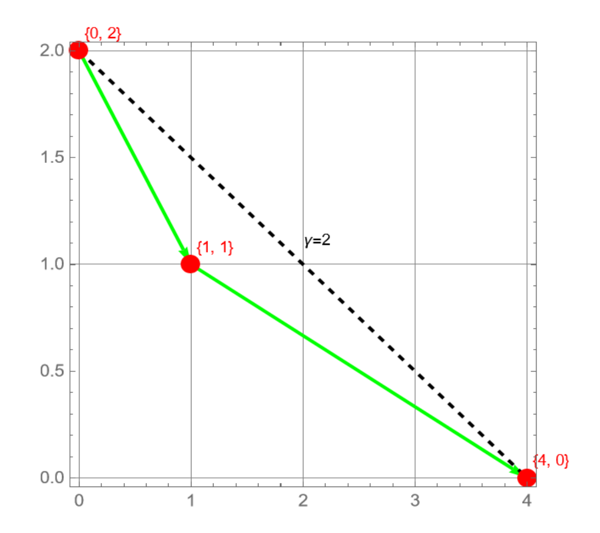
L'équation devient : $y''(z)-\frac{4+5z}{16z^3}y(z)=0$*. Cette fois pour z=0 le polygone de Newton-Puisieux est de la forme :*



L'exposant s admissible est donc s=γ-1=1/2. Il s'agit donc d'une forme subnormale. On peut réaliser le changement de variable u=√z puis u->z. Alors l'équation différentielle devient :

$$y''(z)-\frac{1}{z}y'(z)-\frac{4+5z^2}{4z^4}y(z)=0$$

Le polygone de Newton-Puisieux est de la forme :



L'exposant s admissible est donc s=γ-1=1. Ce qui est logique puisque avec le changement de variable $e^{\frac{\alpha}{\sqrt{z}}}\to e^{\frac{\alpha}{z}}$*. Ce qui conduit à proposer une forme normale comme suit :* $y(z)=e^{\Omega(z)}u(z)\quad \Omega(z)=\frac{\alpha}{z}$*. Le développement en série de l'expression* $(\Omega'(z))^2+P_1(z)(\Omega'(z))^1+P_2(z)(\Omega'(z))^0$ *autour de z=0 à l'ordre 0 donne l'expression suivante :*

$$(\Omega'(z))^2+P_1(z)(\Omega'(z))^1+P_2(z)(\Omega'(z))^0=\frac{\alpha^2-1}{z^4}+\frac{\alpha}{z^3}-\frac{5}{4z^2}+O(z)\Rightarrow\alpha^2=1$$

L'équation différentielle pour la fonction u(z) est la suivante : $u''(z) - \frac{z+2\alpha}{z^2} u'(z) + \frac{12\,\alpha\, z - 5z^2}{z^4} u(z) = 0$. *Cette équation possède bien une solution régulière dont l'équation indicielle est la suivante :* $\sigma = \frac{3}{2}$. *Le développement de la solution u(z) sous la forme* $u(z) = z^{\frac{3}{2}} \sum_{l=0}^{l=\infty} c_l z^l$ *conduit à la récurrence à deux termes suivantes :* $c_0 = 1 \qquad c_l = \frac{(l+1)(l-2)}{2\alpha\, l} c_{l-1}$ *. La récurrence s'arrête par évidence sur l=1 puisque la récurrence s'annule pour l=2, ce qui nous donne les coefficients* $c_0 = 1 \qquad c_1 = -\frac{1}{\alpha}$ *Dans ces conditions la solution de forme normale s'écrit :* $y(z) = e^{\frac{\alpha}{z}} z^{\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{z}{\alpha}\right) \quad avec \quad \alpha^2 = 1$. *En revenant aux variable originale, la solution de forme normale de l'équation différentielle* $y''(z) + \frac{2}{z} y'(z) - \frac{1}{z}\left(\frac{1}{4} + \frac{5}{16\, z}\right) y(z) = 0$ *est donc :*

$$y(z) = e^{\alpha\sqrt{z}} z^{-\frac{3}{4}} \left(1 - \frac{1}{\alpha\sqrt{z}}\right) \quad avec \quad \alpha^2 = 1$$
$$\alpha = 1 \Rightarrow y(z) = e^{\sqrt{z}} \left(z^{-\frac{3}{4}} - z^{-\frac{5}{4}}\right) \qquad \alpha = -1 \Rightarrow y(z) = e^{-\sqrt{z}} \left(z^{-\frac{3}{4}} + z^{-\frac{5}{4}}\right)$$

Exemple 1 A.R.Forsythe Chapitre 90, page 274

Soit l'équation différentielle du troisième degré suivante :

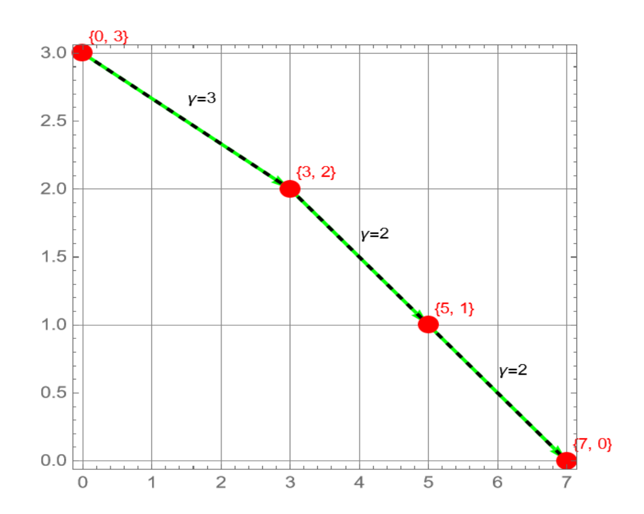
$$y^{(3)}(z) + \frac{p(z)}{z^3} y''(z) + \frac{q(z)}{z^5} y'(z) + \frac{r(z)}{z^7} y(z) = 0$$

où les trois fonctions sont holomorphes et ne s'annulent pas en z=0 de la forme :

$$p(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \ldots \quad \alpha_0 \neq 0$$
$$q(z) = \beta_0 + \beta_1 z + \ldots \quad \beta_0 \neq 0$$
$$r(z) = \gamma_0 + \gamma_1 z + \ldots \quad \gamma_0 \neq 0$$

Le point z=∞ est régulier. L'équation indicielle en ce point est $\rho^3 + 3\rho^2 + 2\rho = 0 \Rightarrow \rho = 0 \quad \rho = -1 \quad \rho = -2$. *Cela indique qu'il est possible de développer la solution autour de z=∞ sous la forme* $y(z) = z^{-\rho} \sum_{l=0}^{l=1} c_l z^{-l}$. *Le point z=0 est irrégulier d'équation indicielle* $\gamma_0 = 0$ *soit sans solution régulière.*

Le polygone de Newton-Puisieux est de la forme :



L'exposant s admissible a donc deux valeurs possibles soit s=γ-1=2 soit s=γ-1=1. Ce qui conduit à proposer une premier forme normale comme suit : $y(z)=e^{\Omega(z)}u(z) \quad \Omega(z)=\frac{a}{z}$. *Le développement en série de l'expression* $(\Omega'(z))^3+P_1(z)(\Omega'(z))^2+P_2(z)(\Omega'(z))^1+P_3(z)(\Omega'(z))^0$ *autour de z=0 à l'ordre 0 donne l'expression suivante :*

$$(\Omega'(z))^3+P_1(z)(\Omega'(z))^2+P_2(z)(\Omega'(z))^1+P_3(z)(\Omega'(z))^0=\frac{a^2\alpha_0-a\beta_0+\gamma_0}{z^7}+\ldots\Rightarrow a^2\alpha_0-a\beta_0+\gamma_0=0$$

Si l'on choisit la deuxième forme normale $y(z)=e^{\Omega(z)}u(z) \quad \Omega(z)=\frac{a}{z}+\frac{b}{z^2}$. *Le développement en série de l'expression* $(\Omega'(z))^3+P_1(z)(\Omega'(z))^2+P_2(z)(\Omega'(z))^1+P_3(z)(\Omega'(z))^0$ *autour de z=0 à l'ordre 0 donne l'expression suivante :*

$$(\Omega'(z))^3+P_1(z)(\Omega'(z))^2+P_2(z)(\Omega'(z))^1+P_3(z)(\Omega'(z))^0=\frac{4b^2(\alpha_0-2b)}{z^9}-\frac{2b(6ab-2a\alpha_0+\beta_0)}{z^8}+\ldots\Rightarrow\begin{cases}b=\frac{\alpha_0}{2}\\ a=-\frac{\beta_0}{\alpha_0}\end{cases}$$

Pour fixer les idées « simplifions » la forme des fonctions holomorphes à des simples constantes, soit : $p(z)=\alpha_0 \quad q(z)=\beta_0 \quad r(z)=\gamma_0$.

Avec la première forme normale $y(z)=e^{\frac{a}{z}}u(z)$ *l'équation différentielle devient :*

$$u^{(3)}(z)+\frac{\alpha_0-3a\,z}{z^3}u''(z)+\frac{\alpha_0\beta_0-2a\alpha_0^{\,2}+3(a\beta_0-\gamma_0)\,z+6a\alpha_0z^2}{\alpha_0z^5}u'(z)+\frac{\gamma_0(a\alpha_0+\beta_0+6\alpha_0z)-a\left(\beta_0^{\,2}-2\alpha_0^{\,3}+6\alpha_0\beta_0\,z+6\alpha_0z^2\right)}{\alpha_0^{\,2}z^6}u(z)=0$$

u(z) admet une solution régulière dont l'exposant indicielle a la valeur : $\sigma=\frac{\beta_0\gamma_0+a\left(2\alpha_0^{\,3}-\beta_0^{\,2}+\alpha_0\gamma_0\right)}{\alpha_0^{\,2}(2a\alpha_0-\beta_0)}$.

L'injection d'un développement de la forme : $u(z)=z^\sigma\sum_{l=0}^{l=+\infty}c_lz^l$ *donne une récurrence à 4 termes que je ne reproduit pas car l'expression ne se simplifie pas. La question de l'existence d'une forme normale se ramène donc à celle de la convergence du développement de u(z).*

Avec la deuxième forme normale $y(z)=e^{-\frac{\beta_0}{\alpha_0 z}+\frac{\alpha_0}{2z^2}}u(z)$ *l'équation différentielle devient :*

$$u^{(3)}(z)+\frac{3z\beta_0-3\alpha_0^{\,2}}{\alpha_0 z^3}u''(z)+\frac{\alpha_0^{\,4}-6z^3\alpha_0\beta_0-3z\alpha_0^{\,2}\beta_0+3z^2\left(3\alpha_0^{\,3}+\beta_0^{\,2}\right)}{\alpha_0^{\,2}z^6}u'(z)+\frac{6z^3\alpha_0^{\,2}\beta_0-6z^2\alpha_0\left(2\alpha_0^{\,3}+\beta_0^{\,2}\right)+z\beta_0\left(13\alpha_0^{\,3}+\beta_0^{\,2}\right)-\alpha_0^{\,2}\left(6\alpha_0^{\,3}+\beta_0^{\,2}-\alpha_0\gamma_0\right)}{\alpha_0^{\,3}z^7}u(z)=0$$

u(z) admet une solution régulière dont l'exposant indicielle a la valeur : $\sigma=6+\frac{\beta_0^{\,2}}{\alpha_0^{\,3}}-\frac{\gamma_0}{\alpha_0^{\,2}}$. *L'injection d'un développement de la forme :* $u(z)=z^{\sigma}\sum_{l=0}^{l=+\infty}c_l z^l$ *donne une récurrence à 5 termes que je ne reproduit pas car l'expression ne se simplifie pas. La question de l'existence d'une forme normale se ramène donc à celle de la convergence du développement de u(z).*

<u>Exemple 2 A.R.Forsythe Chapitre 90, page 274</u>

Soit l'équation différentielle du troisième degré suivante :

$$y^{(3)}(z)+\frac{p(z)}{z^2}y''(z)+\frac{q(z)}{z^5}y'(z)+\frac{r(z)}{z^6}y(z)=0$$

où les trois fonctions sont holomorphes et ne s'annulent pas en z=0 de la forme :

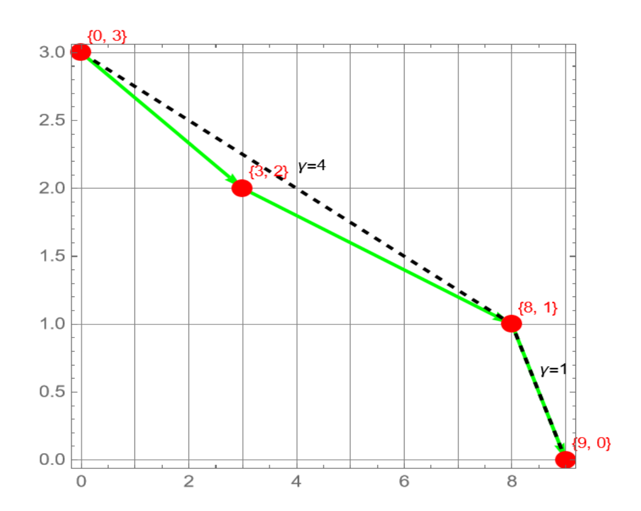
$$\begin{aligned}
p(z)&=\alpha_0+\alpha_1 z+\ldots \quad \alpha_0\neq 0\\
q(z)&=\beta_0+\beta_1 z+\ldots \quad \beta_0\neq 0\\
r(z)&=\gamma_0+\gamma_1 z+\ldots \quad \gamma_0\neq 0
\end{aligned}$$

Le point z=∞ est régulier. L'équation indicielle en ce point est $\rho^3+3\rho^2+2\rho=0\Rightarrow\rho=0\quad\rho=-1\quad\rho=-2$. *Cela indique qu'il est possible de développer la solution autour de z=∞ sous la forme* $y(z)=z^{-\rho}\sum_{l=0}^{l=1}c_l z^{-l}$ *. Le point z=0 est irrégulier d'équation indicielle* $\gamma_0+\beta_0\rho=0\rightarrow\rho=-\frac{\gamma_0}{\beta_0}$ *soit avec une solution régulière, comme le montre le polygone de Newton-Puisieux avec deux valeurs de pentes possibles :*

L'exposant s admissible a donc deux valeurs possibles soit s=γ-1=3/2 soit s=γ-1=0. Ce qui conduit à proposer une forme normale comme suit : $y(z)=e^{\Omega(z)}u(z)\quad \Omega(z)=\frac{a}{\sqrt{z}}+\frac{b}{z\sqrt{z}}$*, ainsi que la solution régulière. Comme une des valeurs possibles de la puissance s est demi-entière, il s'agit d'une solution subnormale. Il est alors plus commode d'effectuer le changement de variable u=√z puis u->z, pour obtenir des puissances entières. L'équation différentielle devient alors la suivante en simplifiant les trois fonctions holomorphes :* $p(z)=\alpha_0\quad q(z)=\beta_0\quad r(z)=\gamma_0$ *:*

$$y^{(3)}(z)+\frac{2\alpha_0-3z^2}{z^2}y''(z)+\frac{4\beta_0-2\alpha_0 z^4+3z^6}{z^8}y'(z)+\frac{8\gamma_0}{z^9}y(z)=0$$

Et le polygone de Newton-Puisieux présente toujours deux valeurs de pentes possibles :



La forme subnormale a donc comme terme exponentiel $y(z)=e^{\Omega(z)}u(z)\quad \Omega(z)=\frac{a}{z}+\frac{b}{z^2}+\frac{c}{z^3}$ *et le développement en série de l'expression* $(\Omega'(z))^3+P_1(z)(\Omega'(z))^2+P_2(z)(\Omega'(z))^1+P_3(z)(\Omega'(z))^0$ *autour de z=0 à l'ordre 0 permet de fixer les valeurs des paramètres a,b et c :*

$$(\Omega'(z))^3+P_1(z)(\Omega'(z))^2+P_2(z)(\Omega'(z))^1+P_3(z)(\Omega'(z))^0=-3c\frac{9c^2+4\beta_0}{z^{12}}+\frac{-54bc^2+18c^2\alpha_0-8b\beta_0}{z^{11}}+\frac{-36b^2c-27ac^2+24bc\alpha_0-4a\beta_0}{z^{10}}+O\left(\frac{1}{z^9}\right)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}9c^2+4\beta_0=0\rightarrow c^2=-\frac{4}{9}\beta_0\\ -54bc^2+18c^2\alpha_0-8b\beta_0=0\rightarrow b=\frac{\alpha_0}{2}\\ -36b^2c-27ac^2+24bc\alpha_0-4a\beta_0=0\rightarrow a=-3\frac{c\alpha_0^{\ 2}}{8\beta_0}\end{cases}$$

En insérant le terme exponentiel $y(z)=e^{-3\frac{c\alpha_0^2}{8\beta_0}\frac{1}{z}+\frac{\alpha_0}{2}\frac{1}{z^2}+\frac{c}{z^3}}u(z)$ *on obtient une équation différentielle du troisième degré qui possède une solution régulière. L' équation différentielle est de la forme :*

$$u^{(3)}(z)+P_1(z)u''(z)+P_2(z)u'(z)+P_3(z)u(z)=0$$

$$P_1(z)=\frac{-8z\,(3\,z^2+\alpha_0)+9\,c\left(-8+\dfrac{z^2\,\alpha_0^2}{\beta_0}\right)}{8z^4}$$

$$P_2(z)=\frac{48\,z^6\,\beta_0+32\,z^2\,\alpha_0^2\,\beta_0-128\,\beta_0^2+z^4\left(-3\,\alpha_0^4+208\,\alpha_0\beta_0\right)-12\,c\,z\left(6\,z^4\,\alpha_0^2+z^2\left(\alpha_0^3-72\,\beta_0\right)-8\,\alpha_0\beta_0\right)}{16\,z^8\beta_0}$$

$$P_3(z)=\frac{3\,c\left(240\,z^5\,\alpha_0^2\,\beta_0+8\,z\,\alpha_0\left(\alpha_0^3-272\,\beta_0\right)\beta_0-z^3\left(\alpha_0^6-240\,\alpha_0^3\beta_0+4480\,\beta_0^2\right)\right)+8\,\beta_0\left(z^4\left(9\,\alpha_0^4-384\,\alpha_0\beta_0\right)+z^2\left(\alpha_0^5-256\,\alpha_0^2\,\beta_0\right)+64\,\beta_0\left(15\,\beta_0+2\,\gamma_0\right)\right)}{128\,z^9\beta_0^2}$$

Et l'équation indicielle de cette dernière donne la valeur de l'exposant pour la solution régulière :

$$(15\beta_0+2\,\gamma_0\,)-2\beta_0\sigma=0\Rightarrow\sigma=\frac{15}{2}+\frac{\gamma_0}{\beta_0}$$

L'injection d'un développement de la forme $u(z)=z^{\frac{15}{2}+\frac{\gamma_0}{\beta_0}}\sum_{l=0}^{l=+\infty}c_l z^l$*, conduit à une récurrence à 7 termes dont je ne reproduit pas ici la forme car elle fort complexe et n'apporte rien de plus au propos. Sauf à dire que je n'ai pas trouvé de combinaison évidente où le développement de la partie régulière serait fini.*

Si nous revenons à la forme subnormale, nous dirons qu'elle est la suivante :

$$y(z)=e^{-3\frac{c\alpha_0^2}{8\beta_0}\frac{1}{\sqrt{z}}+\frac{\alpha_0}{2}\frac{1}{z}+\frac{c}{z\sqrt{z}}}z^{\frac{15}{4}+\frac{\gamma_0}{2\beta_0}}\sum_{l=0}^{l=+\infty}c_l z^{\frac{l}{2}}\quad avec\quad c^2=-\frac{4}{9}\beta_0\Rightarrow c=\pm i\,\frac{2}{3}\sqrt{\beta_0}$$

Prenons maintenant la solution régulière pour voir si par hasard on ne trouverait pas un développement fini. Injectons le développement $y(z)=z^{-\frac{\gamma_0}{\beta_0}}\sum_{l=0}^{l=+\infty}c_l z^l$ *dans l'équation différentielle :*

$$y^{(3)}(z)+\frac{\alpha_0}{z^2}y''(z)+\frac{\beta_0}{z^5}y'(z)+\frac{\gamma_0}{z^6}y(z)=0$$

Il vient la récurrence à 4 termes :

$$c_{-l}=0\quad l<0\qquad c_0=1\qquad c_1=0$$

$$c_l=-\frac{1}{l\,\beta_0}\left(\alpha_0((l-2)\beta_0-\gamma_0)((l-3)\beta_0-\gamma_0)\,c_{l-2}+\frac{1}{\beta_0}((l-3)\beta_0-\gamma_0)((l-4)\beta_0-\gamma_0)((l-5)\beta_0-\gamma_0)\,c_{l-3}\right)$$

Cette récurrence est finie lorsqu'au moins trois coefficients consécutifs s'annulent pour un entier ϑ tel que : $c_{\vartheta-1} = c_{\vartheta-2} = c_{\vartheta-3} = 0$.

Dans le cas où $\alpha_0 \neq 0$*, cela n'arrive pour les valeurs :*

$$\gamma_0 = -\beta_0 \Rightarrow y(z) = z^{-\frac{\gamma_0}{\beta_0}} = z$$
$$\gamma_0 = 2\beta_0 \Rightarrow y(z) = z^{-\frac{\gamma_0}{\beta_0}}\left(1 - 3\frac{\alpha_0}{\beta_0}z^2 + \frac{8}{\beta_0}z^3\right) = z^{-2}\left(1 - 3\frac{\alpha_0}{\beta_0}z^2 + \frac{8}{\beta_0}z^3\right)$$

Dans le cas où $\alpha_0 \neq 0$ *soit pour l'équation différentielle :* $y^{(3)}(z) + \frac{\beta_0}{z^5}y'(z) + \frac{\gamma_0}{z^6}y(z) = 0$*, la récurrence s'écrit :* $\begin{array}{l} c_{-l} = 0 \quad l<0 \qquad c_0 = 1 \qquad c_1 = 0 \qquad c_2 = 0 \\ c_l = -\frac{((l-3)\beta_0 - \gamma_0)((l-4)\beta_0 - \gamma_0)((l-5)\beta_0 - \gamma_0)}{l\,\beta_0^{\,2}} c_{l-3} \end{array}$ *. Ainsi ce sont tous les indices multiples de 3 qui sont non nuls. Il vient alors une récurrence à deux termes de la forme :*

$$y(z) = z^{-\frac{\gamma_0}{\beta_0}}\sum_{l=0}^{l=+\infty} c_l z^{3l} \quad c_{-l} = 0 \quad l<0 \qquad c_0 = 1 \qquad c_l = -\frac{((3l-3)\beta_0 - \gamma_0)((3l-4)\beta_0 - \gamma_0)((3l-5)\beta_0 - \gamma_0)}{3l\,\beta_0^{\,2}} c_{l-1}$$

Le développement devient fini si $\begin{cases} \gamma_0 = (3\theta - 3)\beta_0 \\ \gamma_0 = (3\theta - 4)\beta_0 \\ \gamma_0 = (3\theta - 5)\beta_0 \end{cases}$*, ce qui arrive finalement dès que* $\gamma_0 = \tilde{\theta}\,\beta_0 \quad \tilde{\theta} \in \mathbf{N} \geq -1$.

Le cas $\gamma_0 = -\beta_0 \Rightarrow y(z) = z$ *reste trivial. Le cas* $\gamma_0 = 0 \Rightarrow y(z) = 1$ *est lui aussi trivial. Les cas les plus intéressants sont pour* $\gamma_0 = \tilde{\theta}\,\beta_0 \quad \tilde{\theta} \in \mathbf{N} > 0$*. Par exemple les trois premiers*

$$\gamma_0 = \beta_0 \Rightarrow y(z) = z^{-1}\left(1 + \frac{2}{\beta_0}z^3\right)$$
$$\gamma_0 = 2\beta_0 \Rightarrow y(z) = z^{-1}\left(1 + \frac{8}{\beta_0}z^3\right)$$
$$\gamma_0 = 3\beta_0 \Rightarrow y(z) = z^{-1}\left(1 + \frac{20}{\beta_0}z^3\right)$$

Et plus généralement la séquence suivante de valeurs de paramètres :

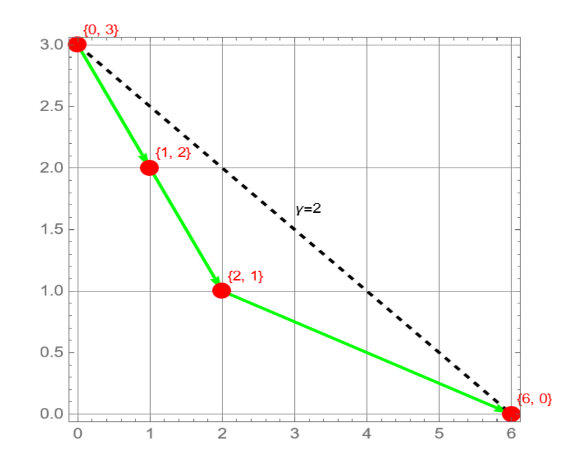
$$c_l = -\beta_0\frac{(3l-3-\tilde{\vartheta})(3l-4-\tilde{\vartheta})(3l-5-\tilde{\vartheta})}{3l}c_{l-1} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{\vartheta} = 3p-2 \Rightarrow c_l = -\beta_0\frac{(3(l-p)-1)(3(l-p)-2)(l-1-p)}{l}c_{l-1} \to y(z) = z^{-\frac{\gamma_0}{\beta_0}}\sum_{l=0}^{l=p}c_l z^{3l} \\ \tilde{\vartheta} = 3p-1 \Rightarrow c_l = -\beta_0\frac{(3(l-p)-2)(l-1-p)(3(l-p)-4)}{3l}c_{l-1} \to y(z) = z^{-\frac{\gamma_0}{\beta_0}}\sum_{l=0}^{l=p}c_l z^{3l} \\ \tilde{\vartheta} = 3p \Rightarrow c_l = -\beta_0\frac{(l-1-p)(3(l-p)-4)(3(l-p)-5)}{l}c_{l-1} \to y(z) = z^{-\frac{\gamma_0}{\beta_0}}\sum_{l=0}^{l=p}c_l z^{3l} \\ \tilde{\vartheta} = 3p+1 \Rightarrow c_l = -\beta_0\frac{(3(l-p)-4)(3(l-p)-5)(l-p-2)}{l}c_{l-1} \to y(z) = z^{-\frac{\gamma_0}{\beta_0}}\sum_{l=0}^{l=p+1}c_l z^{3l} \\ \tilde{\vartheta} = 3p+2 \Rightarrow c_l = -\beta_0\frac{(3(l-p)-5)(l-p-2)(3(l-p)-7)}{l}c_{l-1} \to y(z) = z^{-\frac{\gamma_0}{\beta_0}}\sum_{l=0}^{l=p+1}c_l z^{3l} \end{cases}$$

Exemple 3 A.R.Forsythe Chapitre 90, pages 274 et 275

Soit l'équation différentielle du troisième degré suivante :

$$\left(1+6z^3\right)y^{(3)}(z)+\frac{3}{z}y''(z)+\frac{3}{z^2}y'(z)+\frac{1+12z^3}{z^6}y(z)=0$$

Le point z=0 est irrégulier d'équation indicielle $1=0$ *soit sans solution. Le polygone de Newton-Puisieux n'indique qu'une seule valeur de pente possible :*



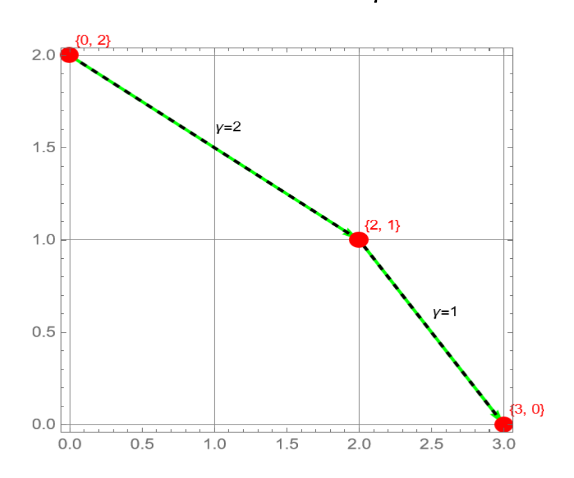
L'exposant s admissible a donc comme valeur s=γ-1=1. Ce qui conduit à proposer une forme normale comme suit : $y(z)=e^{\Omega(z)}u(z)\quad \Omega(z)=\frac{a}{z}$*. et le développement en série de l'expression* $(\Omega'(z))^3+P_1(z)(\Omega'(z))^2+P_2(z)(\Omega'(z))^1+P_3(z)(\Omega'(z))^0$ *autour de z=0 à l'ordre 0 permet de fixer la valeur du paramètre a :* $(\Omega'(z))^3+P_1(z)(\Omega'(z))^2+P_2(z)(\Omega'(z))^1+P_3(z)(\Omega'(z))^0=\frac{1-a^3}{z^6}+O\left(\frac{1}{z^5}\right)\Rightarrow a^3=1$*. En insérant le terme exponentiel* $y(z)=e^{\frac{a}{z}}u(z)\quad avec\quad a^3=1$ *on obtient une équation différentielle du troisième degré qui possède une solution régulière. L' équation différentielle est de la forme :*

$$u^{(3)}(z)-\frac{3\left(a-z+6az^3\right)}{z^2\left(1+6z^3\right)}u''(z)+\frac{3\left(z^2+12az^4+a^2\left(1+6z^3\right)\right)}{z^4\left(1+6z^3\right)}u'(z)-\frac{3\left(a\left(a+z\right)\left(1+12z^3\right)-2z^2\right)}{z^5\left(1+6z^3\right)}u(z)=0$$

Et l'équation indicielle de cette dernière donne la valeur de l'exposant pour la solution régulière : $3a^2(\sigma-1)=0\rightarrow\sigma=1$*. L'injection d'un développement de la forme* $u(z)=z\sum_{l=0}^{l=+\infty}c_l z^l$ *conduit à la récurrence sur les premiers termes :* $c_0=1\quad c_1=\frac{1}{a}\quad c_2=\frac{9(ac_1-1)}{6a^2}=0\quad c_3=\frac{6\left(c_1-a^2\right)}{3a^2}=0\quad c_4=...=0$*. Le développement est donc fini de la forme :* $u(z)=z\left(1+\frac{z}{a}\right)$*. Étant donné que le paramètre a est tel que :* $a^3=1$*, les trois valeurs 1,a et a² sont possibles. Ce qui donne les trois solutions de l'équation différentielle :* $y_1(z)=e^{\frac{1}{z}}z\,(1+z)\quad y_2(z)=e^{\frac{a}{z}}z\left(1+a^2z\right)\quad y_3(z)=e^{\frac{a^2}{z}}z\,(1+a\,z)$.

Exemple 5.1 (variante) A.R.Forsythe Chapitre 90, page 276

Soit l'équation différentielle du second degré suivante : $z^3 y''(z)+\alpha\, z\, y'(z)-y(z)=0$. *Le point z=0 est irrégulier d'équation indicielle* $1-\alpha\,\rho=0\Rightarrow\rho=\frac{1}{\alpha}$. *Il existe donc une solution régulière et une solution de forme normale. Le polygone de Newton-Puisieux indique deux valeurs de pente possibles :*



La solution de forme normale correspond à l'exposant s=γ-1=1, ce qui conduit à proposer un terme exponentiel comme suit: $y(z)=e^{\Omega(z)}u(z)$ $\Omega(z)=\frac{a}{z}$. *et le développement en série de l'expression* $(\Omega'(z))^2+P_1(z)(\Omega'(z))^1+P_2(z)(\Omega'(z))^0$ *autour de z=0 à l'ordre 0 permet de fixer la valeur du paramètre a :* $(\Omega'(z))^2+P_1(z)(\Omega'(z))^1+P_2(z)(\Omega'(z))^0=\frac{a(a-\alpha)}{z}+O(1)\Rightarrow a=\alpha$. *En insérant le terme exponentiel* $y(z)=e^{\frac{\alpha}{z}}u(z)$ *on obtient une équation différentielle du second degré qui possède une solution régulière :*

$$u''(z)-\frac{\alpha}{z^2}u'(z)+\frac{2\alpha-1}{z^3}u(z)=0$$

Et l'équation indicielle de cette dernière donne la valeur de l'exposant pour la solution régulière : $\sigma=2-\frac{1}{\alpha}$. *L'injection d'un développement de la forme* $u(z)=z^{2-\frac{1}{\alpha}}\sum_{l=0}^{l=+\infty}c_l z^l$ *conduit à la récurrence à deux termes :* $c_0=1$ $c_l=\frac{(\alpha(l+1)-1)(\alpha\, l-1)}{\alpha^3 l}c_{l-1}$. *Le développement est donc fini lorsque la condition* $\alpha\,\theta-1=0\Leftrightarrow\alpha=\frac{1}{\theta}$ *a lieu pour un entier ϑ donnée. Dans ce cas le développement est fini de la forme :*

$$y(z)=e^{\frac{1}{\theta z}}z^{2-\theta}\sum_{l=0}^{l=\theta-2}c_l z^l \qquad c_0=1 \quad c_l=\theta\times\frac{(\theta-l)(\theta-(l+1))}{l}c_{l-1}\Rightarrow c_l=\frac{\theta^l}{l!}\frac{(\theta-1)!(\theta-2)!}{(\theta-l-1)!(\theta-(l+2))!}$$

$$\theta=1\rightarrow y(z)=e^{\frac{1}{z}}z \qquad \theta=2\rightarrow y(z)=e^{\frac{1}{2z}}$$

$$\theta=3\rightarrow y(z)=e^{\frac{1}{3z}}\frac{1+6z}{z} \qquad \theta=4\rightarrow y(z)=e^{\frac{1}{4z}}\frac{1+24z+96z^2}{z^2}$$

La solution régulière correspond à un développement de la forme : $y(z)=z^{\frac{1}{\alpha}}\sum_{l=0}^{l=+\infty}c_l z^l$ *. Ce qui une fois injecté dans l'équation différentielle* $z^3y''(z)+\alpha\, z\, y'(z)-y(z)=0$ *donne pour les coefficients du développement une récurrence à deux termes :* $c_0=1\quad c_l=-\dfrac{(\alpha(l-1)+1)(\alpha(l-2)+1)}{\alpha^3 l}c_{l-1}$*. Le développement est donc fini lorsque la condition* $\alpha\,\theta+1=0\Leftrightarrow\alpha=-\dfrac{1}{\theta}$ *a lieu pour un entier ϑ donnée. Dans ce cas le développement est fini de la forme :*

$$y(z)=z^{-\theta}\sum_{l=0}^{l=\theta}c_l z^l \qquad c_0=1\quad c_l=\theta\,\frac{(\theta+1-l)(\theta+2-l)}{l}c_{l-1}\Rightarrow c_l=\frac{\theta^l}{l!}\,\frac{\theta!(\theta+1)!}{(\theta-l)!(\theta+1-l)!}$$

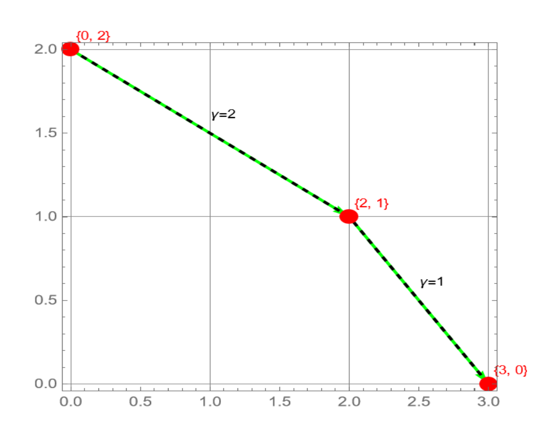
$$\theta=-1\to y(z)=z$$

$$\theta=1\to y(z)=\frac{1+2z}{z}\qquad \theta=2\to y(z)=\frac{1+12z+24z^2}{z^2}\qquad \theta=3\to y(z)=\frac{1+36z+324z^2+648z^3}{z^3}$$

$$\theta=4\to y(z)=\frac{1+80z+1920z^2+15360z^3+3720z^4}{z^4}$$

<u>Exemple 5.1 (variante) A.R.Forsythe Chapitre 90, page 276</u>

Soit l'équation différentielle du second degré suivante : $z^3y''(z)+2\,z\,y'(z)-\beta\,y(z)=0$*. Le point z=0 est irrégulier d'équation indicielle* $\beta-2\,\rho=0\Rightarrow\rho=\dfrac{\beta}{2}$*. Il existe donc une solution régulière et une solution de forme normale. Le polygone de Newton-Puisieux indique deux valeurs de pente possibles :*



La solution de forme normale correspond à l'exposant s=γ-1=1, ce qui conduit à proposer un terme exponentiel comme suit: $y(z)=e^{\Omega(z)}u(z)\quad \Omega(z)=\dfrac{a}{z}$*. et le développement en série de l'expression* $(\Omega'(z))^2+P_1(z)(\Omega'(z))^1+P_2(z)(\Omega'(z))^0$ *autour de z=0 à l'ordre 0 permet de fixer la valeur du paramètre a :* $(\Omega'(z))^2+P_1(z)(\Omega'(z))^1+P_2(z)(\Omega'(z))^0=\dfrac{a(a-2)}{z}+O(1)\Rightarrow a=2$*. En insérant le terme exponentiel* $y(z)=e^{\frac{2}{z}}u(z)$ *on obtient une équation différentielle du second degré qui possède une solution régulière :*

$$u''(z)-\frac{2}{z^2}u'(z)+\frac{4-\beta}{z^3}u(z)=0$$

Et l'équation indicielle de cette dernière donne la valeur de l'exposant pour la solution régulière : $\sigma = 2 - \frac{\beta}{2}$. *L'injection d'un développement de la forme* $u(z) = z^{2-\frac{\beta}{2}} \sum_{l=0}^{l=+\infty} c_l z^l$ *conduit à la récurrence à deux termes :* $c_0 = 1 \quad c_l = \frac{(2(l+1) - \beta)(2l - \beta)}{8l} c_{l-1}$. *Le développement est donc fini lorsque la condition* $\beta = 2\theta$ *a lieu pour un entier ϑ donnée. Dans ce cas le développement est fini de la forme :*

$$y(z) = e^{\frac{2}{z}} z^{2-\theta} \sum_{l=0}^{l=\theta-2} c_l z^l \qquad c_0 = 1 \quad c_l = \frac{(\theta - (l+1))(\theta - l)}{2l} c_{l-1} \Rightarrow c_l = \frac{1}{2^l l!} \frac{(\theta-1)!(\theta-2)!}{(\theta - l - 1)!(\theta - (l+2))!}$$

$$\theta = 1 \to y(z) = e^{\frac{2}{z}} z \qquad \theta = 2 \to y(z) = e^{\frac{2}{z}} \qquad \theta = 3 \to y(z) = e^{\frac{2}{z}} \frac{1+z}{z} \qquad \theta = 4 \to y(z) = e^{\frac{2}{z}} \frac{1 + 3z + \frac{3z^2}{2}}{z^2}$$

La solution régulière correspond à un développement de la forme $u(z) = z^{\frac{\beta}{2}} \sum_{l=0}^{l=+\infty} c_l z^l$ *. Ce qui une fois injecté dans l'équation différentielle* $z^3 y''(z) + 2\, z\, y'(z) - \beta\, y(z) = 0$ *donne pour les coefficients du développement une récurrence à deux termes :* $c_0 = 1 \quad c_l = -\frac{(2(l-2) + \beta)(2(l-1) + \beta)}{8l} c_{l-1}$ *. Le développement est donc fini lorsque la condition* $2\theta + \beta = 0 \Leftrightarrow \beta = -2\theta$ *a lieu pour un entier ϑ donnée. Dans ce cas le développement est fini de la forme :*

$$y(z) = z^{-\theta} \sum_{l=0}^{l=\theta} c_l z^l \qquad c_0 = 1 \quad c_l = -\frac{(\theta + 2 - l)(\theta + 1 - l)}{2l} c_{l-1} \Rightarrow c_l = \frac{(-1)^l}{2^l l!} \frac{\theta!(\theta+1)!}{(\theta - l)!(\theta + 1 - l)!}$$

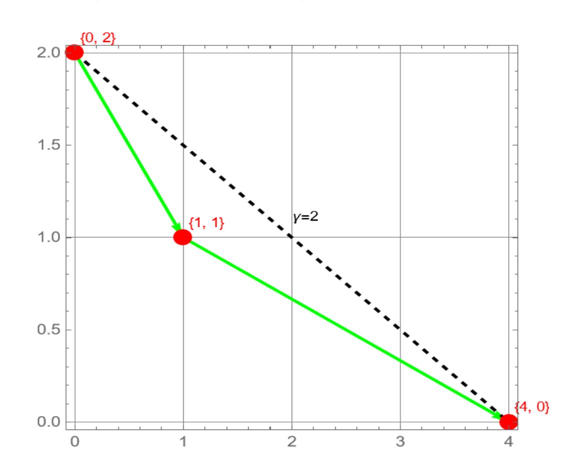
$$\theta = -1 \to y(z) = z \qquad \theta = 0 \to y(z) = 1$$

$$\theta = 1 \to y(z) = \frac{1-z}{z} \qquad \theta = 2 \to y(z) = \frac{1 - 3z + \frac{3}{2} z^2}{z^2} \qquad \theta = 3 \to y(z) = \frac{1 - 6z + 9z^2 - 3z^3}{z^3}$$

$$\theta = 4 \to y(z) = \frac{1 - 10z + 30z^2 - 30z^3 + \frac{15}{2} z^4}{z^4}$$

Exemple 5.2 A.R.Forsythe Chapitre 90, page 276

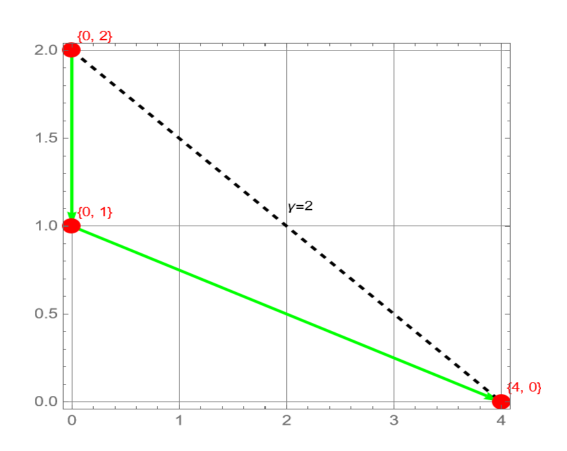
Soit l'équation différentielle du second degré suivante : $z^4 y''(z)+2\,z^3 y'(z)-\left(\alpha^2+2z^2\right)y(z)=0$. *Le point z=0 est irrégulier d'équation indicielle* $-\alpha^2=0$, *soit sans solution. Pour la solution de forme normale, le polygone de Newton-Puisieux indique la valeur de pente suivante γ=2 :*



Cela conduit à proposer un terme exponentiel comme suit: $y(z)=e^{\Omega(z)}u(z)\quad \Omega(z)=\frac{a}{z}$. *et le développement en série de l'expression* $(\Omega'(z))^2+P_1(z)(\Omega'(z))^1+P_2(z)(\Omega'(z))^0$ *autour de z=0 à l'ordre 0 permet de fixer la valeur du paramètre a :* $(\Omega'(z))^2+P_1(z)(\Omega'(z))^1+P_2(z)(\Omega'(z))^0=\frac{a^2-\alpha^2}{z^4}+O\left(\frac{1}{z^3}\right)\Rightarrow a^2=\alpha^2$. *En insérant le terme exponentiel* $y(z)=e^{\frac{a}{z}}u(z)\quad avec\quad a^2=\alpha^2$ *on obtient une équation différentielle du second degré qui possède une solution régulière :* $u''(z)+\frac{2(x-a)}{z^2}u'(z)-\frac{2}{z^2}u(z)=0$. *Et l'équation indicielle de cette dernière donne la valeur de l'exposant pour la solution régulière :* $\sigma=0$. *L'injection d'un développement de la forme* $u(z)=\sum_{l=0}^{l=+\infty}c_l z^l$ *conduit à la récurrence à deux termes :* $c_0=1\quad c_l=\frac{(l+1)(l-2)}{2\,a\,l}c_{l-1}$. *Le développement est donc fini* $c_0=1\quad c_1=-\frac{1}{a}\quad c_2=c_3=\ldots=0$. *Les solutions de formes normales sont donc :* $y_1(z)=e^{\frac{\alpha}{z}}\left(1-\frac{z}{\alpha}\right)\qquad y_2(z)=e^{-\frac{\alpha}{z}}\left(1+\frac{z}{\alpha}\right)$

Exemple 7 A.R.Forsythe Chapitre 90, page 276

Soit l'équation différentielle du second degré suivante : $4z^4y''(z)-\left(4+12z+3z^2\right)y(z)=0$. *Le point z=0 est irrégulier d'équation indicielle* $-1=0$*, soit sans solution. Pour la solution de forme normale, le polygone de Newton-Puisieux indique la valeur de pente suivante γ=2 :*



Cela conduit à proposer un terme exponentiel comme suit: $y(z)=e^{\Omega(z)}u(z)\quad \Omega(z)=\frac{a}{z}$. *et le développement en série de l'expression* $(\Omega'(z))^2+P_1(z)(\Omega'(z))^1+P_2(z)(\Omega'(z))^0$ *autour de z=0 à l'ordre 0 permet de fixer la valeur du paramètre a :* $(\Omega'(z))^2+P_1(z)(\Omega'(z))^1+P_2(z)(\Omega'(z))^0=\frac{a^2-1}{z^4}+O\left(\frac{1}{z^3}\right)\Rightarrow a^2=1$. *En insérant le terme exponentiel* $y(z)=e^{\frac{a}{z}}u(z)\quad avec\quad a^2=1$ *on obtient une équation différentielle du second degré qui possède une solution régulière :* $u''(z)-\frac{2a}{z^2}u'(z)-\frac{3z-8a-12}{4z^3}u(z)=0$. *Et l'équation indicielle de cette dernière donne la valeur de l'exposant pour la solution régulière :* $\sigma=1-\frac{3}{2a}=1-\frac{3a}{2}$.

L'injection d'un développement de la forme $u(z)=z^{1-\frac{3a}{2}}\sum_{l=0}^{l=+\infty}c_lz^l$ *conduit à la récurrence à deux termes :*

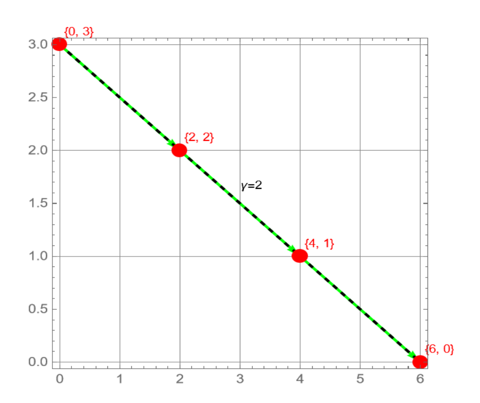
$$a=1\rightarrow c_0=1\quad c_l=\frac{(l-3)(l-1)}{2l}c_{l-1}\qquad a=-1\rightarrow c_0=1\quad c_l=-\frac{l+2}{2}c_{l-1}$$

Le développement est donc fini pour a=1 $c_0=1\quad c_1=c_2=c_3=...=0$. *L'unique solution de forme normale est :* $y_1(z)=\frac{e^{\frac{1}{z}}}{\sqrt{z}}$ *. L'autre forme normale diverge manifestement.*

Exemple 8 A.R.Forsythe Chapitre 90, page 276

Soit l'équation différentielle du troisième degré suivante : (erreur de signe dans l'édition originale du livre) : $z^6(z+2)y^{(3)}(z)+z^4(z^2+3z-2)y''(z)-z^2(z+2)\,y'(z)+(2+5z+3z^2)\,y(z)=0$

Le point z=0 est irrégulier d'équation indicielle $1=0$*, soit sans solution. Pour les solutions de forme normale, le polygone de Newton-Puisieux indique la valeur de pente suivante γ=2 :*



Cela conduit à proposer un terme exponentiel comme suit: $y(z)=e^{\Omega(z)}u(z)\quad \Omega(z)=\frac{a}{z}$*. et le développement en série de l'expression* $(\Omega'(z))^2+P_1(z)(\Omega'(z))^1+P_2(z)(\Omega'(z))^0$ *autour de z=0 à l'ordre 0 permet de fixer la valeur du paramètre a :* $(\Omega'(z))^2+P_1(z)(\Omega'(z))^1+P_2(z)(\Omega'(z))^0=-2(a+1)^2(a-1)+O(z)\Rightarrow a^2=1$*. En insérant le terme exponentiel* $y(z)=e^{\frac{a}{z}}u(z)\quad avec\quad a^2=1$ *on obtient une équation différentielle du troisième degré qui possède une solution régulière :*

$$u^{(3)}(z)+\frac{z^2+3z-2-3a(2+z)}{z^2(2+z)}u''(z)+2\,\frac{2+z+a(2+3z+z^2)}{z^4(2+z)}u'(z)-2\,\frac{2+z+a(2+3z+z^2)}{z^5(2+z)}u(z)=0$$

Et l'équation indicielle de cette dernière donne la valeur de l'exposant pour la solution régulière : $\sigma=1$*. L'injection d'un développement de la forme* $u(z)=z\sum_{l=0}^{l=+\infty}c_l z^l$ *conduit une expression fort simple des coefficients puisque u(z)=z est évidemment solution de l'équation différentielle du troisième degré.*

$$y_1(z)=z\,e^{\frac{1}{z}}\quad y_2(z)=z\,e^{-\frac{1}{z}}$$

La troisième forme normale est à choisir dans l'expression $y(z)=z\,e^{-\frac{1}{z}}Log(z)\sum_{l=0}^{l=+\infty}c_l z^l$ *puisque pour a=-1 l'équation différentielle précédente s'écrit :* $u^{(3)}(z)+\frac{4+6z+z^2}{z^2(2+z)}u''(z)-4\frac{1+z}{z^3(2+z)}u'(z)+4\frac{1+z}{z^4(2+z)}u(z)=0$ *et que l'équation indicielle de cette dernière est* $(\sigma+1)^2=0$*, soit que l'exposant σ=-1 est une racine double. En remplaçant u(z)=z v(z) et a=-1, il vient :*

$$v^{(3)}(z)+4\frac{1+3z+z^2}{z^2(2+z)}v''(z)+2\frac{2+4z+z^2}{z^3(2+z)}v'(z)=0\Rightarrow v(z)=Log(z)$$
$$\Rightarrow\frac{2}{z^3}+\frac{4+8z+2z^2-4-12z-4z^2}{z^4(2+z)}=\frac{2}{z^3}-2z\frac{2+z}{z^4(2+z)}=\frac{2}{z^3}-\frac{2}{z^3}=0$$

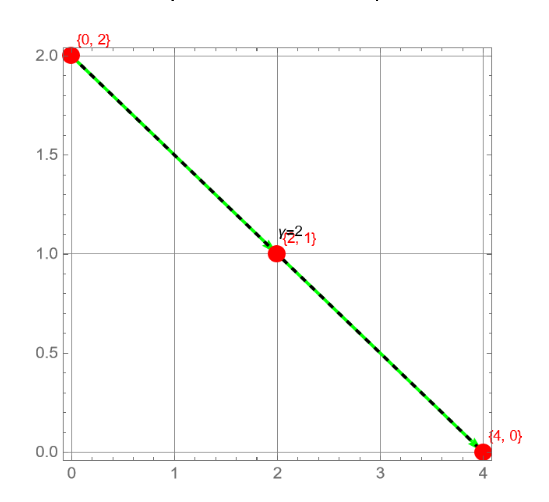
Les trois solutions de forme normale sont donc : $y_1(z)=z\,e^{\frac{1}{z}}\quad y_2(z)=z\,e^{-\frac{1}{z}}\quad y_3(z)=z\,Log(z)e^{-\frac{1}{z}}$

Exemple 2 A.R.Forsythe Chapitre 91, page 281

Soit l'équation différentielle du second degré suivante :

$$y''(z)+2\frac{\alpha+\beta z}{z^2}y'(z)+\frac{\alpha+\delta z+\varepsilon z^2+\zeta z^3+\eta z^4}{z^4}y(z)=0$$

Les points z=0 et z=∞ sont des points irréguliers essentiels. Pour les solutions de forme normale en z=0, le polygone de Newton-Puisieux indique la valeur de pente suivante γ=2 :



Cela conduit à proposer un terme exponentiel comme suit: $y(z)=e^{\Omega(z)}u(z)\quad\Omega(z)=\frac{a}{z}$*. et le développement en série de l'expression* $(\Omega'(z))^2+P_1(z)(\Omega'(z))^1+P_2(z)(\Omega'(z))^0$ *autour de z=0 à l'ordre 0 permet de fixer la valeur du paramètre a :*

$$(\Omega'(z))^2+P_1(z)(\Omega'(z))^1+P_2(z)(\Omega'(z))^0=\frac{a^2-2a\alpha+\alpha}{z^4}+O\left(\frac{1}{z^3}\right)\Rightarrow a^2-2a\alpha+\alpha=0$$

En insérant le terme exponentiel $y(z)=e^{\frac{a}{z}}u(z) \quad avec \quad a^2-2a\alpha+\alpha=0$ *on obtient une équation différentielle du second degré qui possède une solution régulière :*

$$u''(z)+2\frac{\alpha-a+z\beta}{z^2}u'(z)-\frac{\delta+\varepsilon\, z+\zeta\, z^2+\eta\, z^3-2a(\beta-1)}{z^3}u(z)=0$$

Et l'équation indicielle de cette dernière donne la valeur de l'exposant pour la solution régulière : $\sigma=\frac{2a(1-\beta)+\delta}{2(a-\alpha)}$*. L'injection d'un développement de la forme* $u(z)=z^\sigma\sum_{l=0}^{l=+\infty}c_l z^l$ *conduit une récurrence à 4 termes sur les coefficients* c_l *qui est suffisamment compliquée pour que je ne la retranscrive pas ici. A ce stade je ne vois pas de relation évidente entre les paramètres qui permettrait de conclure à un développement fini.*

Si je modifie légèrement l'équation différentielle : $y''(z)+2\frac{\alpha+\beta\, z}{z^2}y'(z)+\frac{\tilde{\gamma}+\delta\, z+\varepsilon\, z^2}{z^4}y(z)=0$ *le polygone de Newton-Puisieux indique toujours une valeur de pente γ=2 soit un terme exponetiel de la forme :* $y(z)=e^{\Omega(z)}u(z) \quad \Omega(z)=\frac{a}{z}$ *et le développement en série de l'expression* $(\Omega'(z))^2+P_1(z)(\Omega'(z))^1+P_2(z)(\Omega'(z))^0$ *autour de z=0 à l'ordre 0 permet de fixer la valeur du paramètre a :*

$$(\Omega'(z))^2+P_1(z)(\Omega'(z))^1+P_2(z)(\Omega'(z))^0=\frac{a^2-2a\alpha+\tilde{\gamma}}{z^4}+O\left(\frac{1}{z^3}\right)\Rightarrow a^2-2a\alpha+\tilde{\gamma}=0$$

En insérant le terme exponentiel $y(z)=e^{\frac{a}{z}}u(z) \quad avec \quad a^2-2a\alpha+\tilde{\gamma}=0$ *on obtient une équation différentielle du second degré qui possède une solution régulière :* $u''(z)+2\frac{\alpha-a+z\beta}{z^2}u'(z)+\frac{2a(1-\beta)+\delta+\varepsilon\, z}{z^3}u(z)=0$*. Et l'équation indicielle de cette dernière donne la valeur de l'exposant pour la solution régulière :* $\sigma=\frac{2a(1-\beta)+\delta}{2(a-\alpha)}$*. L'injection d'un développement de la forme* $u(z)=z^\sigma\sum_{l=0}^{l=+\infty}c_l z^l$ *conduit une récurrence à 2 termes sur les coefficients* c_l *qui est suffisamment compliquée pour que je ne la retranscrive pas ici. Toutefois avec les cas suivants, l'expression de la récurrence à deux termes se simplifie :*

$$\beta=\delta=\varepsilon=0\rightarrow c_0=1 \quad c_l=\frac{a\alpha(2l-1)+(l-1)((l-2)\alpha^2-l\tilde{\gamma})}{2l\,(a-\alpha)^3}c_{l-1}$$

$$\tilde{\gamma}=\alpha \quad et \quad \beta=\delta=\varepsilon=0\rightarrow c_0=1 \quad c_l=\frac{a(2l-1)+(l-1)((l-2)\tilde{\gamma}-l)}{2l\,(a-\alpha)^3}c_{l-1}$$

$$\alpha=0\rightarrow c_0=1 \quad c_l=\frac{l^2-l\left(1+\frac{a\delta}{\gamma}\right)+\beta(1-\beta)+\frac{(2a-\delta)\delta}{4\tilde{\gamma}}+\varepsilon}{2l\,a}c_{l-1}$$

$$\alpha=\delta=0\rightarrow c_0=1 \quad c_l=\frac{l(l-1)+\beta(1-\beta)+\varepsilon}{2l\,a}c_{l-1}=\frac{(l-\beta)(l-1+\beta)+\varepsilon}{2l\,a}c_{l-1}$$

$$\alpha=\delta=\varepsilon=0\rightarrow c_0=1 \quad c_l=\frac{(l-\beta)(l-1+\beta)}{2l\,a}c_{l-1}$$

Pour ces deux derniers cas, il est plus facile de déduire une contrainte sur les paramètres qui rend le développement fini. Prenons les valeurs $\alpha=\delta=0\rightarrow c_0=1 \quad c_l=\frac{(l-\beta)(l-1+\beta)+\varepsilon}{2l\,a}c_{l-1}$*. Il s'agit donc de l'équation différentielle :* $y''(z)+\frac{2\beta}{z}y'(z)+\frac{\tilde{\gamma}+\varepsilon\,z^2}{z^4}y(z)=0$ *et la condition d'arrêt de la récurrence survient lorsqu'il existe un entier* ϑ *tel que :* $\varepsilon=-(\vartheta-\beta)(\vartheta-1+\beta)$*. Le développement de la forme normale est le suivant :* $a^2=-\tilde{\gamma} \quad et \quad \sigma=1-\beta \quad et \quad \varepsilon=-(\vartheta-\beta)(\vartheta-1+\beta) \quad et \quad y(z)=e^{\frac{a}{z}}z^{1-\beta}\sum_{l=0}^{l=\vartheta-1}c_l z^l$.

Voici quelques valeurs de l'entier ϑ *et la forme normale correspondante :*

$$\vartheta=1 \quad et \quad \varepsilon=(\beta-1)\beta \quad et \quad a^2=-\tilde{\gamma}\rightarrow y(z)=e^{\frac{a}{z}}z^{1-\beta}$$

$$\vartheta=2 \quad et \quad \varepsilon=(\beta-2)(1+\beta) \quad et \quad a^2=-\tilde{\gamma}\rightarrow y(z)=e^{\frac{a}{z}}z^{1-\beta}\left(1-\frac{z}{a}\right)$$

$$\vartheta=3 \quad et \quad \varepsilon=(\beta-3)(2+\beta) \quad et \quad a^2=-\tilde{\gamma}\rightarrow y(z)=e^{\frac{a}{z}}z^{1-\beta}\left(1+\frac{3\,a}{\tilde{\gamma}}z-\frac{3}{\tilde{\gamma}}z^2\right)$$

$$\vartheta=4 \quad et \quad \varepsilon=(\beta-4)(3+\beta) \quad et \quad a^2=-\tilde{\gamma}\rightarrow y(z)=e^{\frac{a}{z}}z^{1-\beta}\left(1+\frac{6\,a}{\tilde{\gamma}}z-\frac{15}{\tilde{\gamma}}z^2-\frac{15a}{\tilde{\gamma}^2}z^3\right)$$

$$\vartheta=5 \quad et \quad \varepsilon=(\beta-5)(4+\beta) \quad et \quad a^2=-\tilde{\gamma}\rightarrow y(z)=e^{\frac{a}{z}}z^{1-\beta}\left(1+\frac{10\,a}{\tilde{\gamma}}z-\frac{45}{\tilde{\gamma}}z^2-\frac{105a}{\tilde{\gamma}^2}z^3+\frac{105}{\tilde{\gamma}^2}z^4\right)$$

Le deuxième cas est tel que $\alpha=\delta=\varepsilon=0\rightarrow c_0=1 \quad c_l=\frac{(l-\beta)(l-1+\beta)}{2l\,a}c_{l-1}$*, soit pour l'équation différentielle :* $y''(z)+\frac{2\beta}{z}y'(z)+\frac{\tilde{\gamma}}{z^4}y(z)=0$ *et la condition d'arrêt de la récurrence survient lorsqu'il existe un entier* ϑ *tel que :* $\beta=\vartheta$*. Le développement de la forme normale est le suivant :* $a^2=-\tilde{\gamma} \quad et \quad \sigma=1-\beta \quad et \quad \beta=\vartheta \quad et \quad y(z)=e^{\frac{a}{z}}z^{1-\vartheta}\sum_{l=0}^{l=\vartheta-1}c_l z^l$ *. Voici quelques valeurs de l'entier* ϑ *et la forme normale correspondante :*

$$\vartheta=\beta=1 \quad et \quad a^2=-\tilde{\gamma}\rightarrow y(z)=e^{\frac{a}{z}}z^{1-\beta}$$

$$\vartheta=\beta=2 \quad et \quad a^2=-\tilde{\gamma}\rightarrow y(z)=e^{\frac{a}{z}}z^{1-\beta}\left(1-\frac{z}{a}\right)$$

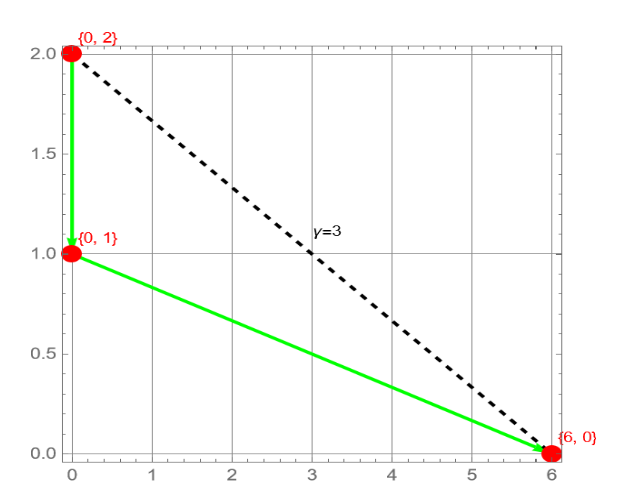
$$\vartheta=\beta=3 \quad et \quad a^2=-\tilde{\gamma}\rightarrow y(z)=e^{\frac{a}{z}}z^{1-\beta}\left(1+\frac{3\,a}{\tilde{\gamma}}z-\frac{3}{\tilde{\gamma}}z^2\right)$$

$$\vartheta=\beta=4 \quad et \quad a^2=-\tilde{\gamma}\rightarrow y(z)=e^{\frac{a}{z}}z^{1-\beta}\left(1+\frac{6\,a}{\tilde{\gamma}}z-\frac{15}{\tilde{\gamma}}z^2-\frac{15a}{\tilde{\gamma}^2}z^3\right)$$

$$\vartheta=\beta=5 \quad et \quad a^2=-\tilde{\gamma}\rightarrow y(z)=e^{\frac{a}{z}}z^{1-\beta}\left(1+\frac{10\,a}{\tilde{\gamma}}z-\frac{45}{\tilde{\gamma}}z^2-\frac{105a}{\tilde{\gamma}^2}z^3+\frac{105}{\tilde{\gamma}^2}z^4\right)$$

Exemple 4 A.R.Forsythe Chapitre 91, page 281

Soit l'équation différentielle du second degré suivante : $y''(z)-\frac{\alpha+\beta\, z^2+\tilde{\gamma}\, z^4}{z^6}y(z)=0$ *. Le point z=0 est un point irrégulier essentiel. Pour les solutions de forme normale en z=0, le polygone de Newton-Puisieux indique la valeur de pente suivante γ=3 :*



Cela conduit à proposer un terme exponentiel comme suit: $y(z)=e^{\Omega(z)}u(z)\quad \Omega(z)=\frac{a}{z}+\frac{b}{z^2}$*. et le développement en série de l'expression* $(\Omega'(z))^2+P_1(z)(\Omega'(z))^1+P_2(z)(\Omega'(z))^0$ *autour de z=0 à l'ordre 0 permet de fixer la valeur du paramètre a :*

$$(\Omega'(z))^2+P_1(z)(\Omega'(z))^1+P_2(z)(\Omega'(z))^0=\frac{4b^2-\alpha}{z^6}+\frac{4ab}{z^5}+O\left(\frac{1}{z^4}\right)\Rightarrow a=0\quad 4b^2=\alpha\Leftrightarrow b=\pm\frac{\sqrt{\alpha}}{2}=\varepsilon\frac{\sqrt{\alpha}}{2}$$

En insérant le terme exponentiel $y(z)=e^{\frac{b}{z^2}}u(z)\quad avec\quad 4b^2=\alpha$ *on obtient une équation différentielle du second degré qui possède une solution régulière :* $u''(z)-4\frac{b}{z^3}u'(z)-\frac{\tilde{\gamma}\, z^2+\beta-6b}{z^4}u(z)=0$ *. Et l'équation indicielle de cette dernière donne la valeur de l'exposant pour la solution régulière :*

$$\sigma=\frac{3}{2}-\frac{\beta}{4b}=\frac{3}{2}-\varepsilon\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}$$

L'injection d'un développement de la forme $u(z)=z^{\sigma}\sum_{l=0}^{l=+\infty}c_l z^l$ *conduit une récurrence à 2 termes sur les coefficients* c_l*:* $c_0=1\quad c_l=\varepsilon\frac{\left(l-\frac{1}{2}-\varepsilon\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}\right)\left(l-\frac{3}{2}-\varepsilon\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}\right)-\tilde{\gamma}}{2l\sqrt{\alpha}}c_{l-2}\quad avec\quad \varepsilon^2=1$ *dont finalement tous les coefficients d'ordre impairs sont nuls. En effet s'il en était autrement les ordres pairs pourraient être nuls et ce serait en contradiction avec la valeur de l'exposant de puissance fixé à* $\sigma=\frac{3}{2}-\varepsilon\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}$*.*

Avec les seuls coefficients pairs la récurrence s'écrit alors : $u(z)=z^{\sigma}\sum_{l=0}^{l=+\infty}c_l z^{2l}$ *ce qui conduit à une récurrence à 2 termes sur les coefficients* c_l *:*

$$c_0=1 \quad c_l=\varepsilon\,\frac{\left(2l-\frac{1}{2}-\varepsilon\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}\right)\left(2l-\frac{3}{2}-\varepsilon\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}\right)-\tilde{\gamma}}{4l\sqrt{\alpha}}\,c_{l-1} \quad avec \quad \varepsilon^2=1$$

Cette récurrence s'arrête donc pour un entier ϑ *tel que :* $\tilde{\gamma}=\left(2\theta-\frac{1}{2}-\varepsilon\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}\right)\left(2\theta-\frac{3}{2}-\varepsilon\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}\right)$*. Dans cette hypothèse les solutions de forme normale s'écrivent :*

$$y(z)=e^{\varepsilon\frac{\sqrt{\alpha}}{2z^2}}z^{\frac{3}{2}-\varepsilon\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}}\sum_{l=0}^{l=\theta-1}c_l z^{2l} \quad c_0=1 \quad c_l=\varepsilon\,\frac{\left(2l-\frac{1}{2}-\varepsilon\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}\right)\left(2l-\frac{3}{2}-\varepsilon\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}\right)-\tilde{\gamma}}{2l\sqrt{\alpha}}\,c_{l-1} \quad avec \quad \varepsilon^2=1$$

Voici les 4 premières valeurs de ϑ *et les formes normales correspondantes.*

$$\theta=1\rightarrow y(z)=e^{\varepsilon\frac{\sqrt{\alpha}}{2z^2}}z^{\frac{3}{2}-\varepsilon\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}}$$

$$\theta=2\rightarrow y(z)=e^{\varepsilon\frac{\sqrt{\alpha}}{2z^2}}z^{\frac{3}{2}-\varepsilon\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}}\left(1+z^2\,\frac{\beta-4\varepsilon\sqrt{\alpha}}{2\alpha}\right)$$

$$\theta=3\rightarrow y(z)=e^{\varepsilon\frac{\sqrt{\alpha}}{2z^2}}z^{\frac{3}{2}-\varepsilon\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}}\left(1+z^2\,\frac{\beta-6\varepsilon\sqrt{\alpha}}{\alpha}+z^4\,\frac{48\alpha+\beta^2-14\varepsilon\beta\sqrt{\alpha}}{4\alpha^2}\right)$$

$$\theta=3\rightarrow y(z)=e^{\varepsilon\frac{\sqrt{\alpha}}{2z^2}}z^{\frac{3}{2}-\varepsilon\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}}\left(1+z^2\,\frac{3\left(\beta-8\varepsilon\sqrt{\alpha}\right)}{2\alpha}+z^4\,\frac{3\left(80\alpha+\beta^2-18\varepsilon\beta\sqrt{\alpha}\right)}{4\alpha^2}+z^6\,\frac{296\alpha\beta+\beta^3-960\,\varepsilon\alpha\sqrt{\alpha}-30\varepsilon\beta^2\sqrt{\alpha}}{8\alpha^3}\right)$$

Avec ce type de solutions les deux formes normales ne peuvent coexister de prime abord puisque :

$$\tilde{\gamma}=\left(2\theta-\frac{1}{2}-\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}\right)\left(2\theta-\frac{3}{2}-\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}\right)\neq\left(2\theta-\frac{1}{2}+\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}\right)\left(2\theta-\frac{3}{2}+\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}\right)$$

$$ou \quad \tilde{\gamma}=\left(2\theta-\frac{1}{2}+\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}\right)\left(2\theta-\frac{3}{2}+\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}\right)\neq\left(2\theta-\frac{1}{2}-\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}\right)\left(2\theta-\frac{3}{2}-\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}\right)$$

Sauf éventuellement si β=0 et dans ce cas :

$$\tilde{\gamma}=\left(2\theta-\frac{1}{2}\right)\left(2\theta-\frac{3}{2}\right)\Rightarrow y(z)=e^{\varepsilon\frac{\sqrt{\alpha}}{2z^2}}z^{\frac{3}{2}}\sum_{l=0}^{l=\theta-1}c_l z^{2l}\quad c_0=1\quad c_l=\varepsilon\frac{\left(2l-\frac{1}{2}\right)\left(2l-\frac{3}{2}\right)-\tilde{\gamma}}{2l\sqrt{\alpha}}c_{l-1}\quad avec\quad \varepsilon^2=1$$

ou alors si $\tilde{\gamma}=\left(2\theta_1-\frac{1}{2}-\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}\right)\left(2\theta_1-\frac{3}{2}-\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}\right)=\left(2\theta_2-\frac{1}{2}+\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}\right)\left(2\theta_2-\frac{3}{2}+\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}\right)\quad avec\quad \theta_1\neq\theta_2$*, ce qui implique de nouvelles contraintes dont une entre β et α :* $\begin{cases}(\theta_1-\theta_2)\sqrt{\alpha}=\beta\\ \theta_1+\theta_2=1\quad \theta_1\geq 1\quad \theta_2\geq 1\Rightarrow sans\ solution\end{cases}$

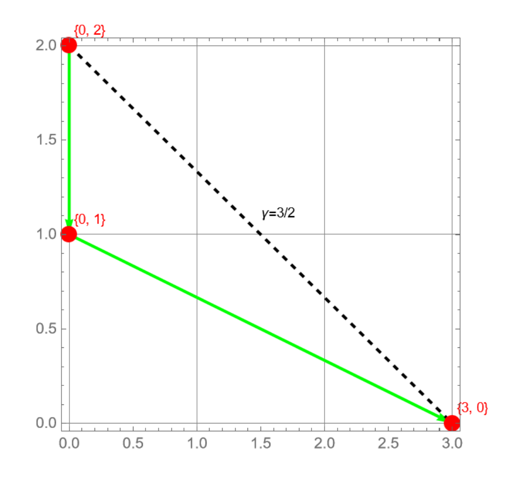
Il reste donc le cas où $\beta=(\theta_1-\theta_2)\sqrt{\alpha}\quad \theta_1\neq\theta_2$ *où les deux solutions de forme normale coexistent :*

$$\begin{cases}y''(z)-\dfrac{\alpha+\beta z^2+\tilde{\gamma}z^4}{z^6}y(z)=0\qquad \beta=2(\theta_1-\theta_2)\sqrt{\alpha}\qquad \tilde{\gamma}=\left(\theta_1+\theta_2-\frac{1}{2}\right)\left(\theta_1+\theta_2-\frac{3}{2}\right)\qquad \theta_1\neq\theta_2\\ y_1(z)=e^{\frac{\sqrt{\alpha}}{2z^2}}z^{\frac{3}{2}-\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}}\displaystyle\sum_{l=0}^{l=\theta_1-1}c_l z^{2l}\quad c_0=1\quad c_l=\frac{\left(2l-\frac{1}{2}-(\theta_1-\theta_2)\right)\left(2l-\frac{3}{2}-(\theta_1-\theta_2)\right)-\tilde{\gamma}}{2l\sqrt{\alpha}}c_{l-1}\\ y_2(z)=e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{2z^2}}z^{\frac{3}{2}+\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}}\displaystyle\sum_{l=0}^{l=\theta_2-1}c_l z^{2l}\quad c_0=1\quad c_l=-\frac{\left(2l-\frac{1}{2}+\theta_1-\theta_2\right)\left(2l-\frac{3}{2}+\theta_1-\theta_2\right)-\tilde{\gamma}}{2l\sqrt{\alpha}}c_{l-1}\end{cases}$$

Exemple 1 A.R.Forsythe Chapitre 92, page 286

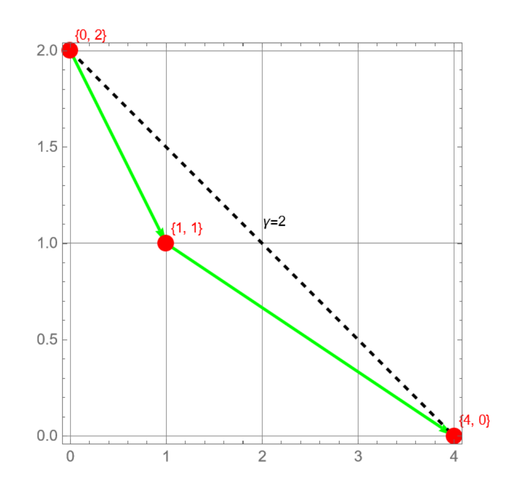
Soit l'équation différentielle du second degré suivante : $y''(z)-\frac{\beta+\tilde{\gamma}z}{z^3}y(z)=0$ *. Le point z=0 est un point irrégulier essentiel. Le point z=∞ est un point singulier régulier. L'exposant indiciel de la solution régulière en z=∞ est la suivante :* $\rho(\rho+1)=\tilde{\gamma}$ *Ce qui implique la possibilité de développer la solution sous une forme :* $y(z)=z^{-\rho}\sum_{l=0}^{l=+\infty}c_l z^{-l}$*, pour lequel ce développement doit converger. La récurrence des coefficients est la suivante :* $c_0=1\quad c_l=\frac{\beta}{l(l+1+2\rho)}c_{l-1}\Rightarrow c_l=\frac{\beta^l}{l!}\frac{\Gamma(2+2\rho)}{\Gamma(l+2+2\rho)}$*. Cette récurrence est effectivement convergente dans un rayon très grand qui inclus par exemple z=1.*

Pour les solutions de forme normale en z=0, le polygone de Newton-Puisieux indique la valeur de pente suivante γ=3/2 :



La pente étant un nombre rationnel, il convient d'effectuer le changement de variable u=√z puis u=z. L'équation différentielle par ce changement de variable devient : $y''(z)-\frac{1}{z}y'(z)-4\frac{\beta+\tilde{\gamma}\,z^2}{z^4}\,y(z)=0$.

Le polygone de Newton-Puisieux devient :



Cela conduit à proposer un terme exponentiel comme suit: $y(z)=e^{\Omega(z)}u(z)\quad \Omega(z)=\frac{a}{z}$. *et le développement en série de l'expression* $(\Omega'(z))^2+P_1(z)(\Omega'(z))^1+P_2(z)(\Omega'(z))^0$ *autour de z=0 à l'ordre 0 permet de fixer la valeur du paramètre a :*

$$(\Omega'(z))^2+P_1(z)(\Omega'(z))^1+P_2(z)(\Omega'(z))^0=\frac{a^2-4\beta}{z^4}+O\left(\frac{1}{z^3}\right)\Rightarrow a^2=4\beta\Leftrightarrow a=\pm 2\sqrt{\beta}$$

En insérant le terme exponentiel $y(z)=e^{\frac{a}{z}}u(z)\quad avec\quad a^2=4\beta$ *on obtient une équation différentielle du second degré qui possède une solution régulière :* $u''(z)-\frac{2a+x}{z^2}u'(z)+\frac{3a-4\tilde{\gamma}\,z}{z^3}u(z)=0$ *. Et l'équation indicielle de cette dernière donne la valeur de l'exposant pour la solution régulière :* $\sigma=\frac{3}{2}$

L'injection d'un développement de la forme $u(z)=z^{\frac{3}{2}}\sum_{l=0}^{l=+\infty}c_l z^l$ *conduit une récurrence à 2 termes sur les coefficients* c_l *:* $c_0=1 \quad c_l=\frac{(2l-3)(2l+1)-16\,\tilde{\gamma}}{8l\,\alpha}c_{l-1}$ *. Cette récurrence est finie lorsque le paramètre* $\tilde{\gamma}$ *est contraint par la relation ayant lieu pour un entier* ϑ *donnée :* $\tilde{\gamma}=\frac{(2\theta-1)(2\theta+3)}{16}$ *. A cette condition la récurrence s'arrête à l'indice* ϑ*. La récurrence s'écrit alors :*

$$c_0=1 \quad c_l=\frac{(2l-3)(2l+1)-(2\theta-1)(2\theta+3)}{8l\,\alpha}c_{l-1}=-\frac{(\theta+1-l)(l+\theta)}{2l\,\alpha}c_{l-1}\Rightarrow c_l=(-1)^l\frac{(\theta+l)!}{2^l\alpha^l l!(\theta-l)!}.$$

D'où les deux solutions de forme normale qui coexistent :

$$y''(z)-\frac{16\beta+(2\theta-1)(2\theta+3)z}{16z^3}y(z)=0\rightarrow\begin{cases}y_1(z)=e^{\frac{2\sqrt{\beta}}{\sqrt{z}}}z^{\frac{3}{4}}\sum_{l=0}^{l=\theta}(-1)^l\frac{(\theta+l)!}{4^l\beta^{\frac{l}{2}}l!(\theta-l)!}z^{\frac{l}{2}}\\ y_2(z)=e^{-\frac{2\sqrt{\beta}}{\sqrt{z}}}z^{\frac{3}{4}}\sum_{l=0}^{l=\theta}\frac{(\theta+l)!}{4^l\beta^{\frac{l}{2}}l!(\theta-l)!}z^{\frac{l}{2}}\end{cases}$$

Revenons à la considération sur la solution régulière en z=∞. L'exposant ρ suit l'équation indicielle : $\rho(\rho+1)=\tilde{\gamma}$*, soit encore les deux valeurs possibles en correspondance avec les solutions de forme normale :*

$$16\rho(\rho+1)=(2\theta-1)(2\theta+3)\Leftrightarrow(4\rho+2\theta+3)(4\rho-2\theta+1)=0\Rightarrow\begin{cases}\rho=-\frac{\theta}{2}-\frac{3}{4}\\ \rho=\frac{\theta}{2}-\frac{1}{4}=\frac{\theta+1}{2}-\frac{3}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\rho=\frac{\sigma+\theta}{2}\\ -\rho=\frac{\sigma-\theta-1}{2}\end{cases}$$

La relation entre solutions de forme normale et solutions régulières une seule racine indicielle régulière (la première) correspond donc aux formes normales décrites :

$$\text{Comme}\quad\frac{\sigma+k}{p}=-\rho\quad et\quad-\rho=\frac{\sigma+\theta}{2}\Rightarrow k=\theta$$

Par ailleurs les solutions régulières en z=∞ sont rapidement convergentes et la récurrence s'écrit :

$$c_0=1 \quad c_l=\frac{\beta}{l(l+1+2\rho)}c_{l-1}\Rightarrow c_l=\frac{\beta^l}{l!}\frac{1}{(l+1+2\rho)(l+2\rho)\ldots(2+2\rho)}=\frac{\beta^l}{l!}\frac{\Gamma(2+2\rho)}{\Gamma(l+2+2\rho)}$$

$$\rho(\rho+1)=\tilde{\gamma}\rightarrow\begin{cases}\rho_1=-\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{4\tilde{\gamma}+1}\right)\\ \rho_2=\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{4\tilde{\gamma}+1}\right)\end{cases}\quad y(z)=z^{-\rho}\sum_{l=0}^{l=+\infty}\frac{\beta^l}{l!}\frac{\Gamma(2+2\rho)}{\Gamma(l+2+2\rho)}z^{-l}$$

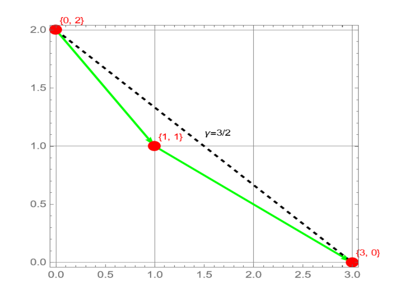
Exemple 2 A.R.Forsythe Chapitre 92, page 286

Soit l'équation différentielle du second degré suivante : $y''(z)+\frac{\mu}{z}y'(z)+\frac{\lambda}{z^3}y(z)=0$.

Le points z=0 est un point irrégulier essentiel. Le point z=∞ est un point singulier régulier. L'exposant indiciel de la solution régulière en z=∞ est la suivante : $\rho(\rho+1-\mu)=0 \Rightarrow \rho_1=0 \quad ou \quad \rho_2=\mu-1$

Ce qui implique la possibilité de développer la solution sous une forme : $y(z)=z^{-\rho}\sum_{l=0}^{l=+\infty}c_l z^{-l}$ *, pour lequel ce développement doit être fini. La récurrence des coefficients est la suivante :* $c_0=1 \quad c_l=-\frac{\lambda}{(l+\rho)(l+1-\mu+\rho)}c_{l-1} \Rightarrow c_l=(-1)^l\lambda^l\frac{\Gamma(1+\rho)\Gamma(2-\mu+\rho)}{\Gamma(l+1+\rho)\Gamma(l+2-\mu+\rho)}$*. Cette récurrence est rapidement convergente.*

Pour les solutions de forme normale en z=0, le polygone de Newton-Puisieux indique la valeur de pente suivante γ=3/2 :



La pente étant un nombre rationnel, on peut effectuer le changement de variable u=√z puis u=z. Mais raisonnons directement avec la pente γ=3/2 et l'exposant s=3/2-1=1/2, donc avec un terme exponentiel de la forme $y(z)=e^{\Omega(z)}u(z) \quad \Omega(z)=\frac{a}{\sqrt{z}} \Rightarrow \Omega'(z)=-\frac{a}{2z\sqrt{z}}$ *. Alors et le développement en série de l'expression* $(\Omega'(z))^2+P_1(z)(\Omega'(z))^1+P_2(z)(\Omega'(z))^0$ *autour de z=0 à l'ordre 0 permet de fixer la valeur du paramètre a :* $(\Omega'(z))^2+P_1(z)(\Omega'(z))^1+P_2(z)(\Omega'(z))^0=\frac{\frac{a^2}{4}+\lambda}{z^3}+O\left(\frac{1}{z^{\frac{5}{2}}}\right) \Rightarrow a^2=-4\lambda \Leftrightarrow a=\pm 2i\sqrt{\lambda}$.

En insérant le terme exponentiel $y(z)=e^{\frac{a}{\sqrt{z}}}u(z) \quad avec \quad a^2=-4\lambda$ *on obtient une équation différentielle du second degré qui doit posséder une solution régulière :* $u''(z)+\left(\frac{\mu}{z}-\frac{a}{z^{3/2}}\right)u'(z)+\frac{a(3-2\mu)}{4z^{5/2}}u(z)=0$*. Je me rend compte alors qu'il est plus simple d'effectuer le changement de variable u=√z puis u=z, auquel cas on arrive finalement à la même équation différentielle :*

$u''(z)+\left(\frac{2\mu-1}{z}-\frac{2a}{z^2}\right)u'(z)+\frac{a(3-2\mu)}{z^3}u(z)=0$*. Et l'équation indicielle de cette dernière donne la valeur de l'exposant pour la solution régulière :* $\sigma=\frac{3}{2}-\mu$ *et il ne prend qu'une unique valeur.*

L'injection d'un développement de la forme $u(z)=z^{\frac{3}{2}-\mu}\sum_{l=0}^{l=+\infty}c_l z^l$ *conduit une récurrence à 2 termes sur les coefficients* c_l*:* $c_0=1 \quad c_l=\frac{(2l-3+2\mu)(2l+1-2\mu)}{8l\,a}c_{l-1}$ *. Cette récurrence est finie lorsque 2μ est un entier impair (positif ou négatif) de telle façon que pour l'entier ϑ le produit suivant s'annule* $(2\theta-3+2\mu)(2\theta+1-2\mu)=0\Rightarrow\begin{cases}2\mu=2\theta+1\\-2\mu=2\theta-3\end{cases}$ *. A cette condition la récurrence s'arrête à l'indice ϑ-1. La récurrence s'écrit alors :*

$$\left.\begin{matrix}\mu=\frac{2\theta+1}{2}\\ \mu=\frac{3-2\theta}{2}\end{matrix}\right\}\to c_0=1 \quad c_l=-\frac{(l-\theta)(l-1+\theta)}{2l\,a}c_{l-1}\Rightarrow c_l=\frac{(-1)^l}{2^l a^l l!}\times\frac{(\theta+l-1)!}{(\theta-l-1)!}$$

D'où les deux solutions de forme normale qui coexistent :

$$y''(z)+\frac{\mu}{z}y'(z)+\frac{\lambda}{z^3}y(z)=0\to\begin{cases}y_1(z)=e^{\frac{2i\sqrt{\lambda}}{\sqrt{z}}}z^{\frac{3}{4}-\frac{\mu}{2}}\sum_{l=0}^{l=\theta-1}(-1)^l\frac{(-1)^l}{4^l i^l\lambda^{\frac{l}{2}}l!}\times\frac{(\theta+l-1)!}{(\theta-l-1)!}z^{\frac{l}{2}}\\ y_2(z)=e^{-\frac{2i\sqrt{\lambda}}{\sqrt{z}}}z^{\frac{3}{4}-\frac{\mu}{2}}\sum_{l=0}^{l=\theta-1}\frac{1}{4^l i^l\lambda^{\frac{l}{2}}l!}\times\frac{(\theta+l-1)!}{(\theta-l-1)!}z^{\frac{l}{2}}\end{cases}$$

Pour revenir aux deux exposants des solutions régulières en z=∞ : $\rho_1=0 \quad ou \quad \rho_2=\mu-1$ *. Or la relation entre les deux exposants s'écrit dans le contexte de solution subnormale :* $-\rho=\frac{\sigma+k}{2}=\frac{\frac{3}{2}-\mu+k}{2}$

En l'appliquant aux deux valeurs possibles du paramètre μ, il vient :

$$\begin{cases}\mu=\frac{1}{2}+\theta\to-\rho=\frac{\frac{3}{2}-\mu+k}{2}=\frac{2-\theta+k}{2}\to\rho=\rho_1=0\to0=\frac{2-\theta+k}{2}\Rightarrow k=\theta-2\\ \mu=\frac{3}{2}-\theta\to-\rho=\frac{\frac{3}{2}-\mu+k}{2}=\frac{\theta+k}{2}\to\rho=\rho_2=\mu-1\to\frac{\theta+k}{2}=1-\mu=-\frac{1}{2}+\theta\Rightarrow k=\theta-1\end{cases}$$

On voit donc que selon la valeur de μ, les deux solutions de forme subnormale correspondent à une seule et même solution régulière d'indice soit $\rho_1=0$ *soit* $\rho_2=\mu-1$.

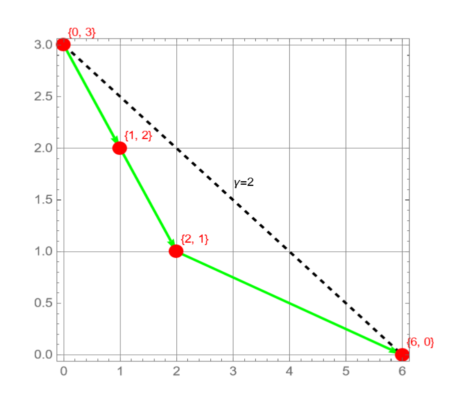
Voici les expressions des formes subnormale pour les premières valeurs de l'entier ϑ :

$$a=\pm 2i\sqrt{\lambda}\quad\begin{cases}\mu=\dfrac{2\theta+1}{2} & \begin{cases}\theta=1 \;\to y(z)=e^{\frac{a}{\sqrt{z}}}\\[2mm] \theta=2 \;\to y(z)=\dfrac{e^{\frac{a}{\sqrt{z}}}}{\sqrt{z}}\left(1-\dfrac{\sqrt{z}}{a}\right)\\[2mm] \theta=3 \;\to y(z)=\dfrac{e^{\frac{a}{\sqrt{z}}}}{z}\left(1+\dfrac{3z}{a^2}-\dfrac{3\sqrt{z}}{a}\right)\\[2mm] \theta=4 \;\to y(z)=\dfrac{e^{\frac{a}{\sqrt{z}}}}{z\sqrt{z}}\left(1-\dfrac{15z\sqrt{z}}{a^3}+\dfrac{15z}{a^2}-\dfrac{6\sqrt{z}}{a}\right)\end{cases}\\[10mm] \mu=\dfrac{3-2\theta}{2} & \begin{cases}\theta=1 \;\to y(z)=e^{\frac{a}{\sqrt{z}}}\sqrt{z}\\[2mm] \theta=2 \;\to y(z)=e^{\frac{a}{\sqrt{z}}}z\left(1-\dfrac{\sqrt{z}}{a}\right)\\[2mm] \theta=3 \;\to y(z)=e^{\frac{a}{\sqrt{z}}}z\sqrt{z}\left(1+\dfrac{3z}{a^2}-\dfrac{3\sqrt{z}}{a}\right)\\[2mm] \theta=4 \;\to y(z)=e^{\frac{a}{\sqrt{z}}}z^2\left(1-\dfrac{15z\sqrt{z}}{a^3}+\dfrac{15z}{a^2}-\dfrac{6\sqrt{z}}{a}\right)\end{cases}\end{cases}$$

<u>Exemples 1 et 7(ii) A.R.Forsythe Chapitre 100, pages 315 et 316</u>

Soit l'équation différentielle du troisième degré suivante : $y^{(3)}(z)+\frac{1-a^2}{z^2}y'(z)-\left(b^3+\frac{1-a^2}{z^3}\right)y(z)=0$.

Le points z=∞ est un point irrégulier essentiel. Par la transformation z->1/z, l'équation différentielle devient : $y^{(3)}(z)+\frac{6}{z}y''(z)+\frac{7-a^2}{z^2}y'(z)+\frac{b^3+z^3(1-a^2)}{z^6}y(z)=0$*. Le polygone de Newton-Puisieux est le suivant :*



Cela conduit à proposer un terme exponentiel comme suit: $y(z)=e^{\Omega(z)}u(z)\quad \Omega(z)=\frac{\beta}{z}$. *et le développement en série de l'expression* $(\Omega'(z))^3+P_1(z)(\Omega'(z))^2+P_2(z)(\Omega'(z))^1+P_3(z)(\Omega'(z))^0$ *autour de z=0 à l'ordre 0 permet de fixer la valeur du paramètre β :*

$$(\Omega'(z))^3+P_1(z)(\Omega'(z))^2+P_2(z)(\Omega'(z))^1+P_3(z)(\Omega'(z))^0=\frac{b^3-\beta^3}{z^6}+O\left(\frac{1}{z^5}\right)\Rightarrow \beta^3=b^3$$

En insérant le terme exponentiel $y(z)=e^{\frac{\beta}{z}}u(z)\quad avec\quad \beta^3=b^3$ *on obtient une équation différentielle du troisième degré qui possède une solution régulière :*

$$y^{(3)}(z)+\frac{6z-3\beta}{z^2}y''(z)+\frac{3\beta^2-6z\beta+\left(7-a^2\right)z^2}{z^4}y'(z)+\frac{\left(1-a^2\right)(z-\beta)}{z^4}y(z)=0$$

Et l'équation indicielle de cette dernière donne la valeur de l'exposant pour la solution régulière $\sigma=0$. *L'injection d'un développement de la forme* $u(z)=\sum_{l=0}^{l=+\infty}c_l z^l$ *conduit une récurrence à 3 termes sur les coefficients* c_l*:* $c_0=1\quad c_1=-\frac{(a+1)(a-1)}{3\beta}\quad c_l=-\frac{\beta\left(3l(1-l)+a^2-1\right)c_{l-1}+(l+a-1)(l-a-1)(l-1)c_{l-2}}{3l\beta^2}$ *. En examinant cette récurrence sur les premiers termes, il vient :*

$$c_0=1\quad c_1=-\frac{(a+1)(a-1)}{3\beta}\quad c_2=\frac{(a+1)(a+2)(a-1)(a-2)}{18\beta^2}$$
$$c_3=-\frac{(a+1)(a+2)(a-1)(a-2)\left(a^2-7\right)}{162\beta^3}\quad c_4=\frac{(a+1)^2(a+2)(a+4)(a-1)^2(a-2)(a-4)}{162\beta^3}$$

En poussant plus loin, on voit immédiatement que lorsque a est un entier positif non multiple de 3 alors la récurrence à trois termes s'annule. Lorsque a=3p+1 la récurrence s'arrête à l'indice 3p et lorsque a=3p+2 la récurrence s'arrête à l'indice 3p+1. De plus dans chaque coefficient du développement on peut factoriser le terme : $c_l=b_l\frac{(-1)^l}{3^l\beta^l l!}\times\prod_{i=1}^{i=l}(a+i)\times\prod_{i=1}^{i=l}(a-i)$. *Avec une telle substitution de coefficient la récurrence devient :* $b_0=1\quad b_1=1\quad b_l=\frac{\left(3l(1-l)+a^2-1\right)b_{l-1}+3(l-1)^2\,b_{l-2}}{(a+l)(a-l)}$

Transformons également la récurrence avec ces nouveaux coefficients :

$$b_l = \frac{d_l}{\prod_{i=1}^{i=\lfloor l/3 \rfloor}(a+3i)(a-3i)} \rightarrow d_l = \frac{\left(3l(1-l)+a^2-1\right)d_{l-1}\frac{\prod_{i=1}^{i=\lfloor l/3 \rfloor}(a+3i)(a-3i)}{\prod_{i=1}^{i=\lfloor (l-1)/3 \rfloor}(a+3i)(a-3i)} + 3(l-1)^2\, d_{l-2}\frac{\prod_{i=1}^{i=\lfloor l/3 \rfloor}(a+3i)(a-3i)}{\prod_{i=1}^{i=\lfloor (l-2)/3 \rfloor}(a+3i)(a-3i)}}{(a+l)(a-l)}$$

$$si\ l=3p \rightarrow \prod_{i=1}^{i=\lfloor l/3 \rfloor}(a+3i)(a-3i) = (a+l)(a-l)\prod_{i=1}^{i=\lfloor (l-1)/3 \rfloor}(a+3i)(a-3i) = (a+l)(a-l)\prod_{i=1}^{i=\lfloor (l-2)/3 \rfloor}(a+3i)(a-3i)$$

$$si\ l=3p+1 \rightarrow \prod_{i=1}^{i=\lfloor l/3 \rfloor}(a+3i)(a-3i) = \prod_{i=1}^{i=\lfloor (l-1)/3 \rfloor}(a+3i)(a-3i) = (a+l-1)(a-l+1)\prod_{i=1}^{i=\lfloor (l-2)/3 \rfloor}(a+3i)(a-3i)$$

$$si\ l=3p+2 \rightarrow \prod_{i=1}^{i=\lfloor l/3 \rfloor}(a+3i)(a-3i) = \prod_{i=1}^{i=\lfloor (l-1)/3 \rfloor}(a+3i)(a-3i) = \prod_{i=1}^{i=\lfloor (l-2)/3 \rfloor}(a+3i)(a-3i)$$

$$\begin{cases} d_0 = d_1 = 1 \quad d_2 = \dfrac{a^2-4}{(a+2)(a-2)} = 1 \\ si\ l=3p \rightarrow d_l = \left(3l(1-l)+a^2-1\right)d_{l-1} + 3(l-1)^2\, d_{l-2} \\ si\ l=3p+1 \rightarrow d_l = \dfrac{\left(3l(1-l)+a^2-1\right)d_{l-1} + 3(l-1)^2(a+l-1)(a-l+1)\,d_{l-2}}{(a+l)(a-l)} \\ si\ l=3p+2 \rightarrow d_l = \dfrac{\left(3l(1-l)+a^2-1\right)d_{l-1} + 3(l-1)^2\, d_{l-2}}{(a+l)(a-l)} \end{cases}$$

Les premières valeurs des coefficients d_l et la suivante :

$$d_0 = d_1 = d_2 = 1 \quad d_3 = a^2-7 \quad d_4 = (a-1)(a+1) \quad d_5 = a^2+11$$
$$d_6 = a^4-5a^2-1076 \quad d_7 = a^4+25a^2-1916 \quad d_8 = a^4+67a^2-2588$$

On voit que le coefficient d_l est un polynôme en a de la forme : $d_l = a^{2\lfloor l/3 \rfloor} + Pol\left(a^{2\lfloor l/3 \rfloor -2}\right)$*. Aussi les solutions de forme normale s'exprime ainsi :*

$$y^{(3)}(z) + \frac{1-a^2}{z^2}y'(z) - \left(b^3 + \frac{1-a^2}{z^3}\right)y(z) = 0$$

$$y(z) = e^{\beta z}\sum_{l=0}^{l=a-1}\frac{(-1)^l}{3^l\beta^l l!}\times\frac{\prod_{i=1}^{i=l}(a+i)(a-i)}{\prod_{i=1}^{i=\lfloor l/3 \rfloor}(a+3i)(a-3i)}\times d_l \times z^{-l} \Leftrightarrow y(z) = e^{\beta z}\sum_{l=0}^{l=a-1}\frac{(-1)^l}{3^l\beta^l l!}\times\prod_{i=1, Mod(i,3)\neq 0}^{i=l}(a+i)(a-i)\times d_l\times z^{-l} \quad avec \quad \beta^3 = b^3 \quad et \quad Mod(a,3)\neq 0$$

$$\begin{cases} si\ Mod(l,3)=0 \rightarrow d_l = \left(3l(1-l)+a^2-1\right)d_{l-1} + 3(l-1)^2\, d_{l-2} = \left(a^2-l^2\right)d_{l-1} + (l-1)\left(3(l-1)\,d_{l-2} - (2l-1)\,d_{l-1}\right) \\ si\ Mod(l,3)=1 \rightarrow d_l = \dfrac{\left(3l(1-l)+a^2-1\right)d_{l-1} + 3(l-1)^2(a+l-1)(a-l+1)\,d_{l-2}}{(a+l)(a-l)} = d_{l-1} + 3(l-1)^2 d_{l-2} + (l-1)(2l-1)\dfrac{3(l-1)\,d_{l-2} - d_{l-1}}{(a+l)(a-l)} \\ si\ Mod(l,3)=2 \rightarrow d_l = \dfrac{\left(3l(1-l)+a^2-1\right)d_{l-1} + 3(l-1)^2\, d_{l-2}}{(a+l)(a-l)} = d_{l-1} + (l-1)\dfrac{3(l-1)\,d_{l-2} - (2l-1)\,d_{l-1}}{(a+l)(a-l)} \end{cases}$$

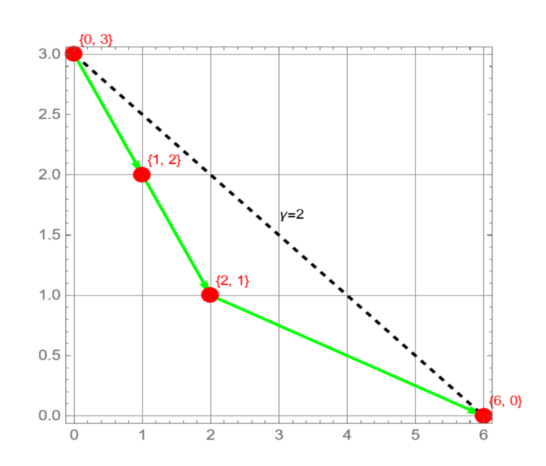
Voir les premiers développements finis de ces formes normales pour diverses valeurs de a :

$$\begin{cases} a=1 \to y(z)=e^{\beta z} \quad avec \quad \beta^3=b^3 \\ a=2 \to y(z)=e^{\beta z}\left(1-\frac{1}{\beta z}\right) \quad avec \quad \beta^3=b^3 \\ a=4 \to y(z)=e^{\beta z}\left(1-\frac{5}{\beta z}+\frac{10}{\beta^2 z^2}-\frac{10}{\beta^3 z^3}\right) \quad avec \quad \beta^3=b^3 \\ a=5 \to y(z)=e^{\beta z}\left(1-\frac{8}{\beta z}+\frac{28}{\beta^2 z^2}-\frac{56}{\beta^3 z^3}+\frac{56}{\beta^4 z^4}\right) \quad avec \quad \beta^3=b^3 \\ a=7 \to y(z)=e^{\beta z}\left(1-\frac{16}{\beta z}+\frac{120}{\beta^2 z^2}-\frac{560}{\beta^3 z^3}+\frac{1760}{\beta^4 z^4}-\frac{3520}{\beta^5 z^5}+\frac{3520}{\beta^6 z^6}\right) \quad avec \quad \beta^3=b^3 \\ a=8 \to y(z)=e^{\beta z}\left(1-\frac{21}{\beta z}+\frac{210}{\beta^2 z^2}-\frac{1330}{\beta^3 z^3}+\frac{5880}{\beta^4 z^4}-\frac{18200}{\beta^5 z^5}+\frac{36400}{\beta^6 z^6}-\frac{36400}{\beta^7 z^7}\right) \quad avec \quad \beta^3=b^3 \end{cases}$$

<u>Exemple 2 A.R.Forsythe Chapitre 100, page 315</u>

Soit l'équation différentielle du troisième degré suivante : $z^{\mu} y^{(3)}(z)-y(z)=0 \quad \mu=3\left(1-\frac{1}{n}\right)=3\frac{n-1}{n}$ *. Le point z=∞ est un point irrégulier essentiel.*

Lorsque n=3p+1, par le changement de variable : $\zeta=z^{-\frac{1}{3p+1}}$ *avec le paramètre* $\mu=3\frac{3p}{3p+1}$*, l'équation différentielle du troisième degré devient :* $y^{(3)}(\zeta)+\frac{3(3p+2)}{\zeta}y''(\zeta)+\frac{3(2+7p+6p^2)}{\zeta^2}y'(\zeta)+\frac{(3p+1)^3}{\zeta^6}y(\zeta)=0$ *pour laquelle* $\zeta=0$ *est devenu le point singulier essentiel. Au passage rebaptisons :* $\zeta \to z$*. Le diagramme de Newton-Puisieux est de la forme :*



Cela conduit à proposer un terme exponentiel comme suit: $y(z)=e^{\Omega(z)}u(z) \quad \Omega(z)=\frac{\beta}{z}$ *et le développement en série de l'expression* $(\Omega'(z))^3+P_1(z)(\Omega'(z))^2+P_2(z)(\Omega'(z))^1+P_3(z)(\Omega'(z))^0$ *autour de z=0 à l'ordre 0 permet de fixer la valeur du paramètre β :*

$$(\Omega'(z))^3+P_1(z)(\Omega'(z))^2+P_2(z)(\Omega'(z))^1+P_3(z)(\Omega'(z))^0=\frac{(1+3p)^3-\beta^3}{z^6}+O\left(\frac{1}{z^5}\right) \Rightarrow \beta^3=(1+3p)^3$$

En insérant le terme exponentiel $y(z)=e^{\frac{\beta}{z}}u(z) \quad avec \quad \beta^3=(1+3p)^3$ *on obtient une équation différentielle du troisième degré qui possède une solution régulière :*

$$u^{(3)}(z)+\frac{(6+9p)z-3\beta}{z^2}u''(z)+3\frac{(2+7p+6p^2)z^2+\beta^2-2z\beta(3p+1)}{z^4}u'(z)-\frac{3p\beta((1+6p)z-3\beta)}{z^5}u(z)=0$$

Et l'équation indicielle de cette dernière donne la valeur de l'exposant pour la solution régulière $\sigma=-3p$. *L'injection d'un développement de la forme* $u(z)=z^\sigma\sum_{l=0}^{l=+\infty}c_l z^l$ *conduit à une récurrence à trois termes :* $c_0=1 \quad c_1=-\frac{p(3p+2)}{\beta}$, $c_l=\frac{3\beta(l(l-1)-p(2+3p))c_{l-1}-(l-1)(l-2-3p)(l+3p)c_{l-2}}{3l\beta^2}$. *Cette récurrence s'arrête au terme d'indice 3p au delà tous les termes s'annulent.*

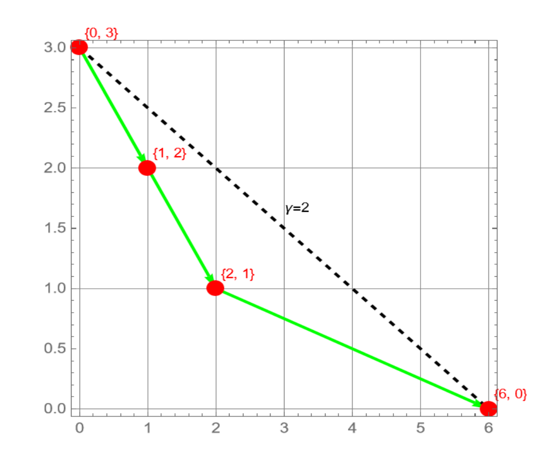
L'expression du développement de la forme normale est donc le suivant :

$$z^\mu y^{(3)}(z)-y(z)=0$$

$$\mu=3\frac{3p}{3p+1}\rightarrow y(z)=e^{\beta z^{\frac{1}{3p+1}}}z^{\frac{3p}{3p+1}}\sum_{l=0}^{l=3p}c_l z^{-\frac{l}{3p+1}} \quad avec \quad \beta^3=(3p+1)^3$$

$$c_0=1 \qquad c_1=-\frac{p(3p+2)}{\beta} \qquad c_l=\frac{3\beta(l(l-1)-p(2+3p))c_{l-1}-(l-1)(l-2-3p)(l+3p)c_{l-2}}{3l\beta^2}$$

Lorsque n=3p+2, par le changement de variable : $\zeta=z^{-\frac{1}{3p+2}}$ *avec le paramètre* $\mu=3\frac{3p+1}{3p+2}$*, l'équation différentielle du troisième degré devient :* $y^{(3)}(\zeta)+\frac{9(p+1)}{\zeta}y''(\zeta)+\frac{3(p+1)(5+6p)}{\zeta^2}y'(\zeta)+\frac{(3p+2)^3}{\zeta^6}y(\zeta)=0$ *pour laquelle* $\zeta=0$ *est devenu le point singulier essentiel. Au passage rebaptisons :* $\zeta\rightarrow z$*. Le diagramme de Newton-Puisieux est de la forme :*



Cela conduit à proposer un terme exponentiel comme suit: $y(z)=e^{\Omega(z)}u(z)\quad \Omega(z)=\frac{\beta}{z}$ *et le développement en série de l'expression* $(\Omega'(z))^3+P_1(z)(\Omega'(z))^2+P_2(z)(\Omega'(z))^1+P_3(z)(\Omega'(z))^0$ *autour de z=0 à l'ordre 0 permet de fixer la valeur du paramètre β :*

$$(\Omega'(z))^3+P_1(z)(\Omega'(z))^2+P_2(z)(\Omega'(z))^1+P_3(z)(\Omega'(z))^0=\frac{(2+3p)^3-\beta^3}{z^6}+O\left(\frac{1}{z^5}\right)\Rightarrow \beta^3=(2+3p)^3$$

En insérant le terme exponentiel $y(z)=e^{\frac{\beta}{z}}u(z)\quad avec\quad \beta^3=(2+3p)^3$ *on obtient une équation différentielle du troisième degré qui possède une solution régulière :*

$$u^{(3)}(z)+\frac{9(1+p)z-3\beta}{z^2}u''(z)+3\frac{(5+11p+6p^2)z^2+\beta^2-2z\beta(3p+2)}{z^4}u'(z)-\frac{3(3p+1)\beta((1+2p)z-\beta)}{z^5}u(z)=0$$

Et l'équation indicielle de cette dernière donne la valeur de l'exposant pour la solution régulière $\sigma=-(3p+1)$. *L'injection d'un développement de la forme* $u(z)=z^{\sigma}\sum_{l=0}^{l=+\infty}c_l z^l$ *conduit à une récurrence à trois termes :*

$$c_0=1\qquad c_1=-\frac{3p^2+4p+1}{\beta}$$
$$c_l=\frac{3\beta\,(l(l-1)-1-p(4+3p))\,c_{l-1}-(l-1)(l-3-3p)(l+1+3p)\,c_{l-2}}{3l\beta^2}$$

. Cette récurrence s'arrête au terme d'indice 3p+1 au delà tous les termes s'annulent.

L'expression du développement de la forme normale est donc le suivant :

$$z^{\mu}y^{(3)}(z)-y(z)=0$$
$$\mu=3\frac{3p+1}{3p+2}\rightarrow y(z)=e^{\beta z^{\frac{1}{3p+2}}}z^{\frac{3p+1}{3p+2}}\sum_{l=0}^{l=3p+1}c_l\,z^{-\frac{l}{3p+2}}\quad avec\quad \beta^3=(3p+2)^3$$
$$c_0=1\qquad c_1=-\frac{3p^2+4p+1}{\beta}\qquad c_l=\frac{3\beta\,(l(l-1)-1-p(4+3p))\,c_{l-1}-(l-1)(l-3-3p)(l+1+3p)\,c_{l-2}}{3l\beta^2}$$

Voici les expressions pour les deux cas $\mu = 3\,\dfrac{3p}{3p+1}$ *et* $\mu = 3\,\dfrac{3p+1}{3p+2}$ *des solutions de forme normale pour les premières valeurs de p et μ :*

$$
\begin{cases}
p=0 \quad \mu=0 \quad \beta^3=1 \to y(z)=e^{\beta z} \\
p=0 \quad \mu=\dfrac{3}{2} \quad \beta^3=8 \to y(z)=e^{\beta\sqrt{z}}\sqrt{z}\left(1-\dfrac{1}{\beta\sqrt{z}}\right) \\
p=1 \quad \mu=\dfrac{9}{4} \quad \beta^3=64 \to y(z)=e^{\beta z^{\frac{1}{4}}} z^{\frac{3}{4}}\left(1-\dfrac{5}{\beta z^{\frac{1}{4}}}+\dfrac{10}{\beta^2 z^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{10}{\beta^3 z^{\frac{3}{4}}}\right) \\
p=1 \quad \mu=\dfrac{12}{5} \quad \beta^3=125 \to y(z)=e^{\beta z^{\frac{1}{5}}} z^{\frac{4}{5}}\left(1-\dfrac{8}{\beta z^{\frac{1}{5}}}+\dfrac{28}{\beta^2 z^{\frac{2}{5}}}-\dfrac{56}{\beta^3 z^{\frac{3}{5}}}+\dfrac{56}{\beta^4 z^{\frac{4}{5}}}\right) \\
p=2 \quad \mu=\dfrac{18}{7} \quad \beta^3=343 \to y(z)=e^{\beta z^{\frac{1}{7}}} z^{\frac{6}{7}}\left(1-\dfrac{16}{\beta z^{\frac{1}{7}}}+\dfrac{120}{\beta^2 z^{\frac{2}{7}}}-\dfrac{560}{\beta^3 z^{\frac{3}{7}}}+\dfrac{1760}{\beta^4 z^{\frac{4}{7}}}-\dfrac{3520}{\beta^5 z^{\frac{5}{7}}}+\dfrac{3520}{\beta^6 z^{\frac{6}{7}}}\right) \\
p=2 \quad \mu=\dfrac{21}{8} \quad \beta^3=512 \to y(z)=e^{\beta z^{\frac{1}{8}}} z^{\frac{7}{8}}\left(1-\dfrac{21}{\beta z^{\frac{1}{8}}}+\dfrac{210}{\beta^2 z^{\frac{2}{8}}}-\dfrac{1330}{\beta^3 z^{\frac{3}{8}}}+\dfrac{5880}{\beta^4 z^{\frac{4}{8}}}-\dfrac{18200}{\beta^5 z^{\frac{5}{8}}}+\dfrac{36400}{\beta^6 z^{\frac{6}{8}}}-\dfrac{36400}{\beta^7 z^{\frac{7}{8}}}\right) \\
p=3 \quad \mu=\dfrac{27}{10} \quad \beta^3=1000 \to y(z)=e^{\beta z^{\frac{1}{10}}} z^{\frac{9}{10}}\left(1-\dfrac{33}{\beta z^{\frac{1}{10}}}+\dfrac{528}{\beta^2 z^{\frac{2}{10}}}-\dfrac{5456}{\beta^3 z^{\frac{3}{10}}}+\dfrac{40656}{\beta^4 z^{\frac{4}{10}}}-\dfrac{227920}{\beta^5 z^{\frac{5}{10}}}+\dfrac{960960}{\beta^6 z^{\frac{6}{10}}}-\dfrac{2932160}{\beta^7 z^{\frac{7}{10}}}+\dfrac{5864320}{\beta^8 z^{\frac{8}{10}}}-\dfrac{5864320}{\beta^9 z^{\frac{9}{10}}}\right) \\
p=3 \quad \mu=\dfrac{30}{11} \quad \beta^3=1331 \to y(z)=e^{\beta z^{\frac{1}{11}}} z^{\frac{10}{11}}\left(1-\dfrac{40}{\beta z^{\frac{1}{11}}}+\dfrac{780}{\beta^2 z^{\frac{2}{11}}}-\dfrac{9880}{\beta^3 z^{\frac{3}{11}}}+\dfrac{91000}{\beta^4 z^{\frac{4}{11}}}-\dfrac{640640}{\beta^5 z^{\frac{5}{11}}}+\dfrac{3494400}{\beta^6 z^{\frac{6}{11}}}-\dfrac{14560000}{\beta^7 z^{\frac{7}{11}}}+\dfrac{44262400}{\beta^8 z^{\frac{8}{11}}}-\dfrac{88524800}{\beta^9 z^{\frac{9}{11}}}+\dfrac{88524800}{\beta^{10} z^{\frac{10}{11}}}\right)
\end{cases}
$$

Remarque : dans l'exercice précédent 1 et 7(ii) A.R.Forsythe Chapitre 100, pages 315 et 316, l'équation différentielle de la partie « analytique » de la forme normale est la suivante :

$$y^{(3)}(z)+3\,\frac{2\,z-\beta}{z^2}\,y''(z)+\frac{3\beta^2-6z\beta+\left(7-a^2\right)z^2}{z^4}\,y'(z)+\frac{\left(1-a^2\right)(z-\beta)}{z^4}\,y(z)=0$$

$$a=3p+1\Rightarrow y^{(3)}(z)+3\,\frac{2\,z-\beta}{z^2}\,y''(z)+3\,\frac{\beta^2-2z\beta+\left(2-2p-3p^2\right)z^2}{z^4}\,y'(z)-\frac{3p(3p+2)(z-\beta)}{z^4}\,y(z)=0$$

$$a=3p+2\Rightarrow y^{(3)}(z)+3\,\frac{2\,z-\beta}{z^2}\,y''(z)+3\,\frac{\beta^2-2z\beta+\left(1-4p-3p^2\right)z^2}{z^4}\,y'(z)-3\,\frac{(1+3p)(p+1)(z-\beta)}{z^4}\,y(z)=0$$

Dans cet exemple 2, A.R.Forsythe Chapitre 100, page 315 en effectuant les substitutions respectives : $\sigma=-3p \quad u_1(z)=z^{\sigma}v_1(z)$; $\sigma=-(3p+1) \quad u_2(z)=z^{\sigma}v_2(z)$ *les équations différentielles des parties analytiques sont identiques :*

$$v_1^{(3)}(z)+3\,\frac{2\,z-\beta}{z^2}\,v_1''(z)+3\,\frac{\beta^2-2z\beta+\left(2-2p-3p^2\right)z^2}{z^4}\,v_1'(z)-\frac{3p(3p+2)(z-\beta)}{z^4}\,v_1(z)=0$$

$$v_2^{(3)}(z)+3\,\frac{2\,z-\beta}{z^2}\,v_2''(z)+3\,\frac{\beta^2-2z\beta+\left(1-4p-3p^2\right)z^2}{z^4}\,v_2'(z)-3\,\frac{(3p+1)(p+1)(z-\beta)}{z^4}\,v_2(z)=0$$

C'est la raison pour laquelle les coefficients des différents développements des parties « analytiques » sont identiques entre les deux exercices. Pour le reste je n'ai pas trouvé une expression plus condensée et simplifiée de ces coefficients, hormis l'expression des diverses lois de récurrence finie à trois termes. Voici la correspondance entre les fonctions de l'exemple 1 et de l'exemple 2, A.R.Forsythe Chapitre 100, pages 315 :

$$z^{\mu}y^{(3)}(z)-y(z)=0 \quad \zeta=z^{-\frac{1}{3p+1}} \quad \mu=3\,\frac{3p}{3p+1}$$

$$\to y^{(3)}(\zeta)+\frac{3\,(3p+2)}{\zeta}\,y''(\zeta)+\frac{3\left(2+7p+6\,p^2\right)}{\zeta^2}\,y'(\zeta)+\frac{(3p+1)^3}{\zeta^6}\,y(\zeta)=0$$

$$\to y(\zeta)=e^{\frac{\beta}{\zeta}}u(\zeta) \quad avec \quad \beta^3=(1+3p)^3 \to u^{(3)}(\zeta)+\frac{(6+9p)\,\zeta-3\beta}{\zeta^2}\,u''(\zeta)+3\,\frac{\left(2+7p+6\,p^2\right)\zeta^2+\beta^2-2\,\zeta\,\beta\,(3p+1)}{\zeta^4}\,u'(\zeta)-\frac{3\,p\,\beta\,((1+6p)\,\zeta-3\beta)}{\zeta^5}\,u(\zeta)=0$$

$$\to u(\zeta)=\zeta^{-3p}v(\zeta)\Rightarrow v^{(3)}(\zeta)+3\,\frac{2\,\zeta-\beta}{\zeta^2}\,v''(z)+3\,\frac{\beta^2-2\zeta\,\beta+\left(2-2p-3p^2\right)\zeta^2}{\zeta^4}\,v'(z)-\frac{3p\,(3p+2)(\zeta-\beta)}{\zeta^4}\,v(\zeta)=0$$

$$\to y(z)=e^{\beta\,z^{\frac{1}{3p+1}}}z^{\frac{3p}{3p+1}}v\left(z^{-\frac{1}{3p+1}}\right) \quad avec \quad \beta^3=(1+3p)^3$$

$$z^{\mu}y^{(3)}(z)-y(z)=0 \quad \zeta=z^{-\frac{1}{3p+2}} \quad \mu=3\,\frac{3p+1}{3p+2}$$

$$\to y^{(3)}(\zeta)+\frac{9\,(p+1)}{\zeta}\,y''(\zeta)+\frac{3\,(p+1)(5+6p)}{\zeta^2}\,y'(\zeta)+\frac{(3p+2)^3}{\zeta^6}\,y(\zeta)=0$$

$$\to y(\zeta)=e^{\frac{\beta}{\zeta}}u(\zeta) \quad avec \quad \beta^3=(2+3p)^3 \to u^{(3)}(\zeta)+\frac{9(1+p)\,z-3\beta}{\zeta^2}\,u''(\zeta)+3\,\frac{\left(5+11p+6\,p^2\right)\zeta^2+\beta^2-2\,\zeta\,\beta(3p+2)}{\zeta^4}\,u'(\zeta)-\frac{3\,(3p+1)\,\beta\,((1+2p)\,\zeta-\beta)}{\zeta^5}\,u(\zeta)=0$$

$$\to u(\zeta)=\zeta^{-(3p+1)}v(\zeta)\Rightarrow v^{(3)}(\zeta)+3\,\frac{2\,\zeta-\beta}{\zeta^2}\,v''(z)+3\,\frac{\beta^2-2\zeta\,\beta+\left(1-4p-3p^2\right)\zeta^2}{\zeta^4}\,v'(z)-3\,\frac{(3p+1)\,(p+1)(\zeta-\beta)}{\zeta^4}\,v(\zeta)=0$$

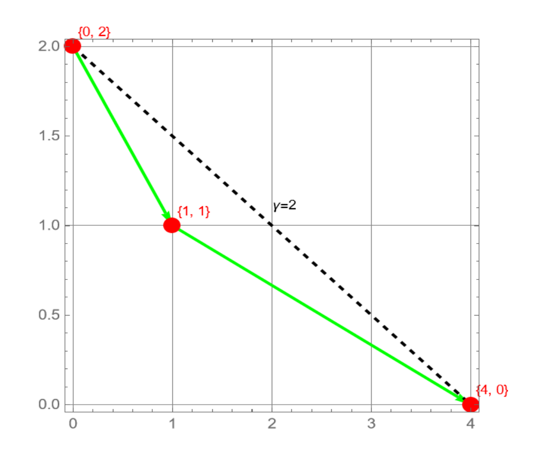
$$\to y(z)=e^{\beta\,z^{\frac{1}{3p+2}}}z^{\frac{3p+1}{3p+2}}v\left(z^{-\frac{1}{3p+2}}\right) \quad avec \quad \beta^3=(2+3p)^3$$

Exemple 3 A.R.Forsythe Chapitre 100, page 315

Soit l'équation différentielle du second degré suivante :

$$y''(z)-\frac{2z}{z^2-1}y'(z)-\left((a-n)(a+n+1)+\frac{n(n+1)}{z^2}+\frac{2a}{z^2-1}\right)y(z)=0$$

Le points z=∞ est un point irrégulier essentiel. Par le changement de variable : $z\to\frac{1}{z}$ *l'équation différentielle devient :* $y''(z)+\frac{2(2-z^2)}{z(1-z^2)}y'(z)-\frac{a^2+n(n+1)(z^2-1)-\frac{a(z^2+1)}{z^2-1}}{z^4}y(z)=0$ *pour laquelle* $z=0$ *est devenu le point singulier essentiel. Le diagramme de Newton-Puisieux est de la forme :*



Cela conduit à proposer un terme exponentiel comme suit: $y(z)=e^{\Omega(z)}u(z)\quad \Omega(z)=\frac{\beta}{z}$ *et le développement en série de l'expression* $(\Omega'(z))^2+P_1(z)(\Omega'(z))^1+P_2(z)(\Omega'(z))^0$ *autour de z=0 à l'ordre 0 permet de fixer la valeur du paramètre β :*

$$(\Omega'(z))^2+P_1(z)(\Omega'(z))^1+P_2(z)(\Omega'(z))^0=\frac{n(n+1)-a(a+1)+\beta^2}{z^4}+O\left(\frac{1}{z^3}\right)\Rightarrow \beta^2=(a-n)(a+n+1)$$

En insérant le terme exponentiel $y(z)=e^{\frac{\beta}{z}}u(z)\quad avec\quad \beta^2=(a-n)(a+n+1)$ *on obtient une équation différentielle du troisième degré qui possède une solution régulière :*

$$u''(z)+2\frac{\beta^2(1-z^2)+z^3-2z}{z^2(z^2-1)}u'(z)+\frac{2\beta+2az+z\,n(1+n)(1-z^2)}{z^3(z^2-1)}u(z)=0$$

Et l'équation indicielle de cette dernière donne la valeur de l'exposant pour la solution régulière $\sigma=-1$. *L'injection d'un développement de la forme* $u(z)=\frac{1}{z}\sum_{l=0}^{l=+\infty}c_l z^l$ *conduit à une récurrence à 4 termes de la forme :*

$$c_0=1\qquad c_1=-\frac{n(n+1)+2(1+a)}{2\beta}\qquad c_2=\frac{n(n+1)(n(n+1)+2(3+2a))}{4\beta^2}\qquad c_3=-\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)(n(n+1)+6(2+a))}{48\beta^3}$$

$$c_4=-\frac{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)(n(n+1)+4(5+2a))}{384\beta^4}$$

$$c_l=-\frac{(2(1+a)-(l+n)(l-n-1))c_{l-1}-2\beta(l-3)c_{l-2}-(l+n-3)(l-n-4)c_{l-3}}{2l\beta}$$

Les coefficients c_l peut être calculés intégralement selon l'expression suivante

$$
\begin{aligned}
&(n)_l \quad \text{symbole de Pochhammer} \quad (n)_l=\frac{\Gamma(n+l)}{\Gamma(n)} \quad (n)_{2-l}=\frac{\Gamma(n+2-l)}{\Gamma(n)}\\
&c_l=(-1)^l\times\frac{(n)_l}{(n)_{2-l}}\times\frac{(n(n+1)+2la+l(l+1))}{2^l l!\beta^l}\Leftrightarrow c_l=(-1)^l\times\frac{(n+l-1)!}{(n+1-l)!}\times\frac{(n(n+1)+2la+l(l+1))}{2^l l!\beta^l}\\
&Pour \quad n=0\rightarrow c_0=1 \quad c_1=-\frac{a+1}{\beta}
\end{aligned}
$$

Il résulte que les solutions de forme normale sont les suivantes :

$$
y(z)=e^{\beta z}z\sum_{l=0}^{l=n+1}(-1)^l\times\frac{(n+l-1)!}{(n+1-l)!}\times\frac{(n(n+1)+2la+l(l+1))}{2^l l!\beta^l}\times z^{-l} \quad avec \quad \beta^2=(a-n)(a+n+1)
$$

Voici les premières solutions de forme normale suivant la valeur de n :

$$
\begin{cases}
n=0 \quad y(z)=e^{\beta z}z\times\left(1-\dfrac{1+a}{\beta z}\right) \quad avec \quad \beta^2=a\,(a+1)\\
n=1 \quad y(z)=e^{\beta z}z\times\left(1-\dfrac{2+a}{\beta z}+\dfrac{2+a}{\beta^2z^2}\right) \quad avec \quad \beta^2=(a-1)(a+2)\\
n=2 \quad y(z)=e^{\beta z}z\times\left(1-\dfrac{4+a}{\beta z}+\dfrac{3\,(3+a)}{\beta^2z^2}-\dfrac{3\,(3+a)}{\beta^3z^3}\right) \quad avec \quad \beta^2=(a-2)(a+3)\\
n=3 \quad y(z)=e^{\beta z}z\times\left(1-\dfrac{7+a}{\beta z}+\dfrac{27+6\,a}{\beta^2z^2}-\dfrac{15\,(4+a)}{\beta^3z^3}+\dfrac{15\,(4+a)}{\beta^4z^4}\right) \quad avec \quad \beta^2=(a-3)(a+4)\\
n=4 \quad y(z)=e^{\beta z}z\times\left(1-\dfrac{11+a}{\beta z}+\dfrac{65+10\,a}{\beta^2z^2}-\dfrac{15\,(16+3a)}{\beta^3z^3}+\dfrac{105\,(5+a)}{\beta^4z^4}-\dfrac{105\,(5+a)}{\beta^5z^5}\right) \quad avec \quad \beta^2=(a-4)(a+5)
\end{cases}
$$

Au vu de la solution de forme normale, ces solutions sont parfaitement analytiques autour des points z=1 et z=-1. Dans ces conditions ces points qui peuvent apparaître comme des points singuliers au vu de l'équation différentielle de départ (« régulier » ou « irrégulier ») qui peut se réécrire ainsi:

$$
(1-z^2)y''(z)+2z\,y'(z)+\left(n\,(n+1)+(n+a)(n+1-a)-\frac{n(n+1)}{z^2}+z^2(a-n)(a+n+1)\right)y(z)=0
$$

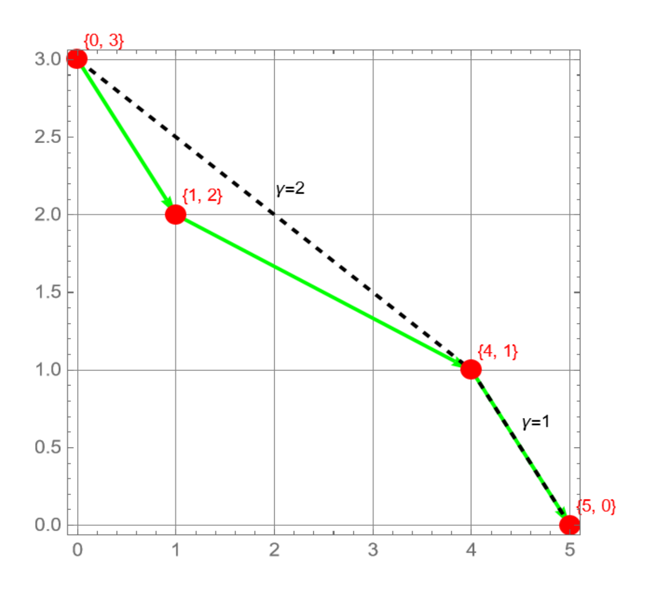
ne sont finalement que des singularités apparentes.

Exemple 4 A.R.Forsythe Chapitre 100, page 316

Soit l'équation différentielle du troisième degré suivante :

$$y^{(3)}(z)-\frac{2\,(n+1)}{z}y''(z)+\left(\frac{6n}{z^2}-a^2\right)y'(z)+\frac{2a^2}{z^2}y(z)=0$$

Le points z=∞ est un point irrégulier dont l'équation indicielle est la suivante $-a^2(\rho+2)=0$. *Cela signifie qu'il y a une solution régulière et deux solutions de forme normale. Par le changement de variable :* $z\to\frac{1}{z}$ *l'équation différentielle devient :* $y^{(3)}(z)-2\frac{n+4}{z}y''(z)+\frac{10(n+1)z^2-a^2}{z^4}y'(z)-\frac{2a^2}{z^5}y(z)=0$ *pour laquelle* $z=0$ *est devenu le point singulier essentiel. Le diagramme de Newton-Puisieux est de la forme :*



Cela conduit à proposer soit une développement de Fröbenius soit un terme exponentiel comme suit: $y(z)=e^{\Omega(z)}u(z)\quad \Omega(z)=\frac{\beta}{z}$ *et le développement en série de l'expression:*

$$(\Omega'(z))^3+P_1(z)(\Omega'(z))^2+P_2(z)(\Omega'(z))^1+P_3(z)(\Omega'(z))^0$$

autour de z=0 à l'ordre 0 permet de fixer la valeur du paramètre β, en plus de la valeur β=0 qui correspond à une développement de type Fröbenius :

$$(\Omega'(z))^3+P_1(z)(\Omega'(z))^2+P_2(z)(\Omega'(z))^1+P_3(z)(\Omega'(z))^0=\frac{\beta(a^2-\beta^2)}{z^6}+O\left(\frac{1}{z^5}\right)\Rightarrow\beta^2=a^2$$

En insérant le terme exponentiel $y(z)=e^{\frac{\beta}{z}}u(z)\quad avec\quad \beta^2=a^2$ *on obtient une équation différentielle du troisième degré qui possède une solution régulière :*

$$u^{(3)}(z)-\frac{2(n+4)z-3\beta}{z^2}u''(z)+2\frac{a^2+z(5(n+1)z-(5+2n)\beta)}{z^4}u'(z)+\frac{2n(a^2-3z\beta)}{z^5}u(z)=0$$

Et l'équation indicielle de cette dernière donne la valeur de l'exposant pour la solution régulière $\sigma=-n$.

L'injection d'un développement de la forme $u(z)=\frac{1}{z^n}\sum_{l=0}^{l=+\infty} c_l z^l$ *conduit à une récurrence à 3 termes de la forme :*

$$c_0=1 \qquad c_1=\beta\frac{n(n+1)}{2a^2} \qquad c_2=\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{2a^2} \qquad c_3=-\beta\frac{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)}{48a^4}$$

$$c_4=\frac{(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{384a^4} \quad c_5=-\beta\frac{(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}{3840a^6}$$

$$c_6=\frac{(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)}{46080a^6} \quad c_7=-\beta\frac{(n-6)(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)(n+7)}{645120a^8}$$

$$c_l=-\frac{\beta\left(3l^2+l-4+n(1-2l)-n^2\right)c_{l-1}-(l+n-1)(l-n+2)(l-n-2)c_{l-2}}{2la^2}$$

Cette récurrence est finie et s'arrête à l'indice n et les coefficients c_l *peuvent être calculés intégralement selon l'expression suivante :* $c_l=(-1)^l\beta^{Mod(l,2)}\times\frac{\prod_{i=0}^{i=l-1}(n-i)\times\prod_{i=0}^{i=l}(n+i)}{2^l\,l\,!\,a^{2\times\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor}}$ *. Il résulte que les solutions de forme normale sont les suivantes :*

$$y(z)=e^{\beta z}z^n\times\sum_{l=0}^{l=n}(-1)^l\beta^{Mod(l,2)}\times\frac{\prod_{i=0}^{i=l-1}(n-i)\times\prod_{i=0}^{i=l}(n+i)}{2^l\,l\,!\,a^{2\times\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor}}\times z^{-l}\quad avec\quad \beta^2=a^2$$

Voici les formes normales des solutions de l'équation différentielle pour les premières valeurs de n :

$$\begin{cases} n=1\rightarrow y(z)=e^{\beta z}z\times\left(1-\frac{\beta}{a^2z}\right)\quad avec\quad \beta^2=a^2\\ n=2\rightarrow y(z)=e^{\beta z}z^2\times\left(1-\frac{3\beta}{a^2z}+\frac{3}{a^2z^2}\right)\quad avec\quad \beta^2=a^2\\ n=3\rightarrow y(z)=e^{\beta z}z^3\times\left(1-\frac{6\beta}{a^2z}+\frac{15}{a^2z^2}-\frac{15\beta}{a^4z^3}\right)\quad avec\quad \beta^2=a^2\\ n=4\rightarrow y(z)=e^{\beta z}z^4\times\left(1-\frac{10\beta}{a^2z}+\frac{45}{a^2z^2}-\frac{105\beta}{a^4z^3}+\frac{105}{a^4z^4}\right)\quad avec\quad \beta^2=a^2\\ n=5\rightarrow y(z)=e^{\beta z}z^5\times\left(1-\frac{15\beta}{a^2z}+\frac{105}{a^2z^2}-\frac{420\beta}{a^4z^3}+\frac{945}{a^4z^4}-\frac{945\beta}{a^6z^5}\right)\quad avec\quad \beta^2=a^2 \end{cases}$$

En ce qui concerne la solution régulière en injectant dans l'équation différentielle de départ :

$$y^{(3)}(z)-\frac{2(n+1)}{z}y''(z)+\left(\frac{6n}{z^2}-a^2\right)y'(z)+\frac{2a^2}{z^2}y(z)=0$$

Le développement : $u(z)=z^2\sum_{l=0}^{l=+\infty}c_l z^{-l}$*, on aboutit à la récurrence à deux termes suivantes qui s'arrêt à l'indice l=2 :*

$$c_0=1 \quad c_l=\frac{l(l-4)(l+2n-3)}{l\,a^2}c_{l-2} \Rightarrow c_0=1 \quad c_1=c_3=\ldots=c_{2l+1}=0 \quad c_2=-\frac{2(2n-1)}{a^2} \quad c_4=\ldots=c_{2l}=0.$$

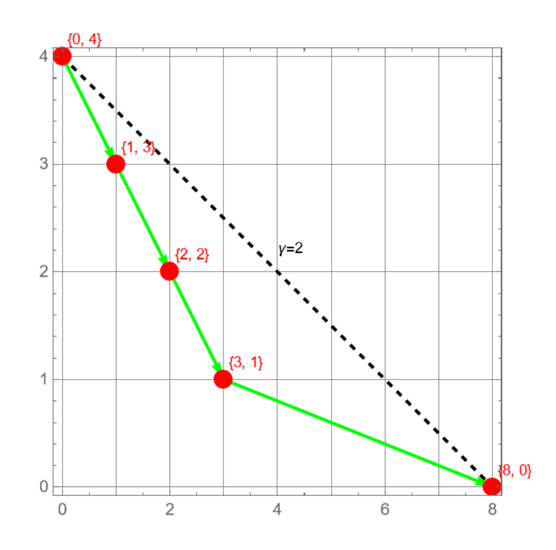
La solution régulière est donc polynomiale de la forme : $y(z)=z^2\left(1-\frac{2(2n-1)}{a^2z^2}\right)=z^2-\frac{2(2n-1)}{a^2}$

Exemple 5 A.R.Forsythe Chapitre 100, page 316 équivalent à l'exemple 5 A.R.Forsythe Chapitre 91, page 281

Soit l'équation différentielle du quatrième degré suivante :

$$y^{(4)}(z)-\frac{2\,a}{z^2}y''(z)+\frac{4\,a}{z^3}y'(z)+\left(\frac{a(a-b)}{z^4}-c^4\right)y(z)=0$$

Le points z=∞ est un point irrégulier essentiel. Par le changement de variable : $z\rightarrow\frac{1}{z}$ *l'équation différentielle devient :* $y^{(4)}(z)+\frac{12}{z}y^{(3)}(z)+\frac{36-2a}{z^2}y''(z)-8\frac{a-3}{z^3}y'(z)+\frac{a(a-b)z^4-c^4}{z^8}y(z)=0$ *pour laquelle* $z=0$ *est devenu le point singulier essentiel. Le diagramme de Newton-Puisieux est de la forme :*



Cela conduit à proposer un terme exponentiel comme suit: $y(z)=e^{\Omega(z)}u(z)\quad \Omega(z)=\frac{\beta}{z}$ *et le développement en série de l'expression:* $(\Omega'(z))^4+P_1(z)(\Omega'(z))^3+P_2(z)(\Omega'(z))^2+P_3(z)(\Omega'(z))^1+P_4(z)(\Omega'(z))^0$

autour de z=0 à l'ordre 0 permet de fixer la valeur du paramètre β :

$$(\Omega'(z))^4+P_1(z)(\Omega'(z))^3+P_2(z)(\Omega'(z))^2+P_3(z)(\Omega'(z))^1+P_4(z)(\Omega'(z))^0=\frac{\beta^4-c^4}{z^8}+O\left(\frac{1}{z^7}\right)\Rightarrow \beta^4=c^4$$

En insérant le terme exponentiel $y(z)=e^{\frac{\beta}{z}}u(z)\quad avec\quad \beta^4=c^4$ *on obtient une équation différentielle du troisième degré qui possède une solution régulière :*

$$\begin{aligned}&u^{(4)}(z)+\frac{12\,z-4\beta}{z^2}u^{(3)}(z)+\frac{6\beta^2-24\,z\beta-2z^2(a-18)}{z^2}u''(z)-\\&-4\,\frac{\beta^3-3\beta^2z+\beta(6-a)\,z^2+2(a-3)\,z^3}{z^6}\,u'(z)+\frac{a^2z^4-az^2\left(bz^2+2\beta(\beta-2z)\right)}{z^8}u(z)=0\end{aligned}$$

Et l'équation indicielle de cette dernière donne la valeur de l'exposant pour la solution régulière $\sigma=0$*. L'injection d'un développement de la forme* $u(z)=\sum_{l=0}^{l=+\infty}c_l z^l$ *conduit à une récurrence à 4 termes :*

$$\begin{cases}c_0=1\qquad c_1=-\dfrac{a}{2\beta}\qquad c_2=\dfrac{a\beta(a-2)}{8\beta^2}\\ c_l=\dfrac{-2\beta^2(a-3l(l-1))c_{l-1}-4\beta(l-1)(l(l-2)-a)\,c_{l-2}+\left(l^4-6l^3-2al^2+11l^2+6al-6l-ab+a^2\right)c_{l-3}}{4l\beta^3}\end{cases}$$

Lorsque a est fixé à a=n(n+1) et b=6 alors la récurrence est de la forme :

$$\begin{cases}c_0=1\qquad c_1=-\dfrac{n(n+1)}{2\beta}\qquad c_2=\dfrac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{8\beta^2}\\ c_l=\dfrac{2\beta^2(3l(l-1)-n(n+1))c_{l-1}-4(l-1)(l(l-2)-n(n+1))c_{l-2}+(l+n)(l+n-2)(l-n-1)(l-n-3)c_{l-3}}{4l\beta^3}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}c_3=-\dfrac{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)}{48\beta^3}\qquad c_4=\dfrac{(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{384\beta^4}\\ c_5=-\dfrac{(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}{3840\beta^5}\\ c_6=\dfrac{(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)}{46080\beta^6}\\ c_7=-\dfrac{(n-6)(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)(n+7)}{645120\beta^7}\end{cases}$$

Il s'avère que cette récurrence est finie lorsque a est le produit de deux entiers successifs et elle s'arrête à l'indice n. De plus le calcul des coefficients est explicite :

$$y(z)=e^{\beta z}\times\sum_{l=0}^{l=n}(-1)^l\times\frac{\prod_{i=0}^{i=l-1}(n-i)\times\prod_{i=0}^{i=l}(n+i)}{2^l\,l\,!\,\beta^l}\times z^{-l}\quad avec\quad \beta^4=c^4$$

Voici les quelques solutions des premières valeurs de n :

$$y^{(4)}(z)-\frac{2\,n(n+1)}{z^2}y''(z)+\frac{4\,n(n+1)}{z^3}y'(z)+\left(\frac{n(n+1)(n-2)(n+3)}{z^4}-c^4\right)y(z)=0$$

$$\begin{cases} n=1\rightarrow y(z)=e^{\beta z}\times\left(1-\frac{1}{\beta z}\right) \quad avec\quad \beta^4=c^4 \\ n=2\rightarrow y(z)=e^{\beta z}\times\left(1-\frac{3}{\beta z}+\frac{3}{\beta^2 z^2}\right) \quad avec\quad \beta^4=c^4 \\ n=3\rightarrow y(z)=e^{\beta z}\times\left(1-\frac{6}{\beta z}+\frac{15}{\beta^2 z^2}-\frac{15}{\beta^3 z^3}\right) \quad avec\quad \beta^4=c^4 \\ n=4\rightarrow y(z)=e^{\beta z}\times\left(1-\frac{10}{\beta z}+\frac{45}{\beta^2 z^2}-\frac{105}{\beta^3 z^3}+\frac{105}{\beta^4 z^4}\right) \quad avec\quad \beta^4=c^4 \\ n=5\rightarrow y(z)=e^{\beta z}\times\left(1-\frac{15}{\beta z}+\frac{105}{\beta^2 z^2}-\frac{420}{\beta^3 z^3}+\frac{945}{\beta^4 z^4}-\frac{945}{\beta^5 z^5}\right) \quad avec\quad \beta^4=c^4 \end{cases}$$

Lorsque a est fixé à a=n(n+2) et b=3, soit encore de façon équivalente a=4n(n+1) et b=3 (en effet il s'avère que la récurrence s'arrête dans ce cas lorsque a est le produit de deux entiers de type n(n+2)) alors la récurrence est de la forme :

$$\begin{cases} c_0=1 \qquad c_1=-\frac{n(n+1)}{\beta}\times 2 \qquad c_2=\frac{n(n+1)}{\beta^2}\times\left(2n^2+2n-1\right) \\ c_l=\frac{(3l(l-1)-4n(n+1))}{2l\beta}c_{l-1}-\frac{(l-1)(l-2n-2)(l+2n)}{l\beta^2}c_{l-2}+\frac{(l-2n-3)(l-2n-2)(l+2n-1)(l+2n)}{4l\beta^3}c_{l-3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} c_3=-\frac{(n-1)\,n\,(n+1)(n+2)}{\beta^3}\times\frac{4\,n(n+1)}{3} \qquad c_4=\frac{(n-1)\,n\,(n+1)(n+2)}{\beta^4}\times\frac{\left(4n^4+8n^3-8n^2-12n-9\right)}{6} \\ c_5=-\frac{(n-2)(n-1)\,n\,(n+1)(n+2)(n+3)}{\beta^5}\times\frac{\left(4n^4+8n^3-4n^2-8n-15\right)}{15} \\ c_6=\frac{(n-2)(n-1)\,n\,(n+1)(n+2)(n+3)}{\beta^6}\times\frac{\left(8n^6+24n^5-52n^4-144n^3-46n^2+30n+225\right)}{90} \\ c_7=-\frac{(n-3)(n-2)(n-1)\,n\,(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{\beta^7}\times\frac{2n(n+1)\left(4n^4+8n^3-28n^2-32n-15\right)}{315} \\ c_8=-\frac{(n-3)(n-2)(n-1)\,n\,(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{\beta^8}\times\frac{\left(16n^8+64n^7-256n^6-992n^5+440n^4+2608n^3-2320n^2+840n+11025\right)}{2520} \end{cases}$$

La récurrence s'arrête à l'indice 2n. Formellement on peut écrire les coefficients ainsi :

$$c_0 = 1 \quad c_{2l} = \frac{\prod_{i=0}^{i=l-1}(n-i)\times\prod_{i=1}^{i=l}(n+i)}{\beta^{2l}}\times d_{2l} \qquad pour \quad l>0 \qquad c_{2l+1} = -\frac{\prod_{i=0}^{i=l}(n-i)\times\prod_{i=1}^{i=l+1}(n+i)}{\beta^{2l+1}}\times d_{2l+1} \qquad pour \quad l>0$$

$$Avec \quad d_1 = 2 \qquad d_2 = 2n^2+2n-1 \qquad d_3 = \frac{4\,n(n+1)}{3} \qquad d_4 = \frac{4n^4+8n^3-8n^2-12n-9}{6}$$

$$d_5 = \frac{4n^4+8n^3-4n^2-8n-15}{15} \qquad d_6 = \frac{8n^6+24n^5-52n^4-144n^3-46n^2+30n+225}{90}$$

$$d_7 = \frac{2n(n+1)(4n^4+8n^3-28n^2-32n-15)}{315} \qquad d_8 = \frac{16n^8+64n^7-256n^6-992n^5+440n^4+2608n^3-2320n^2+840n+11025}{2520}$$

La loi de récurrence à 4 termes devient pour ces nouveaux coefficients selon qu'ils sont d'indice pair ou impair :

$$\begin{cases} c_{2l} = \frac{(3l(2l-1)-2n(n+1))}{2l\beta}c_{2l-1} - 2\frac{(2l-1)(l-n-1)(l+n)}{l\beta^2}c_{2l-2} + \frac{(2l-2n-3)(2l+2n-1)(l-n-1)(l+n)}{2l\beta^3}c_{2l-3} \\ c_{2l+1} = \frac{(3l(2l+1)-2n(n+1))}{(2l+1)\beta}c_{2l} - \frac{2l(2l-2n-1)(2l+2n+1)}{(2l+1)\beta^2}c_{2l-1} + \frac{(2l-2n-1)(2l+2n+1)(l-n-1)(l+n)}{(2l+1)\beta^3}c_{2l-2} \end{cases}$$

$$c_{2l} = \frac{\prod_{i=0}^{i=l-1}(n-i)\times\prod_{i=1}^{i=l}(n+i)}{\beta^{2l}}\times d_{2l} \qquad c_{2l-2} = \frac{\prod_{i=0}^{i=l-2}(n-i)\times\prod_{i=1}^{i=l-1}(n+i)}{\beta^{2l-2}}\times d_{2l-2}$$

$$c_{2l+1} = -\frac{\prod_{i=0}^{i=l}(n-i)\times\prod_{i=1}^{i=l+1}(n+i)}{\beta^{2l+1}}\times d_{2l+1} \qquad c_{2l-1} = -\frac{\prod_{i=0}^{i=l-1}(n-i)\times\prod_{i=1}^{i=l}(n+i)}{\beta^{2l-1}}\times d_{2l-1} \qquad c_{2l-3} = -\frac{\prod_{i=0}^{i=l-2}(n-i)\times\prod_{i=1}^{i=l-1}(n+i)}{\beta^{2l-3}}\times d_{2l-3}$$

$$\begin{cases} d_{2l} = \frac{1}{2l}\left(-(3l(2l-1)-2n(n+1))d_{2l-1} + 4(2l-1)\ d_{2l-2} + (2l-2n-3)(2l+2n-1)\ d_{2l-3}\right) \\ d_{2l+1} = -\frac{1}{2l+1}\left(\frac{(3l(2l+1)-2n(n+1))}{(n-l)(n+l+1)}d_{2l} + \frac{2l(2l-2n-1)(2l+2n+1)}{(n-l)(n+l+1)}d_{2l-1} + \frac{(2l-2n-1)(2l+2n+1)(l-n-1)}{(n-l)(n-l+1)(n+l+1)}d_{2l-2}\right) \end{cases}$$

Avec les coefficients définis comme suit : $c_{2l} = \frac{2^l\times\prod_{i=0}^{i=l-1}(n-i)\times\prod_{i=1}^{i=l}(n+i)}{(2l)!\,\beta^{2l}}\times e_{2l} \qquad c_{2l+1} = -\frac{2^l\times\prod_{i=0}^{i=l}(n-i)\times\prod_{i=1}^{i=l+1}(n+i)}{(2l+1)!\,\beta^{2l+1}}\times e_{2l+1}$

il vient : $\begin{cases} e_{2l} = -\frac{3l(2l-1)-2n(n+1)}{2}e_{2l-1} + 2(2l-1)^2\ e_{2l-2} + \frac{(2l-2n-3)(2l+2n-1)(2l-1)(l-1)}{2}e_{2l-3} \\ e_{2l+1} = -\left(\frac{3l(2l+1)-2n(n+1)}{(n-l)(n+l+1)}e_{2l} + \frac{2l^2(2l-2n-1)(2l+2n+1)}{(n-l)(n+l+1)}e_{2l-1} - \frac{l\,(2l-1)(2l-2n-1)(2l+2n+1)}{(n-l)(n+l+1)}e_{2l-2}\right) \end{cases}$

Les solutions de forme normale s'écrivent donc ainsi :

$$\begin{cases} y(z) = e^{\beta z} \times \sum_{l=0}^{l=2n} c_l \times z^{-l} \quad avec \quad \beta^4 = c^4 \\ c_0 = e_0 = 1 \qquad e_1 = 2 \quad c_{2l} = \dfrac{2^l \times \prod_{i=0}^{i=l-1}(n-i) \times \prod_{i=1}^{i=l}(n+i)}{(2l)!\,\beta^{2l}} \times e_{2l} \qquad c_{2l+1} = -\dfrac{2^l \times \prod_{i=0}^{i=l}(n-i) \times \prod_{i=1}^{i=l+1}(n+i)}{(2l+1)!\,\beta^{2l+1}} \times e_{2l+1} \\ \begin{cases} e_{2l} = -\dfrac{3l(2l-1) - 2n(n+1)}{2} e_{2l-1} + 2(2l-1)^2 e_{2l-2} + \dfrac{(2l-2n-3)(2l+2n-1)(2l-1)(l-1)}{2} e_{2l-3} \\ e_{2l+1} = -\left(\dfrac{3l(2l+1) - 2n(n+1)}{(n-l)(n+l+1)} e_{2l} + \dfrac{2l^2(2l-2n-1)(2l+2n+1)}{(n-l)(n+l+1)} e_{2l-1} - \dfrac{l(2l-1)(2l-2n-1)(2l+2n+1)}{(n-l)(n+l+1)} e_{2l-2} \right) \end{cases} \end{cases}$$

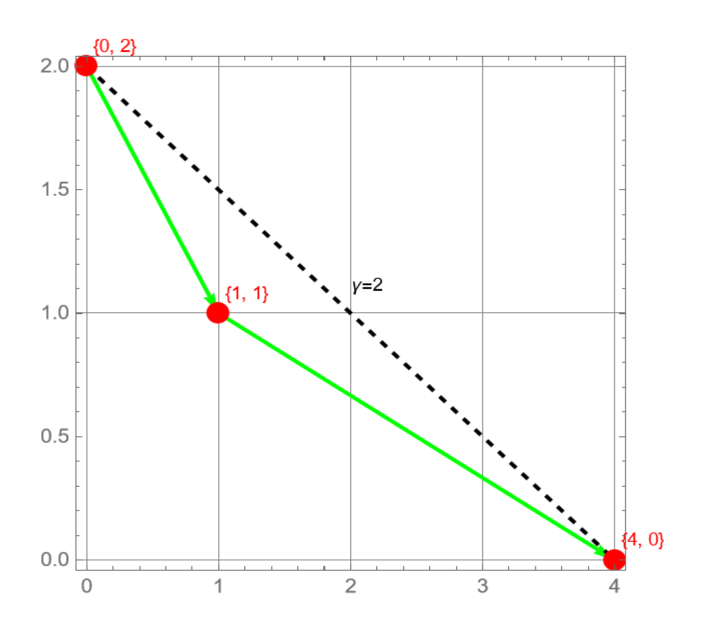
Voici les quelques solutions des premières valeurs de n :

$$y^{(4)}(z) - \frac{8n(n+1)}{z^2} y''(z) + \frac{16n(n+1)}{z^3} y'(z) + \left(\frac{4n(n+1)(2n-1)(2n+3)}{z^4} - c^4 \right) y(z) = 0$$

$$\begin{cases} n = 1 \to y(z) = e^{\beta z} \times \left(1 - \dfrac{4}{\beta z} + \dfrac{6}{\beta^2 z^2} \right) \quad avec \quad \beta^4 = c^4 \\ n = 2 \to y(z) = e^{\beta z} \times \left(1 - \dfrac{12}{\beta z} + \dfrac{66}{\beta^2 z^2} - \dfrac{192}{\beta^3 z^3} + \dfrac{252}{\beta^4 z^4} \right) \quad avec \quad \beta^4 = c^4 \\ n = 3 \to y(z) = e^{\beta z} \times \left(1 - \dfrac{24}{\beta z} + \dfrac{276}{\beta^2 z^2} - \dfrac{1920}{\beta^3 z^3} + \dfrac{8460}{\beta^4 z^4} - \dfrac{22320}{\beta^5 z^5} + \dfrac{27720}{\beta^6 z^6} \right) \quad avec \quad \beta^4 = c^4 \\ n = 4 \to y(z) = e^{\beta z} \times \left(1 - \dfrac{40}{\beta z} + \dfrac{780}{\beta^2 z^2} - \dfrac{9600}{\beta^3 z^3} + \dfrac{81060}{\beta^4 z^4} - \dfrac{478800}{\beta^5 z^5} + \dfrac{1927800}{\beta^6 z^6} - \dfrac{4838400}{\beta^7 z^7} + \dfrac{5821200}{\beta^8 z^8} \right) \quad avec \quad \beta^4 = c^4 \\ n = 5 \to y(z) = e^{\beta z} \times \left(1 - \dfrac{60}{\beta z} + \dfrac{1770}{\beta^2 z^2} - \dfrac{33600}{\beta^3 z^3} + \dfrac{452340}{\beta^4 z^4} - \dfrac{4495680}{\beta^5 z^5} + \dfrac{33314400}{\beta^6 z^6} - \dfrac{181440000}{\beta^7 z^7} + \dfrac{694688400}{\beta^8 z^8} - \dfrac{1690113600}{\beta^9 z^9} + \dfrac{1990850400}{\beta^{10} z^{10}} \right) \quad avec \quad \beta^4 = c^4 \end{cases}$$

Exemple 7 (i) A.R.Forsythe Chapitre 100, page 316

Soit l'équation différentielle du second degré suivante : $y''(z)-\left(\frac{n(n+1)}{z^2}+a^2\right)y(z)=0$. *Le point z=∞ est un point irrégulier essentiel. Par le changement de variable :* $z\to\frac{1}{z}$ *l'équation différentielle devient :* $y''(z)+\frac{2}{z}y'(z)-\frac{n(n+1)z^2+a^2}{z^4}y(z)=0$ *pour laquelle* $z=0$ *est devenu le point singulier essentiel. Le diagramme de Newton-Puisieux est de la forme :*



Cela conduit à proposer un terme exponentiel comme suit: $y(z)=e^{\Omega(z)}u(z)\quad\Omega(z)=\frac{\beta}{z}$ *et le développement en série de l'expression:* $(\Omega'(z))^2+P_1(z)(\Omega'(z))^1+P_2(z)(\Omega'(z))^0$ *autour de z=0 à l'ordre 0 permet de fixer la valeur du paramètre β :* $(\Omega'(z))^2+P_1(z)(\Omega'(z))^1+P_2(z)(\Omega'(z))^0=\frac{\beta^2-a^2}{z^4}+O\left(\frac{1}{z^3}\right)\Rightarrow\beta^2=a^2$ *. En insérant le terme exponentiel* $y(z)=e^{\frac{\beta}{z}}u(z)\quad avec\quad\beta^2=a^2$ *on obtient une équation différentielle du second degré qui possède une solution régulière :* $u''(z)+\frac{2(z-\beta)}{z^2}u'(z)-\frac{n(n+1)}{z^2}u(z)=0$ *. Et l'équation indicielle de cette dernière donne la valeur de l'exposant pour la solution régulière* $\sigma=0$ *. L'injection d'un développement de la forme* $u(z)=\sum_{l=0}^{l=+\infty}c_l z^l$ *conduit à une récurrence à 2 termes :*

$$c_0=1\qquad c_l=\frac{(l+n)(l-n-1)}{2l\beta}c_{l-1}$$

Il est clair que la récurrence s'arrête à l'indice l=n et les coefficients se calculent complètement. En l'occurrence :

$$\begin{cases} c_0 = 1 \quad c_1 = -\dfrac{n(n+1)}{2\beta} \quad c_2 = \dfrac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{8\beta^2} \quad c_l = \dfrac{(l+n)(l-n-1)}{2l\beta} c_{l-1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_3 = -\dfrac{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)}{48\beta^3} \quad c_4 = \dfrac{(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{384\beta^4} \\ c_5 = -\dfrac{(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}{3840\beta^5} \\ c_6 = \dfrac{(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)}{46080\beta^6} \\ c_7 = -\dfrac{(n-6)(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)(n+7)}{645120\beta^7} \end{cases}$$

Et la solution explicite s'exprime comme suit :

$$y(z) = e^{\beta z} \times \sum_{l=0}^{l=n} (-1)^l \times \frac{\prod_{i=0}^{i=l-1}(n-i) \times \prod_{i=0}^{i=l}(n+i)}{2^l\, l!\, \beta^l} \times z^{-l} \quad avec \quad \beta^2 = a^2$$

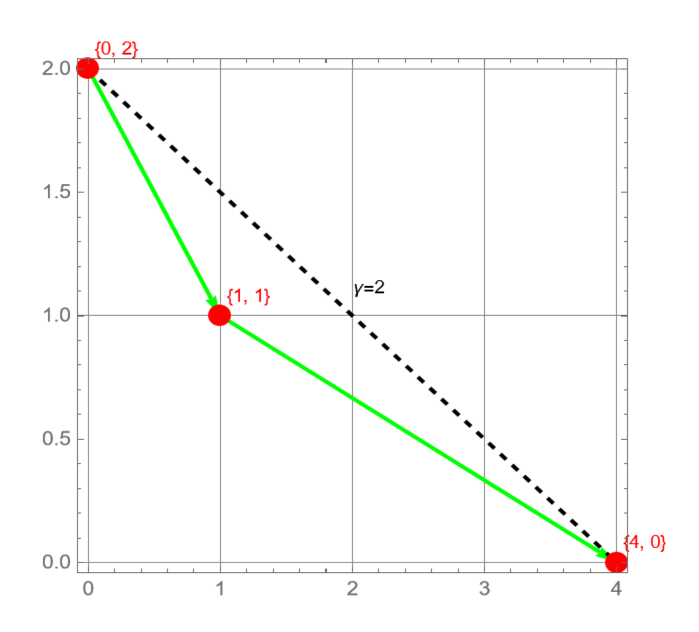
Voici les quelques solutions des premières valeurs de n :

$$y''(z) - \left(\frac{n(n+1)}{z^2} + a^2\right) y(z) = 0$$

$$\begin{cases} n=0 \rightarrow y(z) = e^{\beta z} \quad avec \quad \beta^2 = a^2 \\ n=1 \rightarrow y(z) = e^{\beta z} \times \left(1 - \dfrac{1}{\beta z}\right) \quad avec \quad \beta^2 = a^2 \\ n=2 \rightarrow y(z) = e^{\beta z} \times \left(1 - \dfrac{3}{\beta z} + \dfrac{3}{\beta^2 z^2}\right) \quad avec \quad \beta^2 = a^2 \\ n=3 \rightarrow y(z) = e^{\beta z} \times \left(1 - \dfrac{6}{\beta z} + \dfrac{15}{\beta^2 z^2} - \dfrac{15}{\beta^3 z^3}\right) \quad avec \quad \beta^2 = a^2 \\ n=4 \rightarrow y(z) = e^{\beta z} \times \left(1 - \dfrac{10}{\beta z} + \dfrac{45}{\beta^2 z^2} - \dfrac{105}{\beta^3 z^3} + \dfrac{105}{\beta^4 z^4}\right) \quad avec \quad \beta^2 = a^2 \\ n=5 \rightarrow y(z) = e^{\beta z} \times \left(1 - \dfrac{15}{\beta z} + \dfrac{105}{\beta^2 z^2} - \dfrac{420}{\beta^3 z^3} + \dfrac{945}{\beta^4 z^4} - \dfrac{945}{\beta^5 z^5}\right) \quad avec \quad \beta^2 = a^2 \end{cases}$$

Exemple 8 A.R.Forsythe Chapitre 100, page 316

Soit l'équation différentielle du second degré suivante : $z^2(z^2-1)y''(z)-2z^3y'(z)-6(z^4+z^2-1)y(z)=0$. *Le point z=∞ est un point irrégulier essentiel. Par le changement de variable :* $z\to\frac{1}{z}$ *l'équation différentielle devient :* $y''(z)+\frac{4-2z^2}{z(1-z^2)}y'(z)-\frac{6+6z^2-6z^4}{z^4(z^2-1)}y(z)=0$ *pour laquelle* $z=0$ *est devenu le point singulier essentiel. Le diagramme de Newton-Puisieux est de la forme :*



Cela conduit à proposer un terme exponentiel comme suit: $y(z)=e^{\Omega(z)}u(z)\quad \Omega(z)=\frac{\beta}{z}$ *et le développement en série de l'expression:* $(\Omega'(z))^2+P_1(z)(\Omega'(z))^1+P_2(z)(\Omega'(z))^0$ *autour de z=0 à l'ordre 0 permet de fixer la valeur du paramètre β :* $(\Omega'(z))^2+P_1(z)(\Omega'(z))^1+P_2(z)(\Omega'(z))^0=\frac{\beta^2-6}{z^4}+O\left(\frac{1}{z^3}\right)\Rightarrow\beta^2=6$. *En insérant le terme exponentiel* $y(z)=e^{\frac{\beta}{z}}u(z)\quad avec\quad \beta^2=6$ *on obtient une équation différentielle du second degré qui possède une solution régulière :* $u''(z)+2\frac{\beta(1-z^2)+z^3-2z}{z^2(z^2-1)}u'(z)+2\frac{6z-3z^3+\beta}{z^3(z^2-1)}u(z)=0$. *Et l'équation indicielle de cette dernière donne la valeur de l'exposant pour la solution régulière :* $\sigma=-1$. *L'injection d'un développement de la forme* $u(z)=z^{-1}\sum_{l=0}^{l=+\infty}c_lz^l$ *conduit à une récurrence à 4 termes :* $c_0=1\quad c_1=-\frac{7}{6}\beta\quad c_2=3\quad 2l\beta\, c_l+(14+l(1-l))c_{l-1}-2\beta(l-3)c_{l-2}+(l-1)(l-6)c_{l-3}=0$. *En calculant les premiers termes explicitement il vient :* $c_0=1\quad c_1=-\frac{7}{6}\beta\quad c_2=3\quad c_3=-\frac{\beta}{2}\qquad c_4=c_5=c_6=0=...$.

Cette récurrence à 4 termes ayant au moins trois termes successifs s'annulant elle est finie. De plus l'expression de la solution de forme normale est explicite et de la forme :

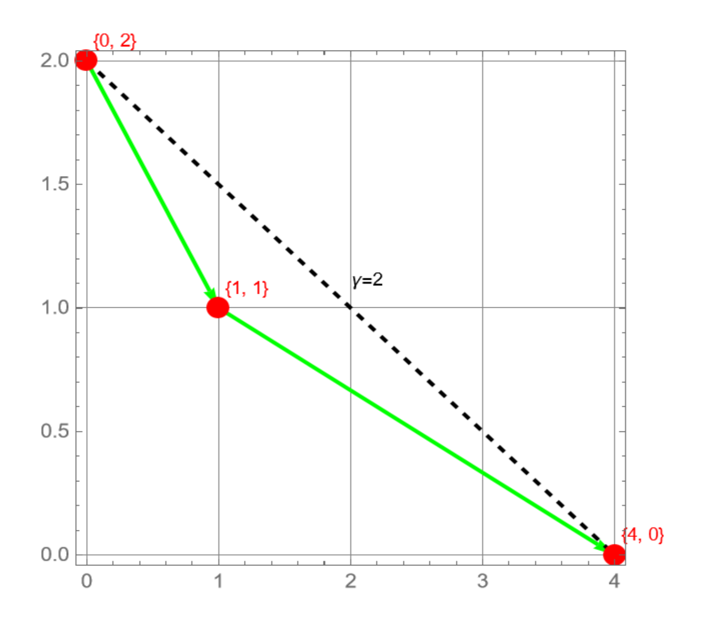
$$y(z)=\frac{\beta}{z^2}e^{\beta z}\left(z\beta(z^2+3)-7z^2-3\right)\quad avec\quad \beta^2=6\to\beta=\pm\sqrt{6}$$

Exemple 1 A.R.Forsythe Chapitre 107, page 341

Soit l'équation différentielle du second degré suivante : $y''(z)+\left(a_0^2+\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\ldots\right)y(z)=0$. *Le point z=∞ est un point irrégulier essentiel, tout comme le point z=0. Mais intéressons nous seulement à la singularité essentielle z=∞. Par le changement de variable :* $z\to\frac{1}{z}$ *l'équation différentielle devient :*

$$y''(z)+\frac{2}{z}y'(z)+\frac{1}{z^4}\left(a_0^2+a_1z+a_2z^2+\ldots\right)y(z)=0$$

pour laquelle $z=0$ *est devenu le point singulier essentiel. Le diagramme de Newton-Puisieux est de la forme :*



Cela conduit à proposer un terme exponentiel comme suit: $y(z)=e^{\Omega(z)}u(z)$ $\Omega(z)=\frac{\beta}{z}$ *et le développement en série de l'expression:* $(\Omega'(z))^2+P_1(z)(\Omega'(z))^1+P_2(z)(\Omega'(z))^0$ *autour de z=0 à l'ordre 0 permet de fixer la valeur du paramètre β :* $(\Omega'(z))^2+P_1(z)(\Omega'(z))^1+P_2(z)(\Omega'(z))^0=\frac{\beta^2+a_0^2}{z^4}+O\left(\frac{1}{z^3}\right)\Rightarrow\beta^2=-a_0^2$.

En insérant le terme exponentiel $y(z)=e^{\frac{\beta}{z}}u(z)$ *avec* $\beta^2=-a_0^2$ *on obtient une équation différentielle du second degré qui possède une solution régulière :* $u''(z)+2\frac{z-\beta}{z^2}u'(z)+\frac{1}{z^3}\left(a_1z+a_2z^2+a_3z^3+\ldots\right)u(z)=0$.

Et l'équation indicielle de cette dernière donne la valeur de l'exposant pour la solution régulière :

$$\sigma=\frac{a_1}{2\beta}=-\frac{a_1\beta}{2a_0^2}$$

L'injection d'un développement de la forme $u(z)=z^{-\sigma}\sum_{l=0}^{l=+\infty}c_l z^{-l}$ *conduit à une récurrence à nombre de termes croissants dont les premières expressions sont :*

$$\begin{cases} c_0=1 \\ 2\beta\, c_1=\sigma(\sigma-1)c_0 \\ 4\beta\, c_2=(\sigma-1)(\sigma-2)c_1+a_3c_0+a_2c_1 \\ 6\beta\, c_3=(\sigma-2)(\sigma-3)c_2+a_4c_0+a_3c_1+a_2c_2 \\ 8\beta\, c_4=(\sigma-3)(\sigma-4)c_3+a_5c_0+a_4c_1+a_3c_2+a_2c_3 \\ 10\beta\, c_5=(\sigma-4)(\sigma-5)c_4+a_6c_0+a_5c_1+a_4c_2+a_3c_3+a_2c_4 \end{cases}$$

On peut résumer et d'ailleurs démontrer que cette récurrence s'exprime ainsi :

$$\begin{cases} c_0=1 \\ 2l\,\beta\, c_l=(\sigma-l)(\sigma-l+1)c_{l-1}+\sum_{i=0}^{i=l-1}a_{l+1-i}c_i \Leftrightarrow 2l\,\beta\, c_l=(\sigma-l)(\sigma-l+1)c_{l-1}+\sum_{i=1}^{i=l}a_{i+1}c_{l-i} \qquad l\geq 1 \end{cases}$$

Dans ces conditions les solutions de forme normale sont les suivantes :

$$y(z)=e^{\beta z}z^{-\frac{a_1}{2\beta}}\sum_{l=0}^{l=+\infty}c_l z^{-l}=e^{\beta z}z^{\frac{a_1\beta}{2a_0^{\,2}}}\sum_{l=0}^{l=+\infty}c_l z^{-l} \qquad avec \qquad \beta^2=-a_0^{\,2}\Leftrightarrow\beta=\pm i\,a_0$$

$$c_0=1 \qquad c_l=\frac{2a_0^{\,2}(1-2l)\,a_1+\beta\left(a_1^{\,2}-4a_0^{\,2}\,l(l-1)\right)}{8la_0^{\,4}}c_{l-1}-\frac{\beta}{2a_0^{\,2}l}\sum_{i=1}^{i=l}a_{i+1}c_{l-i}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} c_{1,0}=1 \qquad c_{1,l}=\dfrac{2(1-2l)\,a_0a_1+i\left(a_1^{\,2}-4a_0^{\,2}\,l(l-1)\right)}{8la_0^{\,3}}c_{1,l-1}-\dfrac{i}{2a_0l}\sum_{i=1}^{i=l}a_{i+1}c_{1,l-i}=\overline{c_{2,l}} \\ c_{2,0}=1 \qquad c_{2,l}=\dfrac{2(1-2l)\,a_0a_1-i\left(a_1^{\,2}-4a_0^{\,2}\,l(l-1)\right)}{8la_0^{\,3}}c_{2,l-1}+\dfrac{i}{2a_0l}\sum_{i=1}^{i=l}a_{i+1}c_{1,l-i}=\overline{c_{1,l}} \\ y_1(z)=e^{i\,a_0z}z^{i\frac{a_1}{2a_0}}\sum_{l=0}^{l=+\infty}c_{1,l}z^{-l}=\overline{y_2(z)} \qquad y_2(z)=e^{-i\,a_0z}z^{-i\frac{a_1}{2a_0}}\sum_{l=0}^{l=+\infty}c_{2,l}z^{-l}=\overline{y_1(z)} \end{cases}$$

En considérant les parties réelle et imaginaire par combinaison linéaire des deux solutions, on écrira :

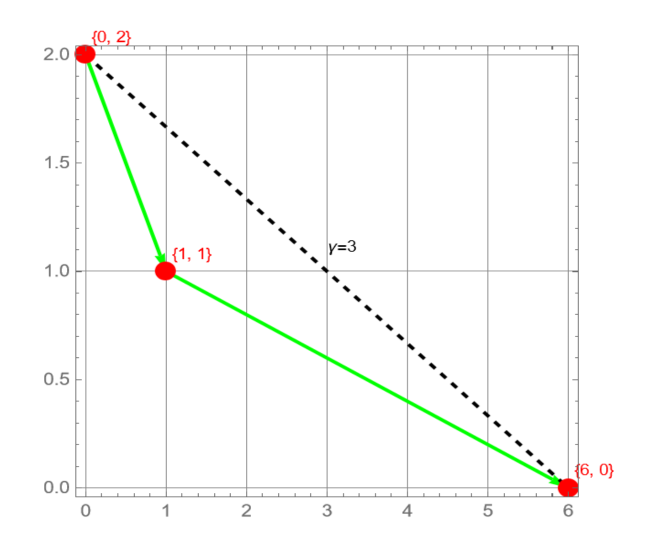
$$c_{1,l}=\frac{d_{1,l}+i\,d_{2,l}}{2}\quad c_{2,l}=\frac{d_{1,l}-i\,d_{2,l}}{2}\Rightarrow d_{1,l}=\frac{c_{1,l}+c_{2,l}}{2}\qquad d_{2,l}=\frac{c_{1,l}-c_{2,l}}{2i}$$

$$\begin{cases} d_{1,0}=1 \qquad d_{1,l}=\dfrac{2(1-2l)\,a_0a_1d_{1,l-1}-\left(a_1^{\,2}-4a_0^{\,2}\,l(l-1)\right)d_{2,l-1}}{8la_0^{\,3}}+\dfrac{1}{2a_0l}\displaystyle\sum_{i=1}^{i=l}a_{i+1}d_{2,l-i} \\ d_{2,0}=0 \qquad d_{2,l}=\dfrac{2(1-2l)\,a_0a_1d_{2,l-1}+\left(a_1^{\,2}-4a_0^{\,2}\,l(l-1)\right)d_{1,l-1}}{8la_0^{\,3}}-\dfrac{1}{2a_0l}\displaystyle\sum_{i=1}^{i=l}a_{i+1}d_{1,l-i} \\ \tilde{y}_1(z)=\mathrm{Re}(y_1(z))=\mathrm{Re}(y_2(z))=\dfrac{e^{i\,a_0z}z^{i\frac{a_1}{2a_0}}+e^{-i\,a_0z}z^{-i\frac{a_1}{2a_0}}}{2}\times\displaystyle\sum_{l=0}^{l=+\infty}d_{1,l}z^{-l}=Cos\left(a_0z+\frac{a_1}{2a_0}Log(z)\right)\times\sum_{l=0}^{l=+\infty}d_{1,l}z^{-l} \\ \tilde{y}_2(z)=\mathrm{Im}(y_1(z))=-\mathrm{Im}(y_2(z))=\dfrac{e^{i\,a_0z}z^{i\frac{a_1}{2a_0}}-e^{-i\,a_0z}z^{-i\frac{a_1}{2a_0}}}{2i}\times\displaystyle\sum_{l=0}^{l=+\infty}d_{2,l}z^{-l}=Sin\left(a_0z+\frac{a_1}{2a_0}Log(z)\right)\times\sum_{l=0}^{l=+\infty}d_{2,l}z^{-l} \end{cases}$$

La question de la convergence de ces développements n'est ici pas posée.

<u>Exemple 2 A.R.Forsythe Chapitre 108, page 347</u>

Soit l'équation différentielle du second degré suivante : $z\,y''(z)-(1+z^3)\,y(z)=0$. *Le point z=∞ est un point irrégulier essentiel, et le point z=0 est un point régulier. Pour cette dernière singularité l'équation indicielle donne les valeurs ρ=0 ou ρ=1. Dans ce cas l'équation a une solution régulière de la forme* $y_1(z)=\sum_{l=0}^{l=+\infty}c_lz^l$ *et également une solution de la forme* $y_2(z)=Log(z)y_1(z)+\sum_{l=0}^{l=+\infty}b_lz^l$. *Mais intéressons nous d'abord à la singularité essentielle z=∞. Par le changement de variable :* $z\to\frac{1}{z}$ *l'équation différentielle devient :* $y''(z)+\frac{2}{z}y'(z)-\frac{1+z^3}{z^6}\,y(z)=0$ *pour laquelle* $z=0$ *est devenu le point singulier essentiel. Le diagramme de Newton-Puisieux est de la forme :*



Cela conduit à proposer un terme exponentiel comme suit: $y(z)=e^{\Omega(z)}u(z)\quad \Omega(z)=\frac{\beta_1}{z}+\frac{\beta_2}{z^2}$ *et le développement en série de l'expression:* $(\Omega'(z))^2+P_1(z)(\Omega'(z))^1+P_2(z)(\Omega'(z))^0$ *autour de z=0 à l'ordre 0 permet de fixer la valeur des deux paramètres β1 et β2 :*

$$(\Omega'(z))^2+P_1(z)(\Omega'(z))^1+P_2(z)(\Omega'(z))^0=\frac{4\beta_2{}^2-1}{z^6}+\frac{4\beta_1\beta_2}{z^5}+O\left(\frac{1}{z^4}\right)\Rightarrow \beta_1=0\quad \beta_2{}^2=\beta^2=\frac{1}{4}$$

En insérant le terme exponentiel $y(z)=e^{\frac{\beta}{z^2}}u(z)\quad avec\quad \beta^2=\frac{1}{4}$ *on obtient une équation différentielle du second degré qui possède une solution régulière :* $u''(z)+2\frac{z^2-\beta}{z^3}u'(z)-\frac{z-2\beta}{z^4}u(z)=0$ *. Et l'équation indicielle de cette dernière donne la valeur de l'exposant pour la solution régulière :* $\sigma=\frac{1}{2}$ *. L'injection d'un développement de la forme* $u(z)=z^{\frac{1}{2}}\sum_{l=0}^{l=+\infty}c_l z^l$ *conduit à une récurrence à trois termes :*

$$\begin{cases} c_0=1\quad c_1=-\dfrac{1}{4\beta} \\ c_l=-\dfrac{1}{4\,l\,\beta}c_{l-1}+\dfrac{(2l-1)(2l-3)}{16\,l\,\beta}c_{l-2}\qquad l\geq 2 \end{cases}$$

Cette récurrence est à priori divergente et conduit à un développement divergent pour les valeurs de z réelles. Les développements s'écrivent :

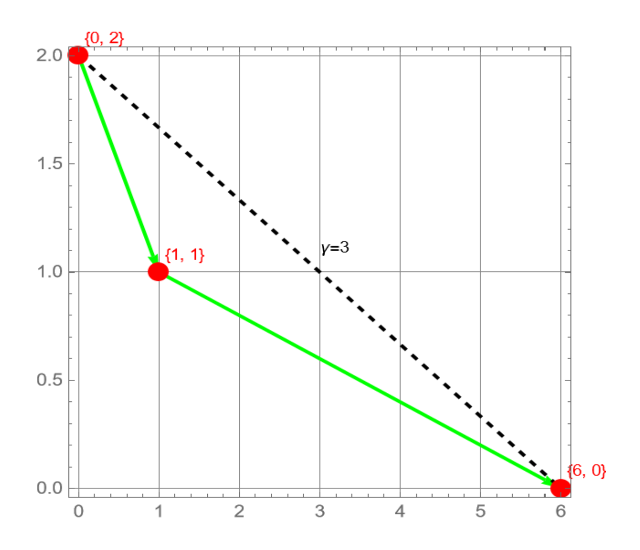
$$y(z)=\frac{e^{\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{z}}\sum_{l=0}^{l=+\infty}c_{1,l}z^{-l}\quad avec\quad c_{1,0}=1\quad c_{1,1}=-\frac{1}{2}\quad c_{1,l}=-\frac{1}{2l}c_{1,l-1}+\frac{(2l-1)(2l-3)}{8\,l\,\beta}c_{1,l-2}$$

$$y(z)=\frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{z}}\sum_{l=0}^{l=+\infty}c_{2,l}z^{-l}\quad avec\quad c_{2,0}=1\quad c_{2,1}=\frac{1}{2}\quad c_{2,l}=\frac{1}{2l}c_{2,l-1}-\frac{(2l-1)(2l-3)}{8\,l\,\beta}c_{2,l-2}$$

Ces deux développements divergent. Il n'y a donc pas de forme normale pour la singularité z=∞.

Exemple 3 A.R.Forsythe Chapitre 108, page 347

Soit l'équation différentielle du second degré suivante : $y''(z)-(z^2+\alpha)y(z)=0$*. Le point z=∞ est un point irrégulier essentiel et le point z=0 est un point non singulier. Pour ce dernier point l'équation indicielle donne donc les valeurs ρ=0 ou ρ=1. Dans ce cas l'équation a deux solutions analytiques indépendantes de la forme* $y_1(z)=\sum_{l=0}^{l=+\infty} c_l z^l$ *et* $y_2(z)=z\times\sum_{l=0}^{l=+\infty} b_l z^l$ *sans qu'intervienne un terme logarithmique. Mais intéressons nous seulement à la singularité essentielle z=∞. Par le changement de variable :* $z\to\frac{1}{z}$ *l'équation différentielle devient :* $y''(z)+\frac{2}{z}y'(z)-\frac{1+\alpha z^2}{z^6}y(z)=0$ *pour laquelle* $z=0$ *est devenu le point singulier essentiel. Le diagramme de Newton-Puisieux est de la forme :*



Cela conduit à proposer un terme exponentiel comme suit: $y(z)=e^{\Omega(z)}u(z)$ $\Omega(z)=\frac{\beta_1}{z}+\frac{\beta_2}{z^2}$ *et le développement en série de l'expression:* $(\Omega'(z))^2+P_1(z)(\Omega'(z))^1+P_2(z)(\Omega'(z))^0$ *autour de z=0 à l'ordre 0 permet de fixer la valeur des deux paramètres β1 et β2 :*

$$(\Omega'(z))^2+P_1(z)(\Omega'(z))^1+P_2(z)(\Omega'(z))^0=\frac{4\beta_2^{\,2}-1}{z^6}+\frac{4\beta_1\beta_2}{z^5}+O\left(\frac{1}{z^4}\right)\Rightarrow\beta_1=0\quad\beta_2^{\,2}=\beta=\frac{1}{4}$$

En insérant le terme exponentiel $y(z)=e^{\frac{\beta}{z^2}}u(z)$ *avec* $\beta^2=\frac{1}{4}$ *on obtient une équation différentielle du second degré qui possède une solution régulière :* $u''(z)+2\frac{z^2-2\beta}{z^3}u'(z)-\frac{z-2\beta}{z^4}u(z)=0$ *. Et l'équation indicielle de cette dernière donne la valeur de l'exposant pour la solution régulière :* $\sigma=\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{4\beta}=\frac{1}{2}-\frac{\alpha\,\beta}{4\beta^2}=\frac{1}{2}-\alpha\,\beta$ *. L'injection d'un développement de la forme* $u(z)=z^\sigma\sum_{l=0}^{l=+\infty}c_l z^l$ *conduit à une récurrence à deux termes par pas de deux :* $\begin{cases}c_0=1 \quad c_1=0\\ c_l=\dfrac{(2\beta(2l-3)-\alpha)(2\beta(2l-1)-\alpha)}{16\,l\,\beta}c_{l-2} \qquad l\geq 2\end{cases}$ *. Cette récurrence s'arrête pour les valeurs de α telles que* $\alpha=2\beta(2\vartheta-1)\quad \vartheta\in\mathbf{N}$ *.*

A cette condition la récurrence (par « pas » de deux) s'arrête à l'indice 2l=2(ϑ-1) et les solutions de l'équation différentielle initiale sont de la forme :

$$y(z)=e^{\beta z^2} z^{\theta-1}\sum_{l=0}^{l=2(\theta-1)} c_l\, z^{-l} \quad avec \quad \beta^2=\frac{1}{4}\rightarrow\beta=\pm\frac{1}{2}$$

$$c_0=1 \quad c_l=\frac{\left(2\beta(2l-3)-2\beta(2\theta-1)\right)\left(2\beta(2l-1)-2\beta(2\theta-1)\right)}{16\, l\, \beta}c_{l-2}=\beta\frac{(l-\theta-1)(l-\theta)}{l}c_{l-2}$$

$$\Leftrightarrow y(z)=e^{\beta z^2} z^{\theta-1}\sum_{l=0}^{l=\left\lfloor\frac{\theta-1}{2}\right\rfloor} c_l\, z^{-2l} \quad avec \quad \beta^2=\frac{1}{4}\rightarrow\beta=\pm\frac{1}{2} \qquad c_0=1 \quad c_l=\beta\frac{(2l-\theta-1)(2l-\theta)}{2l}c_{l-1}$$

Voici les solutions pour les premières valeurs de ϑ et α :

$$\begin{cases} y(z)=e^{\beta z^2} z^{\theta-1}\sum_{l=0}^{l=\left\lfloor\frac{\theta-1}{2}\right\rfloor} c_l\, z^{-2l} \quad avec \quad \beta^2=\frac{1}{4}\rightarrow\beta=\pm\frac{1}{2} \\ \theta=1\rightarrow y(z)=e^{\beta z^2} \quad avec \quad \beta=\pm\frac{1}{2} \\ \theta=2\rightarrow y(z)=z\, e^{\beta z^2} \quad avec \quad \beta=\pm\frac{1}{2} \\ \theta=3\rightarrow y(z)=z^2\, e^{\beta z^2}\left(1+\frac{\beta}{z^2}\right)=e^{\beta z^2}\left(z^2+\beta\right) \quad avec \quad \beta=\pm\frac{1}{2} \\ \theta=4\rightarrow y(z)=z^3\, e^{\beta z^2}\left(1+\frac{3\beta}{z^2}\right)=e^{\beta z^2} z\left(z^2+3\beta\right) \quad avec \quad \beta=\pm\frac{1}{2} \\ \theta=5\rightarrow y(z)=z^4\, e^{\beta z^2}\left(1+\frac{6\beta}{z^2}+\frac{3\beta^2}{z^4}\right)=e^{\beta z^2}\left(z^4+6\beta\, z^2+3\beta^2\right) \quad avec \quad \beta=\pm\frac{1}{2} \\ \theta=6\rightarrow y(z)=z^5\, e^{\beta z^2}\left(1+\frac{10\beta}{z^2}+\frac{15\beta^2}{z^4}\right)=e^{\beta z^2} z\left(z^4+10\beta\, z^2+15\beta^2\right) \quad avec \quad \beta=\pm\frac{1}{2} \end{cases}$$

Revenons maintenant au point z=0 qui est un point ordinaire et pour lequel l'équation indicielle donne les valeurs ρ=0 ou ρ=1. En insérant une solution régulière de la forme : $y(z)=z^{\rho}\sum_{l=0}^{+\infty} c_l\, z^l$ *dans l'équation différentielle de départ :* $y''(z)-\left(z^2+\alpha\right)y(z)=0$*, on obtient une récurrence à 5 termes pour lequel les seuls termes pairs sont non nuls :*

$$c_0=1 \qquad c_1=0 \qquad c_2=\frac{\alpha}{(2+\rho)(1+\rho)} \qquad c_3=0 \qquad c_l=\frac{\alpha\, c_{l-2}+c_{l-4}}{(l+\rho)(l-1+\rho)} \qquad l\geq 4$$

En considérant les deux solutions de Fröbenius analytiques pour ρ=0 ou ρ=1, on obtient automatiquement deux solutions indépendantes de l'équation différentielle, avec la même récurrence en prenant les deux valeurs respectives de ρ.

Voici les deux solutions indépendantes :

$$\rho = 1 \to c_0 = 1 \qquad c_1 = \frac{\alpha}{6} \qquad c_l = \frac{\alpha\, c_{l-1} + c_{l-2}}{2l\,(2l+1)} \qquad l \geq 4 \to y_0(x) = z \times \sum_{l=0}^{l=+\infty} c_l z^{2l}$$

$$y_0(x) = z + \frac{\alpha}{6} z^3 + \frac{6+\alpha^2}{120} z^5 + \frac{\alpha\,(26+\alpha^2)}{5040} z^7 + \frac{(252+68\alpha^2+\alpha^4)}{362880} z^9 + \frac{\alpha\,(2124+140\alpha^2+\alpha^4)}{39916800} z^{11} + \ldots$$

$$\rho = 0 \to c_0 = 1 \qquad c_1 = \frac{\alpha}{2} \qquad c_l = \frac{\alpha\, c_{l-1} + c_{l-2}}{2l\,(2l-1)} \qquad l \geq 4 \to y_1(x) = \sum_{l=0}^{l=+\infty} c_l z^{2l}$$

$$y_1(x) = 1 + \frac{\alpha}{2} z^2 + \frac{2+\alpha^2}{24} z^4 + \frac{\alpha\,(14+\alpha^2)}{720} z^6 + \frac{(60+44\alpha^2+\alpha^4)}{40320} z^8 + \frac{\alpha\,(844+100\alpha^2+\alpha^4)}{3628800} z^{10} + \ldots$$

En ce qui concerne le point singulier z=∞, étant donné que l'équation différentielle est de type Hamburger alors les solutions de forme normale sont en continuité analytique avec les solutions régulières (et même ici analytiques). Dans ces conditions les deux solutions de forme normale peuvent-elle coexister en même temps et de quelle solutions régulières sont-elles la continuation analytique ?

Dans ce le cadre de la continuité analytique des deux solutions en z=0 et z=∞, les deux exposants σ et ρ sont séparés par un entier selon la relation : $\sigma = \rho + k \quad avec \quad k > 0$*. Ici en prenant la valeur de σ comme* $\sigma = \alpha\,\beta - \frac{1}{2}$ *(changement de signe de σ) il vient* $\sigma = \vartheta - 1 \Rightarrow k = \vartheta - 1 - \rho$*. Les deux racines ρ sont* $\rho_1 = 1 \quad et \quad \rho_2 = 0 \Rightarrow \rho_1 + \rho_2 = 1$*, les deux racines de σ sont :* $\sigma_1 = -\frac{1-\alpha}{2} \quad \sigma_2 = -\frac{1+\alpha}{2} \Rightarrow \sigma_1 + \sigma_2 = -1$ *. Si les deux formes normales coexistent elles ne peuvent correspondre à des racines ρ distinctes, car dans ce cas, il faudrait que :* $\sigma_1 + \sigma_2 = -1 = k_1 + k_2 + \rho_1 + \rho_2 = k_1 + k_2 + 1 \Rightarrow k_1 + k_2 = -2$ *. Comme les deux indices k_1 et k_2 sont positifs ou nuls ce n'est pas possible. De plus les conditions d'arrêt de la récurrence ne peuvent être remplies simultanément dans ce cas puisque :* $\sigma_1 = \vartheta_1 - 1 \quad \sigma_2 = \vartheta_2 - 1 \Rightarrow \vartheta_1 + \vartheta_2 - 2 = -1 \Rightarrow \vartheta_1 + \vartheta_2 = -3$*.*

Pour que les deux solutions de forme normale coexistent, peut-être conviendrait-il qu'elles correspondent à une seule et même racine de ρ. Mais si ρ=0, alors là encore les deux conditions d'arrêt ne peuvent être remplie simultanément :

$$\rho = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = k_1 \\ \sigma_2 = k_2 \end{cases} \qquad \sigma_1 + \sigma_2 = -1 = k_1 + k_2 \Rightarrow k_2 = -1 - k_1 \Rightarrow \vartheta_1 = 1 + k_1 \qquad \vartheta_2 = 1 + k_2 = -k_1 < 0$$

Et si ρ=1, il en est de même :

$$\rho = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 1 + k_1 \\ \sigma_2 = 1 + k_2 \end{cases} \qquad \sigma_1 + \sigma_2 = -1 = 2 + k_1 + k_2 \Rightarrow k_2 = -3 - k_1 \Rightarrow \vartheta_1 = 1 + k_1 \qquad \vartheta_2 = 1 + k_2 = -2 - k_1 < 0$$

De plus il n'y a pas de solution de forme normale lorsque α=0, car la convergence du développement n'est pas établie.

Aussi les deux solutions de forme normale sont en correspondance avec les solutions analytiques comme suit en tenant compte de la parité des formes normales et des formes analytiques :

$$\begin{cases} y''(z)-\left(z^2+\alpha\right)y(z)=0 \qquad \alpha=2\vartheta_1-1 \\ y_1(z)=e^{\frac{z^2}{2}}z^{\theta_1-1}\sum_{l=0}^{l=\left\lfloor\frac{\theta_1-1}{2}\right\rfloor}c_l\,z^{-2l} \qquad c_l=\frac{(2l-\theta_1-1)(2l-\theta_1)}{4\,l}c_{l-1} \qquad \sigma_1=\theta_1-1=\rho+k_1\Rightarrow k_1=\theta_1-1-\rho \\ \begin{cases}\theta_1=1\\ \rho=0 \quad k_1=0\end{cases} \quad \begin{cases}\theta_1=2\\ \rho=1 \quad k_1=0\end{cases} \quad \begin{cases}\theta_1=3\\ \rho=0 \quad k_1=2\end{cases} \quad \ldots \end{cases}$$

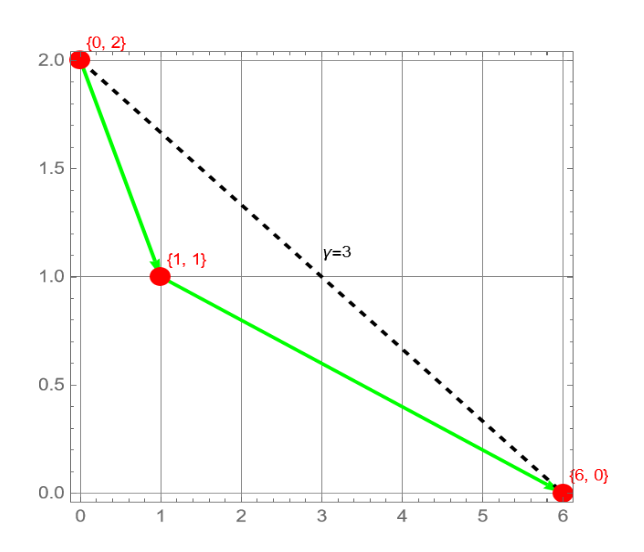
$$\begin{cases} y''(z)-\left(z^2+\alpha\right)y(z)=0 \qquad \alpha=1-2\vartheta_2 \\ y_2(z)=e^{-\frac{z^2}{2}}z^{\theta_2-1}\sum_{l=0}^{l=\left\lfloor\frac{\theta_2-1}{2}\right\rfloor}c_l\,z^{-2l} \qquad c_l=-\frac{(2l-\theta_2-1)(2l-\theta_2)}{4\,l}c_{l-1} \qquad \sigma_2=\theta_2-1=\rho+k_2\Rightarrow k_2=\theta_2-1-\rho \\ \begin{cases}\theta_2=1\\ \rho=0 \quad k_2=0\end{cases} \quad \begin{cases}\theta_2=2\\ \rho=1 \quad k_2=0\end{cases} \quad \begin{cases}\theta_2=3\\ \rho=0 \quad k_1=2\end{cases} \quad \ldots \end{cases}$$

Par ailleurs la solution de l'équation différentielle est bien connu et s'exprime à l'aide des fonctions paraboliques cylindriques :

$$y''(z)-\left(z^2+\alpha\right)y(z)=0\Rightarrow\begin{cases} y(z)=a\,D_{-\frac{1+\alpha}{2}}\left(z\sqrt{2}\right)+b\,D_{-\frac{1-\alpha}{2}}\left(i\,z\sqrt{2}\right) \\ \alpha=2\vartheta-1\Rightarrow y(z)=a\,D_{-\vartheta}\left(z\sqrt{2}\right)+b\,D_{\vartheta-1}\left(i\,z\sqrt{2}\right)\end{cases}$$

Exemple 4 (i) A.R.Forsythe Chapitre 108, page 347

Soit l'équation différentielle du second degré suivante : $z^2 y''(z) - \left(z^4 + \frac{3}{4}\right) y(z) = 0$. *Le point z=∞ est un point irrégulier essentiel et le point z=0 est un point singulier régulier. Pour ce dernier point l'équation indicielle donne les deux racines ρ=-1/2 ou ρ=3/2. Dans ce cas l'équation a deux solutions régulières indépendantes de la forme* $y_1(z) = z^{\frac{3}{2}} \times \sum_{l=0}^{l=+\infty} c_l z^l$ *et* $y_2(z) = z^{-\frac{1}{2}} \times \sum_{l=0}^{l=+\infty} b_l z^l$. *Mais intéressons nous d'abord à la singularité essentielle z=∞. Par le changement de variable :* $z \to \frac{1}{z}$ *l'équation différentielle devient :* $y''(z) + \frac{2}{z} y'(z) - \frac{4+3z^4}{4z^6} y(z) = 0$ *pour laquelle* $z=0$ *est devenu le point singulier essentiel. Le diagramme de Newton-Puisieux est de la forme :*



Cela conduit à proposer un terme exponentiel comme suit: $y(z) = e^{\Omega(z)} u(z)$ $\Omega(z) = \frac{\beta_1}{z} + \frac{\beta_2}{z^2}$ *et le développement en série de l'expression:* $(\Omega'(z))^2 + P_1(z)(\Omega'(z))^1 + P_2(z)(\Omega'(z))^0$ *autour de z=0 à l'ordre 0 permet de fixer la valeur des deux paramètres β1 et β2 :*

$$(\Omega'(z))^2 + P_1(z)(\Omega'(z))^1 + P_2(z)(\Omega'(z))^0 = \frac{4\beta_2^2 - 1}{z^6} + \frac{4\beta_1\beta_2}{z^5} + O\left(\frac{1}{z^4}\right) \Rightarrow \beta_1 = 0 \quad \beta_2^2 = \beta^2 = \frac{1}{4}$$

En insérant le terme exponentiel $y(z) = e^{\frac{\beta}{z^2}} u(z)$ *avec* $\beta^2 = \frac{1}{4}$ *on obtient une équation différentielle du second degré qui possède une solution régulière :* $u''(z) + 2\frac{z^2 - 2\beta}{z^3} u'(z) + \frac{8\beta - 3z^2}{4z^4} u(z) = 0$ *. Et l'équation indicielle de cette dernière donne la valeur de l'exposant pour la solution régulière :* $\sigma = \frac{1}{2}$.

L'injection d'un développement de la forme $u(z)=z^{\sigma}\sum_{l=0}^{l=+\infty}c_l z^l$ *conduit à une récurrence à deux termes par pas de deux :* $c_0=1 \quad c_1=0 \quad c_l=\frac{l(l-2)}{4l\beta}c_{l-2} \qquad l\geq 2$ *. Cette récurrence s'arrête immédiatement pour l=0. Cela donne les deux solutions sous forme normale :* $y(z)=z^{-\frac{1}{2}}e^{\pm\frac{z^2}{2}}$ *qui coexistent ici. Ces solutions sont directement en lien avec les solutions régulières. Pour ces dernières en injectant une solution de la forme* $y(z)=z^{\rho}\sum_{l=0}^{l=+\infty}c_l z^l$*, on obtient une récurrence à deux termes par « pas de 4 » sur les coefficients du développement de la forme :* $c_0=1 \quad c_1=0 \quad c_2=0 \quad c_3=0 \quad c_l=\frac{4\,c_{l-4}}{(2l+2\rho+1)(2l+2\rho-3)} \qquad l\geq 4$.

Ce qui donne pour ρ=3/2, la solution régulière :

$$c_0=1 \quad c_{4l}=\frac{c_{4l-4}}{8(2l+1)} \quad l\geq 4 \qquad c_{4l+1}=c_{4l+2}=c_{4l+3}=0 \Rightarrow c_{4l}=\frac{1}{16^l l!}\times\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+l\right)}$$

$$y_0(z)=z^{\frac{3}{2}}\times\sum_{l=0}^{l=+\infty}\frac{1}{16^l l!}\times\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+l\right)}\times z^{4l}\approx z^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{24}\times z^{\frac{11}{2}}+\frac{1}{1980}\times z^{\frac{19}{2}}+\frac{1}{322560}\times z^{\frac{27}{2}}+\ldots$$

Et pour ρ=-1/2, la solution régulière :

$$c_0=1 \quad c_{4l}=\frac{c_{4l-4}}{8l(2l-1)} \qquad l\geq 4 \qquad c_{4l+1}=c_{4l+2}=c_{4l+3}=0 \Rightarrow c_{4l}=\frac{1}{16^l l!}\times\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+l\right)}$$

$$y_1(z)=z^{-\frac{1}{2}}\times\sum_{l=0}^{l=+\infty}\frac{1}{16^l l!}\times\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+l\right)}\times z^{4l}\approx z^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{8}\times z^{\frac{7}{2}}+\frac{1}{384}\times z^{\frac{15}{2}}+\frac{1}{46080}\times z^{\frac{23}{2}}+\ldots$$

Il se trouve que :

$$y_0(z)=z^{\frac{3}{2}}\times\sum_{l=0}^{l=+\infty}\frac{1}{16^l l!}\times\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+l\right)}\times z^{4l}=z^{-\frac{1}{2}}\left(e^{\pm\frac{z^2}{2}}-e^{\pm\frac{z^2}{2}}\right)\approx z^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{24}\times z^{\frac{11}{2}}+\frac{1}{1980}\times z^{\frac{19}{2}}+\frac{1}{322560}\times z^{\frac{27}{2}}+\ldots$$

$$y_1(z)=z^{-\frac{1}{2}}\times\sum_{l=0}^{l=+\infty}\frac{1}{16^l l!}\times\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+l\right)}\times z^{4l}=\frac{z^{-\frac{1}{2}}}{2}\left(e^{\pm\frac{z^2}{2}}+e^{\pm\frac{z^2}{2}}\right)\approx z^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{8}\times z^{\frac{7}{2}}+\frac{1}{384}\times z^{\frac{15}{2}}+\frac{1}{46080}\times z^{\frac{23}{2}}+\ldots$$

Exemple 4 (ii) A.R.Forsythe Chapitre 108, page 347

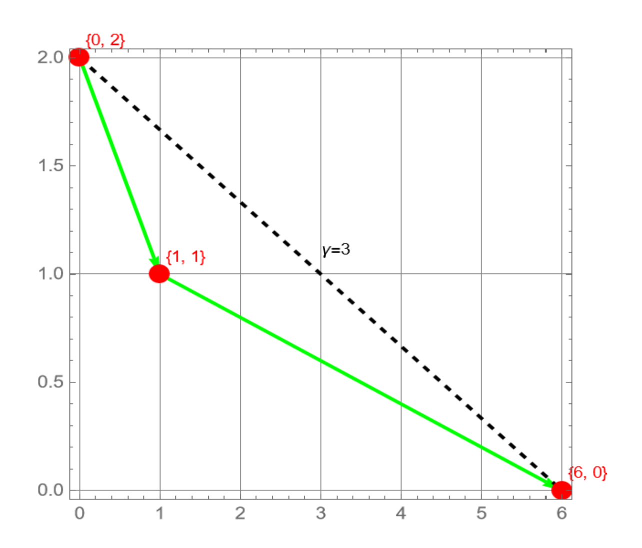
Soit l'équation différentielle du second degré suivante :

$$z^2 y''(z) - 2\,b\,z\,(\zeta + z)\,y'(z) - 4\delta^2\left(z^4 - b^2 z^2 - 2b\,z - \frac{\varepsilon}{4}\right) y(z) = 0$$

Le point z=∞ est un point irrégulier essentiel et le point z=0 est un point singulier régulier. Par le changement de variable : $z \to \frac{1}{z}$ *l'équation différentielle devient :*

$$y''(z) + \frac{2(b(1+z\zeta)+z)}{z^2} y'(z) + \delta^2\,\frac{z^4\varepsilon + 4b\,z^2(b+2z) - 4}{4\,z^6}\,y(z) = 0$$

pour laquelle $z=0$ *est devenu le point singulier essentiel. Le diagramme de Newton-Puisieux est de la forme :*



Cela conduit à proposer un terme exponentiel comme suit: $y(z) = e^{\Omega(z)} u(z) \quad \Omega(z) = \frac{\beta_1}{z} + \frac{\beta_2}{z^2}$ *et le développement en série de l'expression:* $(\Omega'(z))^2 + P_1(z)(\Omega'(z))^1 + P_2(z)(\Omega'(z))^0$ *autour de z=0 à l'ordre 0 permet de fixer la valeur des deux paramètres β1 et β2 :*

$$(\Omega'(z))^2 + P_1(z)(\Omega'(z))^1 + P_2(z)(\Omega'(z))^0 = \frac{4(\beta_2{}^2 - \delta^2)}{z^6} + \frac{4\beta_2(\beta_1 - b)}{z^5} + O\left(\frac{1}{z^4}\right) \Rightarrow \beta_1 = b \quad \beta_2{}^2 = \beta^2 = \delta^2$$

En insérant le terme exponentiel $y(z) = e^{\frac{b}{z} + \frac{\beta}{z^2}} u(z) \quad avec \quad \beta^2 = \delta^2$ *on obtient une équation différentielle du second degré qui possède une solution régulière :*

$$y''(z) + \frac{2\left(z^2(1+b\zeta) - 2\beta\right)}{z^3} y'(z) + \frac{2\beta + \delta^2\varepsilon\,z^2 + b^2 z^2\left(4\delta^2 - 1 - 2z\zeta\right) + b\left(8\,z\,\delta^2 - 4\beta\,\zeta\right)}{z^4}\,y(z) = 0$$

Et l'équation indicielle de cette dernière donne la valeur de l'exposant pour la solution régulière :

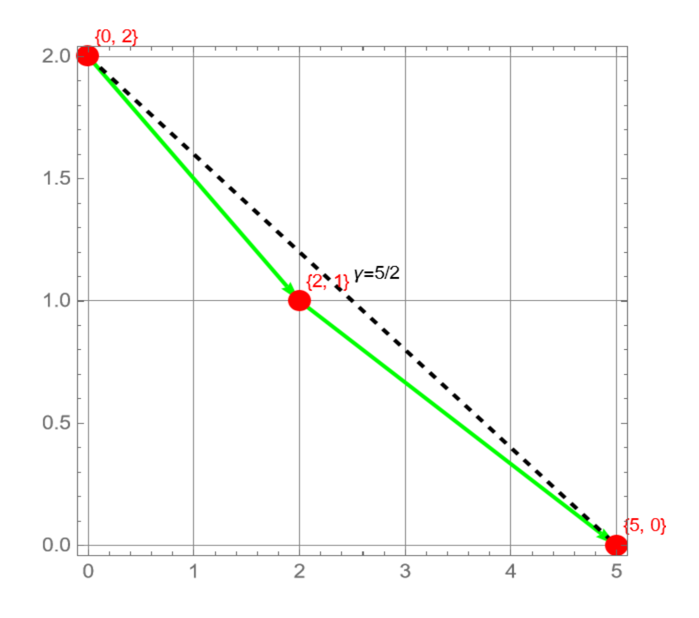
$$\sigma = \frac{1}{2} + \frac{b^2(4\delta^2 - 1)}{4\beta} - b\zeta$$

L'injection d'un développement de la forme $u(z)=z^{\sigma}\sum_{l=0}^{l=+\infty}c_l z^l$ *conduit à une récurrence à trois termes assez complexe qui se simplifie notoirement lorsque* $4\delta^2=b\,\zeta \quad et \quad \varepsilon=5 \quad et \quad \delta^2=1/4\Rightarrow\zeta=\frac{1}{b}$ *puisque la récurrence est à deux termes pas pas de deux :* $c_0=1 \quad c_{2l}=\frac{l\,(l-1)}{2l\,\beta} \quad c_{2l+1}=0$ *qui par évidence s'arrête dès l'indice l=0. Aussi l'équation différentielle :* $z^2y''(z)-2z\,(1+b\,z)\,y'(z)-\left(z^4-b^2z^2-2b\,z-\frac{5}{4}\right)y(z)=0$ *et* $\sigma=-\frac{1}{2}$.

Cela donne donc comme forme normale : $y(z)=\sqrt{z}\,e^{b\,z+\beta\,z^2} \qquad avec \quad \beta^2=\frac{1}{4}$.

Exemple ouvrage « S . Yu . Slavyanov . W . Lay Special Functions, A Unified Theory Based on Singularities » Linear Second Order ODE exemple (1.5 .4) page 33

Soit l'équation différentielle du second degré suivante : $y''(z)+a\,y'(z)+(c-b\,z)\,y(z)=0$ *. Le point z=∞ est un point irrégulier essentiel et le point z=0 est un point ordinaire. Par le changement de variable :* $z\to\frac{1}{z}$ *l'équation différentielle devient :* $y''(z)+\frac{(2\,z-a)}{z^2}y'(z)+\frac{c\,z-b}{z^5}\,y(z)=0$ *pour laquelle* $z=0$ *est devenu le point singulier essentiel. Le diagramme de Newton-Puisieux est de la forme :*



Cela conduit à envisager une solution de forme subnormale. Aussi soit on peut proposer un changement de variable u=√z puis u->z, soit on propose un terme exponentiel comme suit: $y(z)=e^{\Omega(z)}u(z) \quad \Omega(z)=\frac{\alpha}{\sqrt{z}}+\frac{\beta}{z}+\frac{\gamma}{z\sqrt{z}}$ *et le développement en série de l'expression:* $(\Omega'(z))^2+P_1(z)(\Omega'(z))^1+P_2(z)(\Omega'(z))^0$ *autour de z=0 à l'ordre 0 permet de fixer la valeur des trois paramètres α, β et γ :*

$$(\Omega'(z))^2+P_1(z)(\Omega'(z))^1+P_2(z)(\Omega'(z))^0=\frac{\frac{9\gamma^2}{4}-b}{z^5}+\frac{3}{2}\gamma\frac{a+2\beta}{z^{9/2}}+\frac{c+a\beta+\beta^2+\frac{3\alpha\gamma}{2}}{z^4}+O\left(\frac{1}{z^{7/2}}\right)$$

$$\Rightarrow\gamma^2=\frac{4b}{9} \quad \beta=-\frac{a}{2} \quad c-\frac{a^2}{4}+\frac{3\alpha\gamma}{2}=0\Rightarrow\alpha=\frac{a^2-4c}{6\gamma}$$

Que l'on peut résumer ainsi en posant le choix suivant de paramètres :

$$\begin{cases} \gamma = \dfrac{2\varepsilon\sqrt{b}}{3} \\ \beta = -\dfrac{a}{2} \qquad\qquad avec \quad \varepsilon^2 = 1 \\ \alpha = \varepsilon\,\dfrac{a^2 - 4c}{4\sqrt{b}} \end{cases}$$

En insérant le terme exponentiel $y(z) = e^{\frac{\alpha}{\sqrt{z}}+\frac{\beta}{z}+\frac{\gamma}{z\sqrt{z}}}u(z)$ *et en effectuant le changement de variable u=√z puis u->z, on obtient une équation différentielle du second degré qui possède une solution régulière :*

$$u''(z) + \left(\frac{3}{z} - \frac{\varepsilon\,(a^2-4c)}{z^2} - \frac{4\varepsilon\sqrt{b}}{z^4}\right)u'(z) + \frac{32\varepsilon\, b\sqrt{b} + z\,(a^2-4c)(a^2-4c-4\varepsilon\, z\,\sqrt{b})}{16\, b\, z^5}\,u(z) = 0$$

Et l'équation indicielle de cette dernière donne la valeur de l'exposant pour la solution régulière :

$$u(z) = z^{\sigma}\sum_{l=0}^{l=+\infty} c_l z^l \rightarrow \sigma = \frac{1}{2}$$

Les coefficients de ce développement suivent une récurrence à 4 termes de la forme :

$$\begin{cases} c_0 = 1 \quad c_1 = \dfrac{\varepsilon\,(a^2-4c)^2}{8^2 b\sqrt{b}} \quad c_2 = -\dfrac{\varepsilon}{16b}\times\left((a^2-4c)\varepsilon - \dfrac{(a^2-4c)^2}{8\sqrt{b}}\,c_1\right) = -\dfrac{(a^2-4c)}{16b}\times\left(1 - \dfrac{(a^2-4c)^3}{8^3 b^2}\right) \\ c_l = \dfrac{\varepsilon}{4\sqrt{b}\times l}\times\left(\dfrac{(a^2-4c)^2}{16b}\,c_{l-1} - (a^2-4c)\,\varepsilon\,\dfrac{l-1}{2\sqrt{b}}\,c_{l-2} + \dfrac{(2l-1)(2l-5)}{4}\,c_{l-3}\right) \end{cases}$$

Toutefois cette récurrence ne converge pas pour des valeurs z réelles. Mais formellement la forme normale est la suivante :

$$y(z) = e^{\varepsilon\frac{a^2-4c}{4\sqrt{b}}\sqrt{z} + -\frac{a}{2}z + \frac{2\varepsilon\sqrt{b}}{3}z\sqrt{z}}\; z^{-\frac{1}{4}} \times \sum_{l=0}^{l=+\infty} c_l\, z^{-\frac{l}{2}}$$

De plus il n'y a pas de jeu de paramètres évident (et non trivial) a,b,c tel que la récurrence s'arrête.

Exemple NIST , équation du second degré de rang 1 au point singulier z=∞

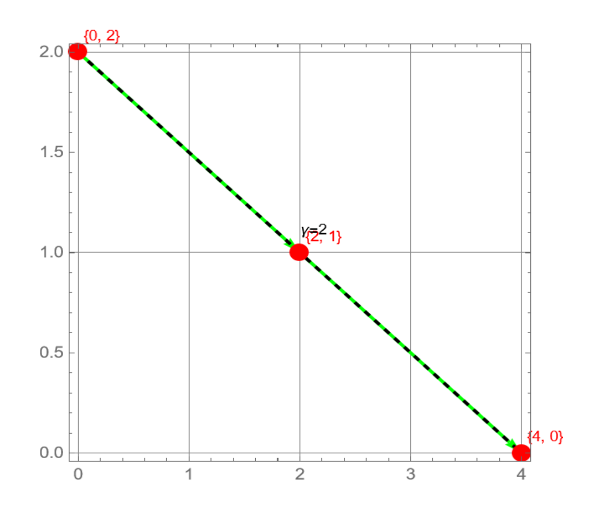
Soit l'équation différentielle du second degré suivante :

$$\begin{cases} y''(z)+f(z)\,y'(z)+g(z)\,y(z)=0 \\ f(z)=f_0+\dfrac{f_1}{z}+\dfrac{f_2}{z^2}+\ldots \quad f_0\neq 0 \\ g(z)=g_0+\dfrac{g_1}{z}+\dfrac{g_2}{z^2}+\ldots \quad g_0\neq 0 \end{cases}$$

Le point z=∞ est un point irrégulier essentiel si g_0 n'est pas nul et le point z=0 est également un point singulier irrégulier. Par le changement de variable : $z\to\frac{1}{z}$ l'équation différentielle devient :

$$\begin{cases} y''(z)+\left(\dfrac{2}{z}-\dfrac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{z^2}\right)y'(z)+\dfrac{g\left(\frac{1}{z}\right)}{z^4}\,y(z)=0 \\ f\left(\frac{1}{z}\right)=f_0+f_1z+f_2z^2+\ldots \quad f_0\neq 0 \qquad g\left(\frac{1}{z}\right)=g_0+g_1z+g_2z^2+\ldots \quad g_0\neq 0 \end{cases}$$

pour laquelle $z=0$ est devenu le point singulier essentiel. Le diagramme de Newton-Puisieux est de la forme :



Cela conduit à proposer un terme exponentiel comme suit: $y(z)=e^{\Omega(z)}u(z)\quad \Omega(z)=\frac{\beta}{z}$ et le développement en série de l'expression: $(\Omega'(z))^2+P_1(z)(\Omega'(z))^1+P_2(z)(\Omega'(z))^0$ autour de z=0 à l'ordre 0 permet de fixer la valeur du paramètre β :

$$(\Omega'(z))^2+P_1(z)(\Omega'(z))^1+P_2(z)(\Omega'(z))^0=\frac{\beta(\beta+f_0)+g_0}{z^4}+O\left(\frac{1}{z^3}\right)\Rightarrow \beta(\beta+f_0)+g_0=0\Rightarrow \beta=\frac{-f_0\pm\sqrt{f_0^{\,2}-4g_0}}{2}$$

En insérant le terme exponentiel $y(z)=e^{\frac{\beta}{z}}u(z)\quad avec\quad \beta(\beta+f_0)+g_0=0$ *on obtient une équation différentielle du second degré qui possède une solution régulière :*

$$\begin{cases} u''(z)+\dfrac{2\,(z-\alpha)-f\left(\dfrac{1}{z}\right)}{z^2}u'(z)+\dfrac{g\left(\dfrac{1}{z}\right)-g_0+\beta\times\left(f\left(\dfrac{1}{z}\right)-f_0\right)}{z^4}u(z)=0 \\ f\left(\dfrac{1}{z}\right)=f_0+f_1z+f_2z^2+\dots\quad f_0\neq 0 \qquad g\left(\dfrac{1}{z}\right)=g_0+g_1z+g_2z^2+\dots\quad g_0\neq 0 \end{cases}$$

Et l'équation indicielle de cette dernière donne la valeur de l'exposant pour la solution régulière :

$$\sigma=\frac{g_1+\beta\,f_1}{f_0+2\beta}$$

En revenant à l'équation originale : $\begin{cases} y''(z)+f(z)\,y'(z)+g(z)\,y(z)=0 \\ f(z)=f_0+\dfrac{f_1}{z}+\dfrac{f_2}{z^2}+\dots\quad f_0\neq 0 \qquad g(z)=g_0+\dfrac{g_1}{z}+\dfrac{g_2}{z^2}+\dots\quad g_0\neq 0 \end{cases}$

L'injection d'un développement de la forme :

$$y(z)=e^{\beta\,z}z^{-\mu}\sum_{l=0}^{l=+\infty}c_lz^{-l}\qquad avec\quad \beta(\beta+f_0)+g_0=0\quad et\quad \mu=-\frac{g_1+\beta\,f_1}{f_0+2\beta}$$

conduit à une récurrence à termes successifs grandissant qui revêt la forme suivante :

$$c_0=1\qquad (f_0+2\beta)\,l\,c_l=(\mu-l)(\mu+1-l)c_{l-1}+\sum_{j=1}^{j=l}\left(\beta\,f_{j+1}+g_{j+1}-(l-j-\mu)f_j\right)c_{l-j}$$

$$\Leftrightarrow (f_0+2\beta)\,l\,c_l=\left((\mu-l+f_1)(\mu+1-l)+\beta\,f_2+g_2\right)c_{l-1}+\sum_{j=2}^{j=l}\left(\beta\,f_{j+1}+g_{j+1}+(\mu+j-l)f_j\right)c_{l-j}$$

$$\to\begin{cases} (f_0+2\beta)c_1=\left(\mu\,(\mu-1)+\beta\,f_2+g_2+\mu\,f_1\right)c_0 \\ 2\,(f_0+2\beta)c_2=(\mu-1)(\mu-2)c_1+\left(\beta\,f_2+g_2-(1-\mu)f_1\right)c_1+\left(\beta\,f_3+g_3+\mu\,f_2\right)c_0 \\ \dots \end{cases}$$

Lorsque les termes du développement des fonctions f et g sont limités, soit que f et g sont des polynômes en 1/z, alors la récurrence est à nombre restreint de termes. Par exemple si f et g sont des polynômes de degré 1 en 1/z, la récurrence est à deux termes :

$$f(z)=f_0+\frac{f_1}{z}\quad g(z)=g_0+\frac{g_1}{z}\Rightarrow c_0=1\qquad (f_0+2\beta)\,l\,c_l=(\mu-l+f_1)(\mu+1-l)c_{l-1}$$

si f et g sont des polynômes de degré 2 en 1/z, la récurrence est à trois termes :

$$f(z)=f_0+\frac{f_1}{z}+\frac{f_2}{z^2}\quad g(z)=g_0+\frac{g_1}{z}+\frac{g_2}{z^2}\Rightarrow\begin{cases} c_0=1 \\ (f_0+2\beta)\,l\,c_l=(\mu-l+f_1)(\mu+1-l)c_{l-1}+(\beta\,f_2+g_2)c_{l-1}+(\mu+2-l)f_2c_{l-2} \end{cases}$$

Toutefois en général la récurrence diverge pour des valeurs de z réelles, sauf si la récurrence s'arrête. Prenons par exemple le cas d'une récurrence à deux termes :

$$f(z)=f_0+\frac{f_1}{z} \quad g(z)=g_0+\frac{g_1}{z} \Rightarrow c_0=1 \qquad (f_0+2\beta)\,l\,c_l=(\mu-l+f_1)(\mu+1-l)c_{l-1}$$

Alors il faut qu'il existe un entier ϑ tel que : $\mu+1-\theta=0 \quad ou \quad \mu+f_1-\theta=0$*. Pour ces deux cas la récurrence s'arrête à l'indice ϑ-1.*

Dans le premier cas cela implique une relation entre les divers coefficients f_0,f_1 et g_1 :

$$\theta=\mu+1 \Rightarrow \theta=1-\frac{g_1+\beta\,f_1}{f_0+2\beta} \Rightarrow \theta-1=-\frac{g_1+\beta\,f_1}{f_0+2\beta} \Rightarrow (f_0+2\beta)(\theta-1)+g_1+\beta\,f_1=0$$

Et une solution et une récurrence de la forme :

$$\begin{cases} c_0=1 \qquad (f_0+2\beta)^3\,l\,c_l=(g_1+\beta\,f_1+(l-f_1)(f_0+2\beta))(g_1+\beta\,f_1+(l-1)(f_0+2\beta))c_{l-1} \\ Avec \quad 1-\vartheta=\dfrac{g_1+\beta\,f_1}{f_0+2\beta} \Rightarrow c_l=\dfrac{(1-\vartheta+l-f_1)(l-\vartheta)c_{l-1}}{(f_0+2\beta)\,l} \end{cases}$$

$$y(z)=e^{\beta z}z^{-\mu}\sum_{l=0}^{l=\vartheta-1}c_l z^{-l} \qquad avec \quad \beta(\beta+f_0)+g_0=0 \quad et \quad \mu=-\frac{g_1+\beta\,f_1}{f_0+2\beta}$$

Dans le deuxième cas cela implique une relation entre les divers coefficients f_0,f_1 et g_1 :

$$\theta=\mu+f_1 \Rightarrow \theta=f_1-\frac{g_1+\beta\,f_1}{f_0+2\beta} \Rightarrow (f_0+2\beta)(\theta-f_1)+g_1+\beta\,f_1=0$$

Et une solution et une récurrence de la forme :

$$\begin{cases} c_0=1 \qquad (f_0+2\beta)^3\,l\,c_l=(g_1+\beta\,f_1+(l-f_1)(f_0+2\beta))(g_1+\beta\,f_1+(l-1)(f_0+2\beta))c_{l-1} \\ Avec \quad f_1-\vartheta=\dfrac{g_1+\beta\,f_1}{f_0+2\beta} \Rightarrow c_l=\dfrac{(f_1-\vartheta+l-1)(l-\vartheta)}{(f_0+2\beta)\,l}c_{l-1} \end{cases}$$

$$y(z)=e^{\beta z}z^{-\mu}\sum_{l=0}^{l=\vartheta-1}c_l z^{-l} \qquad avec \quad \beta(\beta+f_0)+g_0=0 \quad et \quad \mu=-\frac{g_1+\beta\,f_1}{f_0+2\beta}$$

<u>Cas $f_0^2 = 4g_0$ au point singulier irrégulier z=∞</u>

Considérons le cas plus ou moins trivial où l'équation se réduit à : $y''(z)+f_0 y'(z)+\frac{f_0^2}{4}y(z)=0$ *, la solution est exponentielle et de la forme :* $y(z)=A\,e^{-\frac{f_0 z}{2}}+B\,z\,e^{-\frac{f_0 z}{2}}$ *donc parfaitement analytique en z=0 et z=∞. Dans le cas général* $\begin{cases} y''(z)+f(z)\,y'(z)+g(z)\,y(z)=0 \\ f(z)=f_0+\frac{f_1}{z}+\frac{f_2}{z^2}+\dots \quad f_0\neq 0 \quad et \quad g(z)=\frac{f_0^2}{4}+\frac{g_1}{z}+\frac{g_2}{z^2}+\dots \end{cases}$ *où*

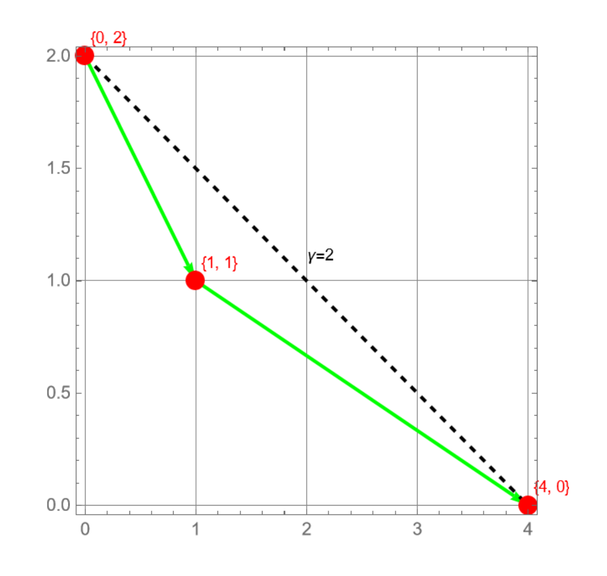
$f_0^2=4g_0 \to \beta=-\frac{f_0}{2}$ *, l'équation indicielle de la forme normale* $y(z)=e^{\beta z}z^{-\sigma}\sum_{l=0}^{l=+\infty}c_l z^{-l}=e^{\beta z}z^{\mu}\sum_{l=0}^{l=+\infty}c_l z^{-l}$ *donne une valeur de l'exposant* $\sigma=-\mu=\frac{g_1+\beta f_1}{f_0+2\beta}$ *infinie. Dans ces conditions la singularité z=0 est encore essentielle et il convient de procéder à une transformation supplémentaire de l'équation différentielle en partant de l'équation différentielle intermédiaire suivante autour du point irrégulier z=0 et en poursuivant également la construction d'une forme normale (ou subnormale) de celle-ci :*

$$\begin{cases} y''(z)+\dfrac{2(z-\beta)-f\left(\frac{1}{z}\right)}{z^2}y'(z)+\dfrac{g\left(\frac{1}{z}\right)-g_0+\beta\times\left(f\left(\frac{1}{z}\right)-f_0\right)}{z^4}y(z)=0 \\ f\left(\frac{1}{z}\right)=f_0+f_1 z+f_2 z^2+\dots \quad f_0\neq 0 \qquad g\left(\frac{1}{z}\right)=g_0+g_1 z+g_2 z^2+\dots \quad g_0\neq 0 \end{cases}$$

En la réécrivant sous cette forme : $\beta=-\frac{f_0}{2}\Rightarrow\begin{cases} f(z)=f_1+f_2 z+f_3 z^2+\dots \qquad g(z)=g_1+g_2 z+g_3 z^2+\dots \\ y''(z)+\frac{2-f(z)}{z}y'(z)+\frac{2\,g(z)-f_0\times f(z)}{2z^3}y(z)=0 \end{cases}$ *. Par le changement de variable* $u=\sqrt{z}\quad puis\quad u\to z$*, l'équation différentielle s'écrit sous la forme :*

$$\begin{cases} f(z)=f_1+f_2 z+f_3 z^2+\dots \qquad g(z)=g_1+g_2 z+g_3 z^2+\dots \\ y''(z)+\dfrac{3-2f(z^2)}{z}y'(z)+\dfrac{4\,g(z^2)-2f_0\times f(z^2)}{z^4}y(z)=0 \end{cases}$$

Le diagramme de Newton-Puisieux est de la forme :



Cela conduit à proposer un terme exponentiel comme suit: $y(z)=e^{\Omega(z)}u(z) \quad \Omega(z)=\frac{\beta}{z}$ *et le développement en série de l'expression:* $(\Omega'(z))^2+P_1(z)(\Omega'(z))^1+P_2(z)(\Omega'(z))^0$ *autour de z=0 à l'ordre 0 permet de fixer la valeur du paramètre β :*

$$(\Omega'(z))^2+P_1(z)(\Omega'(z))^1+P_2(z)(\Omega'(z))^0=\frac{\beta^2+4g_1-2f_0f}{z^4}+O\left(\frac{1}{z^3}\right)\Rightarrow \beta^2+4g_1-2f_0f_1=0\Rightarrow \beta=\pm\sqrt{2f_0f_1-4g_1}$$

En insérant le terme exponentiel $y(z)=e^{\frac{\beta}{z}}u(z) \quad avec \quad \beta^2+4g_1-2f_0f_1=0$ *on obtient une équation différentielle du second degré qui possède une solution régulière :*

$$\begin{cases} f(z)=f_1+f_2z+f_3z^2+\dots \qquad g(z)=g_1+g_2z+g_3z^2+\dots \\ u''(z)+\frac{z\left(3-2f\left(z^2\right)\right)-2\beta}{z^2}u'(z)+\frac{4\left(g\left(z^2\right)-g_1\right)-2f_0\times\left(f\left(z^2\right)-f_1\right)+\beta\, z\left(2f\left(z^2\right)-1\right)}{z^4}u(z)=0 \end{cases}$$

Et l'équation indicielle donne la valeur de l'exposant pour la solution régulière : $\sigma=f_1-\frac{1}{2}$ *. En insérant le développement* $u(z)=z^{\sigma}\sum_{l=0}^{l=+\infty}c_lz^l$*, cela conduit à une récurrence à nombre de termes grandissant. Pour appréhender la forme de cette récurrence, procédons d'abord par des cas plus simples. Supposons que* $f(z)=f_1 \quad et \quad g(z)=g_1$*, alors la récurrence est à deux termes :*

$$c_0=1 \qquad c_l=\frac{(2l+2f_1-3)(2l-2f_1+1)}{8l\beta}\times c_{l-1}$$

Si $f(z)=f_1+f_2z \quad et \quad g(z)=g_1+g_2z$*, alors la récurrence est à quatre termes de la forme :*

$$c_0=1 \qquad c_1=\frac{1}{2\beta}\left(\frac{(2f_1-1)(3-2f_1)}{4}+4g_2-2f_0f_2\right)\times c_0 \qquad c_2=\frac{1}{4\beta}\left(\frac{(2f_1+1)(5-2f_1)}{4}+4g_2-2f_0f_2\right)\times c_1+2f_2\beta\times c_0$$

$$2l\beta\, c_l=\left(\frac{(2l+2f_1-3)(2l-2f_1+1)}{4}+4g_2-2f_0f_2\right)\times c_{l-1}+2f_2\beta\times c_{l-2}-f_2(2l+2f_1-7)\times c_{l-3}$$

Si $f(z)=f_1+f_2z+f_3z^2 \quad et \quad g(z)=g_1+g_2z+g_3z^2$*, alors la récurrence est à six termes et ainsi de suite … Là encore cette récurrence ne converge pas pour des valeurs de z réelles, excepté dans le cas où la série est elle-même limité en terme. Pour l'exemple le cas le plus simple est encore celui où* $f(z)=f_1 \quad et \quad g(z)=g_1$*, en revenant à l'équation originale que nous étudions qui est la suivante :* $y''(z)+\left(f_0+\frac{f_1}{z}\right)y'(z)+\left(\frac{f_0^2}{4}+\frac{g_1}{z}\right)y(z)=0$ *, la récurrence* $c_l=\frac{(2l+2f_1-3)(2l-2f_1+1)}{8l\beta}\times c_{l-1}$ *s'arrête pour deux cas :*

Si $2\vartheta-2f_1+1=0\Rightarrow f_1=\frac{1}{2}+\vartheta$ *où ϑ est un entier positif et dans ce cas la récurrence s'arrête pour la valeur d'indice ϑ-1, et la solution s'écrit :*

$$y(z)=e^{-\frac{f_0z}{2}}e^{\beta\sqrt{z}}z^{-\frac{\vartheta}{2}}\times\sum_{l=0}^{l=\vartheta-1}c_lz^{-\frac{l}{2}} \quad c_0=1 \quad c_l=\frac{(l+\vartheta-1)(l-\vartheta)}{2l\beta}\times c_{l-1} \quad \beta^2=f_0(1+2\vartheta)-4g_1$$

Entres autres solutions il vient :

$$\vartheta=1\rightarrow y(z)=\frac{e^{-\frac{f_0 z}{2}+\beta\sqrt{z}}}{\sqrt{z}}\quad \beta^2=3f_0-4g_1 \qquad \vartheta=2\rightarrow y(z)=\frac{e^{-\frac{f_0 z}{2}+\beta\sqrt{z}}}{z}\left(1-\frac{1}{\beta\sqrt{z}}\right)\quad \beta^2=5f_0-4g_1$$

$$\vartheta=3\rightarrow y(z)=\frac{e^{-\frac{f_0 z}{2}+\beta\sqrt{z}}}{z\sqrt{z}}\left(1-\frac{3}{\beta\sqrt{z}}+\frac{3}{\beta^2 z}\right)\quad \beta^2=7f_0-4g_1 \qquad \vartheta=4\rightarrow y(z)=\frac{e^{-\frac{f_0 z}{2}+\beta\sqrt{z}}}{z^2}\left(1-\frac{6}{\beta\sqrt{z}}+\frac{15}{\beta^2 z}-\frac{15}{\beta^3 z\sqrt{z}}\right)\quad \beta^2=9f_0-4g$$

Si $2\vartheta+2f_1-3=0\Rightarrow f_1=\frac{3}{2}-\vartheta$ *où* ϑ *est un entier positif et dans ce cas la récurrence s'arrête pour la valeur d'indice* ϑ*-1, et la solution s'écrit :*

$$y(z)=e^{-\frac{f_0 z}{2}}e^{\beta\sqrt{z}}z^{\frac{\vartheta-1}{2}}\times\sum_{l=0}^{l=\vartheta-1}c_l z^{-\frac{l}{2}}\quad c_0=1\quad c_l=\frac{(l-\vartheta)(l-1+\vartheta)}{2l\beta}\times c_{l-1}\quad \beta^2=f_0(3-2\vartheta)-4g_1$$

Entres autres solutions il vient :

$$\vartheta=1\rightarrow y(z)=e^{-\frac{f_0 z}{2}+\beta\sqrt{z}}\quad \beta^2=f_0-4g_1 \qquad \vartheta=2\rightarrow y(z)=e^{-\frac{f_0 z}{2}+\beta\sqrt{z}}\sqrt{z}\left(1-\frac{1}{\beta\sqrt{z}}\right)\quad \beta^2=-f_0-4g_1$$

$$\vartheta=3\rightarrow y(z)=e^{-\frac{f_0 z}{2}+\beta\sqrt{z}}z\left(1-\frac{3}{\beta\sqrt{z}}+\frac{3}{\beta^2 z}\right)\quad \beta^2=-3f_0-4g_1 \qquad \vartheta=4\rightarrow y(z)=e^{-\frac{f_0 z}{2}+\beta\sqrt{z}}z\sqrt{z}\left(1-\frac{6}{\beta\sqrt{z}}+\frac{15}{\beta^2 z}-\frac{15}{\beta^3 z\sqrt{z}}\right)\quad \beta^2=-5f_0-4g$$

Finalement je donne le résultat pour le cas $f_0^{\,2}=4g_0$*, soit l'équation différentielle :*

$$y''(z)+f(z)\,y'(z)+g(z)\,y(z)=0\quad avec\quad f(z)=f_0+\frac{f_1}{z}+\frac{f_2}{z^2}+\ldots\quad et\quad g(z)=\frac{f_0^{\,2}}{4}+\frac{g_1}{z}+\frac{g_2}{z^2}+\ldots\quad f_0\neq 0$$

dans le cadre d'une forme normale au point singulier z=∞ comme suit :

$$y(z)=e^{-\frac{f_0 z}{2}}e^{\beta\sqrt{z}}z^{\frac{1-2f_1}{4}}\times\sum_{l=0}^{l=\infty}c_l\,z^{-\frac{l}{2}}\quad avec\quad \beta^2=2f_0f_1-4g_1$$

La récurrence générale à terme grandissant s'écrit :

$$\begin{cases} c_0=1\qquad 8\beta\,c_1=\left((2f_1-1)(3-2f_1)+4\,(4g_2-2f_0f_2)\right)\times c_0\quad 16\beta\,c_2=\left((2f_1+1)(5-2f_1)+4\,(4g_2-2f_0f_2)_2\right)\times c_1+8f_2\beta\times c_0 \\ \rightarrow 8l\beta\,c_l=(2\,(l+f_1)-3)(2\,(l-f_1)+1)\times c_{l-1}+8\beta\times\sum_{j=1}^{j=\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor}f_{j+1}\times c_{l-2j}+8\times\sum_{j=0}^{j=\left\lfloor\frac{l-1}{2}\right\rfloor}(2g_{j+2}-f_0f_{j+2})\times c_{l-(2j+1)}+4\times\sum_{j=1}^{j=\left\lfloor\frac{l-1}{2}\right\rfloor}f_{j+1}(4j+3-2(l+f_1))\times c_{l-(2j+1)} \end{cases}$$

Là encore rappelons que ce développement diverge hormis une récurrence finie (voir cas simplifié étudié précédemment).

Considération sur la convergence des solutions de l'équation différentielle de rang 1

Revenons à l'équation différentielle :

$$y''(z)+f(z)\,y'(z)+g(z)\,y(z)=0 \quad avec \quad f(z)=f_0+\frac{f_1}{z}+\frac{f_2}{z^2}+\ldots \quad f_0\neq 0 \quad et \quad g(z)=g_0+\frac{g_1}{z}+\frac{g_2}{z^2}+\ldots \quad g_0\neq 0$$

Dont les solutions de forme viennent d'être décrite :

$$\beta(\beta+f_0)+g_0=0\rightarrow\begin{cases}\beta_1=\dfrac{-f_0+\sqrt{f_0^{\,2}-4g_0}}{2} \quad \beta_2=\dfrac{-f_0-\sqrt{f_0^{\,2}-4g_0}}{2} \quad \beta_1-\beta_2=\sqrt{f_0^{\,2}-4g_0} \quad \beta_1+\beta_2=-f_0\\ f_0+2\beta_1=\sqrt{f_0^{\,2}-4g_0}=\beta_1-\beta_2 \quad f_0+2\beta_2=-\sqrt{f_0^{\,2}-4g_0}=\beta_2-\beta_1\\ \mu=-\dfrac{g_1+\beta\,f_1}{f_0+2\beta} \quad \mu_1=\dfrac{g_1+\beta_1 f_1}{\beta_2-\beta_1} \quad \mu_2=\dfrac{g_1+\beta_2 f_1}{\beta_1-\beta_2} \quad \mu_2-\mu_1=\dfrac{2g_1+(\beta_1+\beta_2)f_1}{\beta_1-\beta_2}=\dfrac{2g_1-f_0 f_1}{\sqrt{f_0^{\,2}-4g_0}}\end{cases}$$

$$y_1(z)\underset{z\to\infty}{\propto}e^{\beta_1 z}z^{\mu_1}\sum_{l=0}^{l=+\infty}c_{l,1}z^{-l}\underset{z\to\infty}{\approx}e^{\beta_1 z}\left((\beta_2-\beta_1)\,z\right)^{\mu_1}\sum_{l=0}^{l=+\infty}c_{l,1}z^{-l}=e^{\beta_1 z}\times\left(-\sqrt{f_0^{\,2}-4g_0}\;z\right)^{\mu_1}\times\sum_{l=0}^{l=+\infty}c_{l,1}z^{-l}$$

$$y_2(z)\underset{z\to\infty}{\propto}e^{\beta_2 z}z^{\mu_2}\sum_{l=0}^{l=+\infty}c_{l,2}z^{-l}\underset{z\to\infty}{\approx}e^{\beta_2 z}\left((\beta_2-\beta_1)\,z\right)^{\mu_2}\sum_{l=0}^{l=+\infty}c_{l,2}z^{-l}=e^{\beta_2 z}\times\left(-\sqrt{f_0^{\,2}-4g_0}\;z\right)^{\mu_2}\times\sum_{l=0}^{l=+\infty}c_{l,2}z^{-l}$$

Et dont les coefficients du développement suivent la récurrence suivante :

$$\begin{cases}c_l=c_{l,1} \quad ou \quad c_{l,2} \quad et \quad \mu=\mu_1 \quad ou \quad \mu_2 \quad et \quad \beta=\beta_1 \quad ou \quad \beta_2\\ c_0=1 \qquad (f_0+2\beta)\,l\,c_l=\left((\mu-l+f_1)(\mu+1-l)+\beta\,f_2+g_2\right)c_{l-1}+\displaystyle\sum_{j=2}^{j=l}\left(\beta\,f_{j+1}+g_{j+1}+(\mu+j-l)f_j\right)c_{l-j}\end{cases}$$

La convergence respective des deux solutions est établie dans les secteurs du plan complexe suivant :

$$\begin{cases}y_1(z) \quad converge\ pour \quad \left|Arg\left((\beta_2-\beta_1)\,z\right)\right|\leq\dfrac{3\pi}{2}-\delta \quad \forall\delta>0\\ Si \quad f_0^{\,2}>4g_0\rightarrow\beta_2-\beta_1<0\rightarrow y_1(z) \quad converge\ pour \quad \left|Arg(-z)\right|\leq\dfrac{3\pi}{2}-\delta \quad Notamment \quad z\in\mathbf{R} \quad z<0\end{cases}$$

$$\begin{cases}y_2(z) \quad converge\ pour \quad -\dfrac{\pi}{2}+\delta\leq Arg\left((\beta_2-\beta_1)\,z\right)\leq\dfrac{5\pi}{2}-\delta \quad \forall\delta>0\\ Si \quad f_0^{\,2}>4g_0\rightarrow\beta_2-\beta_1<0\rightarrow y_2(z) \quad converge\ pour \quad -\dfrac{\pi}{2}+\delta\leq Arg(-z)\leq\dfrac{5\pi}{2}-\delta \quad Notamment \quad z\in\mathbf{R} \quad z>0\end{cases}$$

Les secteurs en question sont en rapport avec la définition des lignes de Stockes. Mais j'espère que cela fera l'objet d'une discussion dans ce document par la suite.

Ce que je peux confirmer en partie par des simulations numériques :

$$\begin{cases} \begin{cases} f_0 = \sqrt{24} \quad f_1 = 5 \quad f_2 = 4 \quad f_l = 0 \quad pour \quad l \geq 3 \\ g_0 = 2 \quad g_1 = 2 \quad g_2 = 1 \quad g_l = 0 \quad pour \quad l \geq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{f_0^{\,2} - 4g_0} = 4 \quad \beta_1 = 2 - \sqrt{6} \quad \beta_2 = -2 - \sqrt{6} \quad \beta_2 - \beta_1 = -4 \\ \mu_1 = \dfrac{5\sqrt{6} - 12}{4} \quad \mu_2 = -\dfrac{5\sqrt{6} + 8}{4} \quad \mu_2 - \mu_1 = 1 - \dfrac{5\sqrt{6}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} y_1(z) \quad converge\ pour \quad z = -20 \quad Nombre\ de\ termes = 200 \\ y_1(z) = 10592.7 \\ y_1'(z) = -4790.23 \\ y_1''(z) = 2164.99 \\ y_1''(z) + f(z)\, y_1'(z) + g(z)\, y_1(z) = 9.9717 * 10^{-9} \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} f_0 = 1 \quad f_1 = 5 \quad f_2 = 4 \quad f_l = 0 \quad pour \quad l \geq 3 \\ g_0 = 4 \quad g_1 = 2 \quad g_2 = 1 \quad g_l = 0 \quad pour \quad l \geq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{f_0^{\,2} - 4g_0} = i\sqrt{15} \quad \beta_1 = \dfrac{-1 + i\sqrt{15}}{2} \quad \beta_2 = \dfrac{-1 - i\sqrt{15}}{2} \quad \beta_2 - \beta_1 = -i\sqrt{15} \\ \mu_1 = -\dfrac{5}{2} - \dfrac{i}{2\sqrt{15}} \quad \mu_2 = -\dfrac{5}{2} + \dfrac{i}{2\sqrt{15}} \quad \mu_2 - \mu_1 = \dfrac{i}{\sqrt{15}} \end{cases} \\ \begin{cases} y_2(z) \quad converge\ pour \quad z = 17\,(1+i) \quad Nombre\ de\ termes = 200 \\ y_2(z) = 162133 - 520810\ i \\ y_2'(z) = -1.05848 * 10^{6} - 5317.68\ i \\ y_2''(z) = 588422 + 1.96681 * 10^{6}\ i \\ y_2''(z) + f(z)\, y_2'(z) + g(z)\, y_2(z) = -1.04774 * 10^{-9} + 3.72529 * 10^{-9}\ i \end{cases} \end{cases}$$

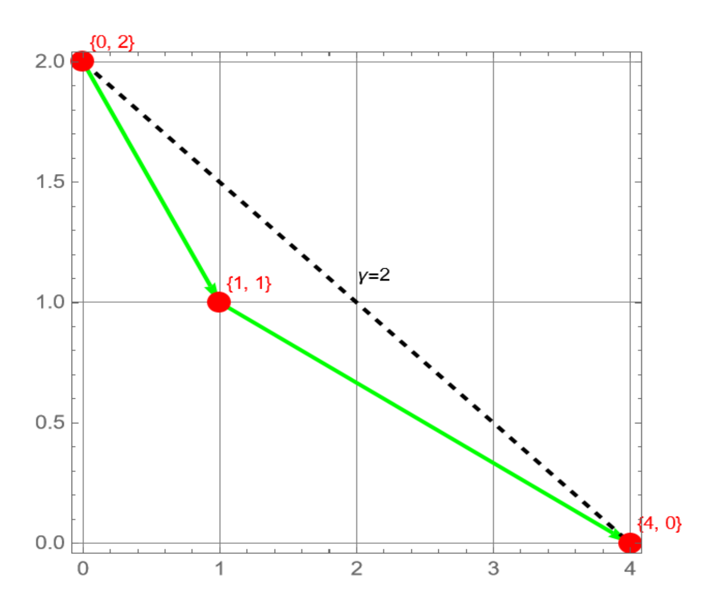
<u>Exemple 4 (ii) Inspiré de «W.Buhring 2nd-order L.D.E with 2 Irregular points of Rank 3. section The Characteristic Exponents », année 2000, équation du second degré de rang 1 au point singulier z=∞</u>

Soit l'équation différentielle du second degré suivante :

$$z^2 y''(z)+z\,y'(z)-\left(L^2+\sum_{l=1}^{l=2}\left(a_l z^{-l}+a_{-l}z^{l}\right)\right)y(z)=0 \Leftrightarrow y''(z)+\frac{1}{z}\,y'(z)-\frac{1}{z^2}\left(L^2+\sum_{l=1}^{l=2}\left(a_l z^{-l}+a_{-l}z^{l}\right)\right)y(z)=0$$

Le point z=∞ est un point irrégulier essentiel et le point z=0 est également un point singulier irrégulier essentiel.

Commençons par le point z=∞. Par le changement de variable : $z\to\frac{1}{z}$ *l'équation différentielle devient :* $y''(z)+\frac{1}{z}\,y'(z)-\frac{1}{z^2}\left(L^2+\sum_{l=1}^{l=2}\left(a_{-l}z^{-l}+a_l z^{l}\right)\right)y(z)=0$ *pour laquelle* $z=0$ *est devenu le point singulier essentiel. Le diagramme de Newton-Puisieux est de la forme :*



Cela conduit à proposer un terme exponentiel comme suit: $y(z)=e^{\Omega(z)}u(z)\quad \Omega(z)=\frac{\alpha}{z}$ *et le développement en série de l'expression:* $(\Omega'(z))^2+P_1(z)(\Omega'(z))^1+P_2(z)(\Omega'(z))^0$ *autour de z=0 à l'ordre 0 permet de fixer la valeur du paramètre β :*

$$(\Omega'(z))^2+P_1(z)(\Omega'(z))^1+P_2(z)(\Omega'(z))^0=\frac{\alpha^2-a_{-2}}{z^2}+O\left(\frac{1}{z}\right)\Rightarrow \alpha^2=a_{-2}\to\alpha=\varepsilon\sqrt{a_{-2}}$$

En insérant le terme exponentiel $y(z)=e^{\frac{\alpha}{z}}u(z)$ *on obtient une équation différentielle du second degré qui possède une solution régulière :*

$$u''(z)+\left(\frac{1}{z}-\frac{2\alpha}{z^2}\right)u'(z)+\left(\frac{\alpha}{z^3}-\frac{\left(L^2+\sum_{l=1}^{l=2}a_l z^{l}+\sum_{l=1}^{l=1}a_{-l}z^{-l}+\right)}{z^2}\right)u(z)=0$$

Et l'équation indicielle donne la valeur de l'exposant pour la solution régulière :

$$\sigma = \frac{1}{2} - \frac{a_{-1}}{2\alpha}$$

En insérant le développement $u(z) = z^{\sigma} \sum_{l=0}^{l=+\infty} c_l z^l$ *, cela conduit à une récurrence à 4 termes :*

$$\begin{cases} c_0 = 1 \quad c_{-1} = c_{-2} = 0 \\ 2\,\alpha\, l\, c_l = (\sigma + l - 1 - L)(\sigma + l - 1 + L)\, c_{l-1} - \sum_{j=1}^{j=2} a_j c_{l-j-1} \end{cases}$$

En revenant à l'équation originale, la forme normale s'écrit :

$$\begin{cases} \alpha = \varepsilon\sqrt{a_{-1}} \qquad \varepsilon^2 = 1 \qquad \sigma = \frac{1}{2} - \frac{a_{-1}}{2\alpha} \\ c_0 = 1 \quad c_{-1} = c_{-2} = 0 \\ 2\,\alpha\, l\, c_l = (\sigma + l - 1 - L)(\sigma + l - 1 + L)\, c_{l-1} - \sum_{j=1}^{j=2} a_j c_{l-j-1} \\ y''(z) + \frac{1}{z} y'(z) - \frac{1}{z^2}\left(L^2 + \sum_{l=1}^{l=2}\left(a_l z^{-l} + a_{-l} z^l\right)\right) y(z) = 0 \qquad y(z) = e^{\alpha z} z^{-\sigma} \sum_{l=0}^{l=+\infty} c_l z^{-l} \end{cases}$$

Cette récurrence ne conduit en général pas vers un développement convergent de la forme normale.

<u>Construction de la forme normale en z=0.</u> Du fait de la symétrie de l'équation différentielle lors de la transformation z→1/z. La forme normale se déduit de la précédente construction par la substitution a_l *en* a_{-l}*. Il vient :*

$$\begin{cases} \alpha = \varepsilon\sqrt{a_1} \qquad \varepsilon^2 = 1 \qquad \sigma = \frac{1}{2} - \frac{a_1}{2\alpha} \\ c_0 = 1 \quad c_{-1} = c_{-2} = 0 \\ 2\,\alpha\, l\, c_l = (\sigma + l - 1 - L)(\sigma + l - 1 + L)\, c_{l-1} - \sum_{j=1}^{j=2} a_{-j} c_{l-j-1} \\ y''(z) + \frac{1}{z} y'(z) - \frac{1}{z^2}\left(L^2 + \sum_{l=1}^{l=2}\left(a_l z^{-l} + a_{-l} z^l\right)\right) y(z) = 0 \qquad y(z) = e^{\frac{\alpha}{z}} z^{\sigma} \sum_{l=0}^{l=+\infty} c_l z^l \end{cases}$$

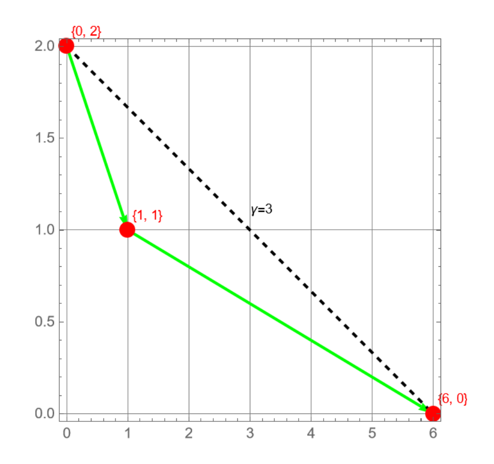
Exemple 4 (ii) Inspiré de «W.Buhring 2nd-order L.D.E with 2 Irregular points of Rank 3. section The Characteristic Exponents », année 2000, équation du second degré de rang 2 au point singulier z=∞

Soit l'équation différentielle du second degré suivante :

$$z^2 y''(z)+z\,y'(z)-\left(L^2+\sum_{l=1}^{l=4}\left(a_l z^{-l}+a_{-l}z^l\right)\right)y(z)=0 \Leftrightarrow y''(z)+\frac{1}{z}y'(z)-\frac{1}{z^2}\left(L^2+\sum_{l=1}^{l=4}\left(a_l z^{-l}+a_{-l}z^l\right)\right)y(z)=0$$

Le point z=∞ est un point irrégulier essentiel et le point z=0 est également un point singulier irrégulier essentiel.

Commençons par le point z=∞. Par le changement de variable : $z\to\frac{1}{z}$ *l'équation différentielle devient :* $y''(z)+\frac{1}{z}y'(z)-\frac{1}{z^2}\left(L^2+\sum_{l=1}^{l=4}\left(a_{-l}z^{-l}+a_l z^l\right)\right)y(z)=0$ *pour laquelle* $z=0$ *est devenu le point singulier essentiel. Le diagramme de Newton-Puisieux est de la forme :*



Cela conduit à proposer un terme exponentiel comme suit: $y(z)=e^{\Omega(z)}u(z)\quad \Omega(z)=\frac{\alpha}{z}+\frac{\beta}{z^2}$ *et le développement en série de l'expression:* $(\Omega'(z))^2+P_1(z)(\Omega'(z))^1+P_2(z)(\Omega'(z))^0$ *autour de z=0 à l'ordre 0 permet de fixer la valeur du paramètre β :*

$$(\Omega'(z))^2+P_1(z)(\Omega'(z))^1+P_2(z)(\Omega'(z))^0=\frac{4\beta^2-a_{-4}}{z^4}+\frac{4\beta\,\alpha-a_{-3}}{z^3}+O\left(\frac{1}{z^2}\right)$$

$$\Rightarrow \beta^2=\frac{a_{-4}}{2}\to\beta=\varepsilon\frac{\sqrt{a_{-4}}}{2}\qquad \alpha=\frac{a_{-3}}{4\beta}\to\alpha=\varepsilon\frac{a_{-3}}{2\sqrt{a_{-4}}}$$

En insérant le terme exponentiel $y(z)=e^{\frac{\alpha}{z}+\frac{\beta}{z^2}}u(z)$ *on obtient une équation différentielle du second degré qui possède une solution régulière :*

$$u''(z)+\left(\frac{1}{z}-\frac{2\alpha}{z^2}-\frac{4\beta}{z^3}\right)u'(z)+\left(\frac{\alpha}{z^3}+\frac{4\beta+\alpha^2}{z^4}-\frac{\left(L^2+\sum_{l=1}^{l=4}a_l z^l+\sum_{l=1}^{l=2}a_{-l}z^{-l}+\right)}{z^2}\right)u(z)=0$$

Et l'équation indicielle donne la valeur de l'exposant pour la solution régulière :

$$\sigma = 1 - \frac{a_{-2}}{4\beta} + \frac{\alpha^2}{4\beta}$$

En insérant le développement $u(z) = z^{\sigma} \sum_{l=0}^{l=+\infty} c_l z^l$ *, cela conduit à une récurrence à 7 termes :*

$$\begin{cases} c_0 = 1 \quad c_{-1} = c_{-2} = c_{-3} = c_{-4} = c_{-5} = 0 \\ 4\,\beta\, l\, c_l = \alpha\,(3 - 2(\sigma + l) - a_{-1})\,c_{l-1} + (\sigma + l - 2 - L)(\sigma + l - 2 + L)\,c_{l-2} - \sum_{j=1}^{j=4} a_j c_{l-j-2} \end{cases}$$

En revenant à l'équation originale, la forme normale s'écrit :

$$\begin{cases} \alpha = \varepsilon \frac{a_{-3}}{2\sqrt{a_{-4}}} \qquad \beta = \varepsilon \frac{\sqrt{a_{-4}}}{2} \qquad \varepsilon^2 = 1 \qquad \sigma = 1 - \frac{a_{-2}}{4\beta} + \frac{\alpha^2}{4\beta} \\ c_0 = 1 \quad c_{-1} = c_{-2} = c_{-3} = c_{-4} = c_{-5} = 0 \\ 4\,\beta\, l\, c_l = \alpha\,(3 - 2(\sigma + l) - a_{-1})\,c_{l-1} + (\sigma + l - 2 - L)(\sigma + l - 2 + L)\,c_{l-2} - \sum_{j=1}^{j=4} a_j c_{l-j-2} \\ y''(z) + \frac{1}{z} y'(z) - \frac{1}{z^2}\left(L^2 + \sum_{l=1}^{l=4}\left(a_l z^{-l} + a_{-l} z^l\right)\right) y(z) = 0 \qquad y(z) = e^{\alpha z + \beta z^2} z^{-\sigma} \sum_{l=0}^{l=+\infty} c_l z^{-l} \end{cases}$$

Cette récurrence ne conduit en général pas vers un développement convergent de la forme normale.

<u>*Construction de la forme normale en z=0.*</u> *Du fait de la symétrie de l'équation différentielle lors de la transformation z→1/z. La forme normale se déduit de la précédente construction par la substitution* a_l *en* a_{-l}*. Il vient :*

$$\begin{cases} \alpha = \varepsilon \frac{a_{3}}{2\sqrt{a_{4}}} \qquad \beta = \varepsilon \frac{\sqrt{a_{4}}}{2} \qquad \varepsilon^2 = 1 \qquad \sigma = 1 - \frac{a_{2}}{4\beta} + \frac{\alpha^2}{4\beta} \\ c_0 = 1 \quad c_{-1} = c_{-2} = c_{-3} = c_{-4} = c_{-5} = 0 \\ 4\,\beta\, l\, c_l = \alpha\,(3 - 2(\sigma + l) - a_{-1})\,c_{l-1} + (\sigma + l - 2 - L)(\sigma + l - 2 + L)\,c_{l-2} - \sum_{j=1}^{j=4} a_{-j} c_{l-j-2} \\ y''(z) + \frac{1}{z} y'(z) - \frac{1}{z^2}\left(L^2 + \sum_{l=1}^{l=4}\left(a_l z^{-l} + a_{-l} z^l\right)\right) y(z) = 0 \qquad y(z) = e^{\frac{\alpha}{z} + \frac{\beta}{z^2}} z^{\sigma} \sum_{l=0}^{l=+\infty} c_l z^l \end{cases}$$

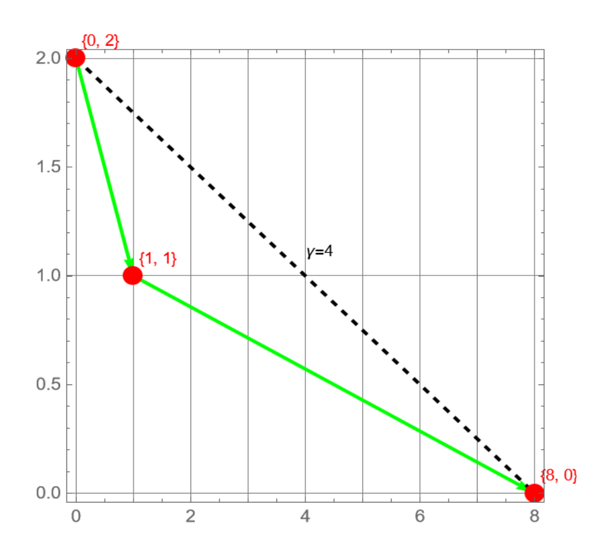
<u>Exemple 4 (ii) Inspiré de «W.Buhring 2nd-order L.D.E with 2 Irregular points of Rank 3. section The Characteristic Exponents », année 2000, équation du second degré de rang 3 au point singulier z=∞</u>

Soit l'équation différentielle du second degré suivante :

$$z^2 y''(z)+z\,y'(z)-\left(L^2+\sum_{l=1}^{l=6}\left(a_l z^{-l}+a_{-l}z^l\right)\right)y(z)=0 \Leftrightarrow y''(z)+\frac{1}{z}\,y'(z)-\frac{1}{z^2}\left(L^2+\sum_{l=1}^{l=6}\left(a_l z^{-l}+a_{-l}z^l\right)\right)y(z)=0$$

Le point z=∞ est un point irrégulier essentiel et le point z=0 est également un point singulier irrégulier essentiel.

<u>Construction de la forme normale en z=∞.</u> Commençons par le point z=∞. Par le changement de variable : $z\to\frac{1}{z}$ *l'équation différentielle devient :* $y''(z)+\frac{1}{z}\,y'(z)-\frac{1}{z^2}\left(L^2+\sum_{l=1}^{l=6}\left(a_{-l}z^{-l}+a_l z^l\right)\right)y(z)=0$ *pour laquelle* $z=0$ *est devenu le point singulier essentiel. Le diagramme de Newton-Puisieux est de la forme :*



Cela conduit à proposer un terme exponentiel comme suit: $y(z)=e^{\Omega(z)}u(z)$ $\Omega(z)=\frac{\alpha}{z}+\frac{\beta}{z^2}+\frac{\gamma}{z^3}$ *et le développement en série de l'expression:* $(\Omega'(z))^2+P_1(z)(\Omega'(z))^1+P_2(z)(\Omega'(z))^0$ *autour de z=0 à l'ordre 0 permet de fixer la valeur du paramètre β :*

$$(\Omega'(z))^2+P_1(z)(\Omega'(z))^1+P_2(z)(\Omega'(z))^0=\frac{9\gamma^2-a_{-6}}{z^6}+\frac{12\beta\,\gamma-a_{-5}}{z^5}+\frac{4\beta^2+6\,\alpha\,\gamma-a_{-4}}{z^4}+O\left(\frac{1}{z^3}\right)$$

$$\Rightarrow \gamma^2=\frac{a_{-6}}{9}\to\gamma=\varepsilon\frac{\sqrt{a_{-6}}}{3}\qquad \beta=\frac{a_{-5}}{12\,\gamma}=\varepsilon\frac{a_{-5}}{4\sqrt{a_{-6}}}\qquad \alpha=\frac{a_{-4}-4\beta^2}{6\,\gamma}=\varepsilon\frac{4\,a_{-6}a_{-4}-a_{-5}{}^2}{8a_{-6}\sqrt{a_{-6}}}\qquad \varepsilon^2=1$$

En insérant le terme exponentiel $y(z)=e^{\frac{\alpha}{z}+\frac{\beta}{z^2}+\frac{\gamma}{z^3}}u(z)$ *on obtient une équation différentielle du second degré qui possède une solution régulière :*

$$u''(z)+\left(\frac{1}{z}-\frac{2\alpha}{z^2}-\frac{4\beta}{z^3}-\frac{6\gamma}{z^4}\right)u'(z)+\left(\frac{\alpha}{z^3}+\frac{4\beta+\alpha^2}{z^4}+\frac{9\gamma+4\,\alpha\,\beta}{z^5}-\frac{\left(L^2+\sum_{l=1}^{l=6}a_l z^l+\sum_{l=1}^{l=3}a_{-l}z^{-l}+\right)}{z^2}\right)u(z)=0$$

Et l'équation indicielle donne la valeur de l'exposant pour la solution régulière :

$$\sigma = \frac{3}{2} + \frac{2\,\alpha\,\beta}{3\gamma} - \frac{a_{-3}}{6\gamma}$$

En insérant le développement $u(z) = z^{\sigma} \sum_{l=0}^{l=+\infty} c_l z^l$ *, cela conduit à une récurrence à 10 termes :*

$$\begin{cases} c_0 = 1 \quad c_{-1} = c_{-2} = c_{-3} = c_{-4} = c_{-5} = c_{-6} = c_{-7} = c_{-8} = 0 \\ 6\,\gamma\,l\,c_l = \left(\alpha^2 - 4\beta(\sigma + l - 2) - a_{-2}\right)c_{l-1} - \left(2\alpha\left(\sigma + l - \frac{5}{2}\right) + a_{-1}\right)c_{l-2} + (\sigma + l - 3 - L)(\sigma + l - 3 + L)\,c_{l-3} - \sum_{j=1}^{j=6} a_j c_{l-j-3} \end{cases}$$

En revenant à l'équation originale, la forme normale s'écrit :

$$\begin{cases} \alpha = \varepsilon \frac{4\,a_{-6}a_{-4} - a_{-5}{}^2}{8a_{-6}\sqrt{a_{-6}}} \qquad \beta = \varepsilon \frac{a_{-5}}{4\sqrt{a_{-6}}} \qquad \gamma = \varepsilon \frac{\sqrt{a_{-6}}}{3} \qquad \varepsilon^2 = 1 \qquad \sigma = \frac{3}{2} + \frac{2\,\alpha\,\beta}{3\gamma} - \frac{a_{-3}}{6\gamma} \\ c_0 = 1 \quad c_{-1} = c_{-2} = c_{-3} = c_{-4} = c_{-5} = c_{-6} = c_{-7} = c_{-8} = 0 \\ 6\,\gamma\,l\,c_l = \left(\alpha^2 - 4\beta(\sigma + l - 2) - a_{-2}\right)c_{l-1} - \left(2\alpha\left(\sigma + l - \frac{5}{2}\right) + a_{-1}\right)c_{l-2} + (\sigma + l - 3 - L)(\sigma + l - 3 + L)\,c_{l-3} - \sum_{j=1}^{j=6} a_j c_{l-j-3} \\ y''(z) + \frac{1}{z}y'(z) - \frac{1}{z^2}\left(L^2 + \sum_{l=1}^{l=6}\left(a_l z^{-l} + a_{-l} z^l\right)\right)y(z) = 0 \qquad y(z) = e^{\alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3} z^{-\sigma} \sum_{l=0}^{l=+\infty} c_l z^{-l} \end{cases}$$

Cette récurrence ne conduit en général pas vers un développement convergent de la forme normale.

<u>Construction de la forme normale en z=0.</u> Du fait de la symétrie de l'équation différentielle lors de la transformation z→1/z. La forme normale se déduit de la précédente construction par la substitution a_l en a_{-l}. Il vient :

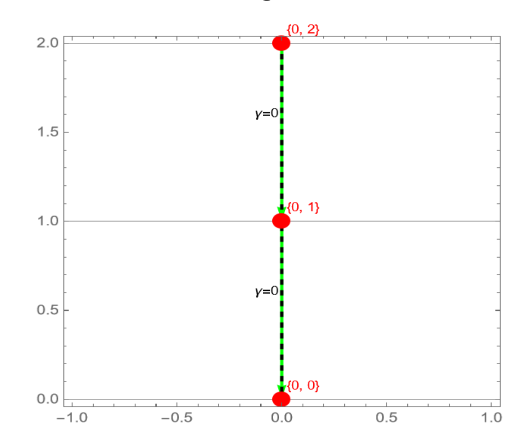
$$\begin{cases} \alpha = \varepsilon \frac{4\,a_6 a_4 - a_5{}^2}{8a_6\sqrt{a_6}} \qquad \beta = \varepsilon \frac{a_5}{4\sqrt{a_6}} \qquad \gamma = \varepsilon \frac{\sqrt{a_6}}{3} \qquad \varepsilon^2 = 1 \qquad \sigma = \frac{3}{2} + \frac{2\,\alpha\,\beta}{3\gamma} - \frac{a_3}{6\gamma} \\ c_0 = 1 \quad c_{-1} = c_{-2} = c_{-3} = c_{-4} = c_{-5} = c_{-6} = c_{-7} = c_{-8} = 0 \\ 6\,\gamma\,l\,c_l = \left(\alpha^2 - 4\beta(\sigma + l - 2) - a_2\right)c_{l-1} - \left(2\alpha\left(\sigma + l - \frac{5}{2}\right) + a_1\right)c_{l-2} + (\sigma + l - 3 - L)(\sigma + l - 3 + L)\,c_{l-3} - \sum_{j=1}^{j=6} a_{-j} c_{l-j-3} \\ y''(z) + \frac{1}{z}y'(z) - \frac{1}{z^2}\left(L^2 + \sum_{l=1}^{l=6}\left(a_l z^{-l} + a_{-l} z^l\right)\right)y(z) = 0 \qquad y(z) = e^{\frac{\alpha}{z} + \frac{\beta}{z^2} + \frac{\gamma}{z^3}} z^{\sigma} \sum_{l=0}^{l=+\infty} c_l z^l \end{cases}$$

Exemples de construction directe de forme normale autour du point singulier irrégulier z=∞

Tout comme pour les exemples autour de la singularité z=0, je distinguerais ρ comme l'exposant de la solution régulière au point singulier éponyme et σ l'exposant pour la partie régulière de la forme normale. S est le degré du polynôme en z du terme exponentiel de la forme normale.

Exemple E.L.Ince Chapitre 17, 17.62 page 435 : Soit l'équation différentielle du second degré suivante : $y''(z) - \frac{a z^2 + 2b z + c}{z^2} y(z) = 0$

Le point z=∞ est un point irrégulier essentiel et le point z=0 est un point singulier régulier. _Construction de la forme normale en z=∞._ Le diagramme de Newton-Puisieux est de la forme :

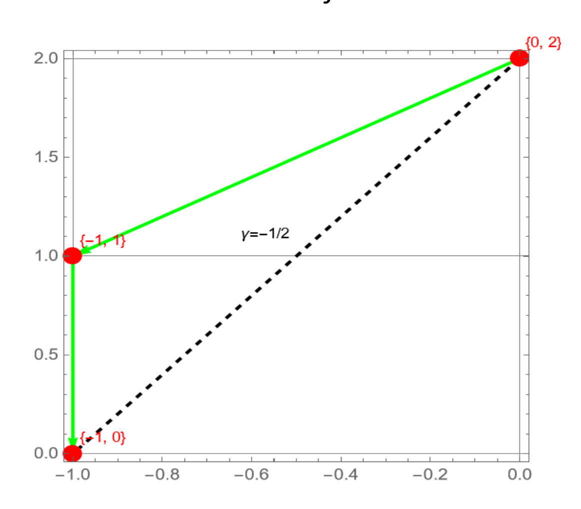


Cela conduit à proposer un terme exponentiel comme suit: $\gamma = 0 \to s = \gamma + 1 \Rightarrow \Omega(z) = \alpha\, z \quad et \quad y(z) = e^{\Omega(z)} u(z)$ *. La liste des nombre* $Kg_l = \{0,0\}$ *. Le nombre maximal est* $Kg = 0$ *et les positions minimum et maximum des indices de cette valeur sont donc les suivantes* $Min(Kg_l) = 1 \quad et \quad Max(Kg_l) = 2$ *et le développement en série de l'expression:* $N = 2 \to (\Omega'(z))^N + \sum_{i=Min(Kg_l)}^{i=Max(Kg_l)} P_i(z)(\Omega'(z))^{N-i}$ *autour de z=∞ à l'ordre 0 permet de fixer la valeur du paramètre α :* $(\Omega'(z))^2 + P_1(z)(\Omega'(z))^1 + P_2(z)(\Omega'(z))^0 = \alpha^2 - a + O\left(\frac{1}{z}\right) \Rightarrow \alpha^2 = a$ *. En insérant le terme exponentiel* $y(z) = e^{\alpha z} u(z)$ *on obtient une équation différentielle du second degré qui possède une solution régulière :* $u''(z) + 2\alpha\, u'(z) - \frac{2b\, z + c}{z^2} u(z) = 0$ *. Et l'équation indicielle donne la valeur de l'exposant pour la solution régulière :* $\sigma = -\frac{b}{\alpha}$ *. En insérant le développement* $u(z) = z^{-\sigma} \sum_{l=0}^{l=+\infty} c_l z^{-l}$*, cela conduit à une récurrence à 2 termes :* $c_0 = 1 \quad 2\alpha\, l\, c_l = ((\sigma + l)(\sigma + l - 1) - c)\, c_{l-1}$

On a vu précédemment que les conditions d'arrêt de la récurrence se résume à l'observance de la relation sur un entier ϑ : $(\sigma + \vartheta)(\sigma + \vartheta - 1) - c = 0$*. Dans ces conditions la solution de forme normale s'écrit :*

$$y(z) = e^{\alpha z} z^{\frac{b}{\alpha}} \sum_{l=0}^{l=\vartheta-1} c_l z^{-l} \quad c_0 = 1 \quad c_l = \frac{\left(l - \frac{b}{\alpha}\right)\left(l - \frac{b}{\alpha} - 1\right) - c}{2a\, l} c_{l-1} \qquad c = \left(\vartheta - \frac{b}{\alpha}\right)\left(\vartheta - \frac{b}{\alpha} - 1\right) \qquad \alpha^2 = a$$

Exemple E.L.Ince Chapitre 17.53, page 428 : Soit l'équation différentielle du second degré $y''(z)+\frac{2}{z}y'(z)-\frac{1}{z}\left(\frac{1}{4}+\frac{5}{16\,z}\right)y(z)=0$. Le point z=0 est régulier. L'équation indicielle en ce point est $\rho^2+\rho-\frac{5}{16}=0 \Rightarrow \rho_1=\frac{1}{4} \quad \rho_2=-\frac{5}{4}$. Cela indique qu'il est possible de développer la solution autour de z=0 sous la forme $y(z)=z^{\rho}\sum_{l=0}^{l=1}c_l z^l$. Le point z=∞ est irrégulier d'équation indicielle $-\frac{1}{4}=0$ soit sans solution régulière. Le polygone de Newton-Puisieux est de la forme :

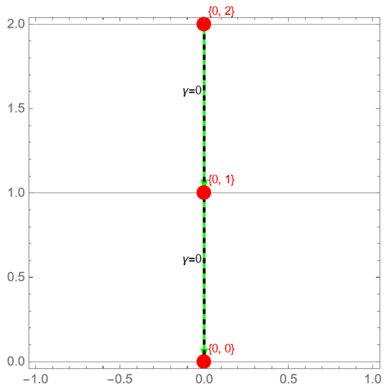


Cela conduit à proposer un terme exponentiel comme suit: $\gamma=-\frac{1}{2}\to s=\gamma+1=\frac{1}{2}\Rightarrow \Omega(z)=\alpha\sqrt{z} \quad et \quad y(z)=e^{\Omega(z)}u(z)$. La liste des nombre $Kg_l=\left\{-1,-\frac{1}{2}\right\}$. Le nombre maximal est $Kg_l=-\frac{1}{2}$ et les positions minimum et maximum des indices de cette valeur sont donc les suivantes $Min(Kg_l)=2 \quad et \quad Max(Kg_l)=2$ et le développement en série de l'expression: $N=2\to(\Omega'(z))^N+P_2(z)(\Omega'(z))^0$ autour de z=∞ à l'ordre 0 permet de fixer la valeur du paramètre α : $(\Omega'(z))^2+P_2(z)(\Omega'(z))^0=\frac{\alpha^2-1}{z}+O\left(\frac{1}{z^2}\right)\Rightarrow\alpha^2=1$. Il s'agit donc d'une forme subnormale. En insérant le terme exponentiel $y(z)=e^{\alpha\sqrt{z}}u(z)$, puis par le changement de variable $\zeta=\sqrt{z} \quad puis \quad \zeta\to z$ on se ramène à des puissances entières et l'on obtient une équation différentielle du second degré qui possède une solution régulière : $u''(z)+\frac{3+2\alpha\,z}{z}u'(z)+\frac{12\,z\alpha-5}{4z^2}u(z)=0$ dont l'équation indicielle est la suivante : $\sigma=\frac{3}{2}$. Le développement de la solution u(z) sous la forme $u(z)=z^{-\frac{3}{2}}\sum_{l=0}^{l=\infty}c_l z^{-l}$ conduit à la récurrence à deux termes suivantes : $c_0=1 \qquad c_l=\frac{(l+1)(l-2)}{2\alpha\,l}c_{l-1}$. La récurrence s'arrête par évidence sur l=1 puisque la récurrence s'annule pour l=2, ce qui nous donne les coefficients $c_0=1 \qquad c_1=-\frac{1}{\alpha}$ Dans ces conditions la solution de forme normale s'écrit : $y(z)=e^{\frac{\alpha}{z}}z^{\frac{3}{2}}\left(1-\frac{z}{\alpha}\right) \quad avec \quad \alpha^2=1$. En revenant aux variable originale, la solution de forme normale de l'équation différentielle $y''(z)+\frac{2}{z}y'(z)-\frac{1}{z}\left(\frac{1}{4}+\frac{5}{16\,z}\right)y(z)=0$ est donc :

$$y(z)=e^{\alpha\sqrt{z}}z^{-\frac{3}{4}}\left(1-\frac{1}{\alpha\sqrt{z}}\right) \quad avec \quad \alpha^2=1$$

$$\alpha=1\Rightarrow y(z)=e^{\sqrt{z}}\left(z^{-\frac{3}{4}}-z^{-\frac{5}{4}}\right) \qquad \alpha=-1\Rightarrow y(z)=e^{-\sqrt{z}}\left(z^{-\frac{3}{4}}+z^{-\frac{5}{4}}\right)$$

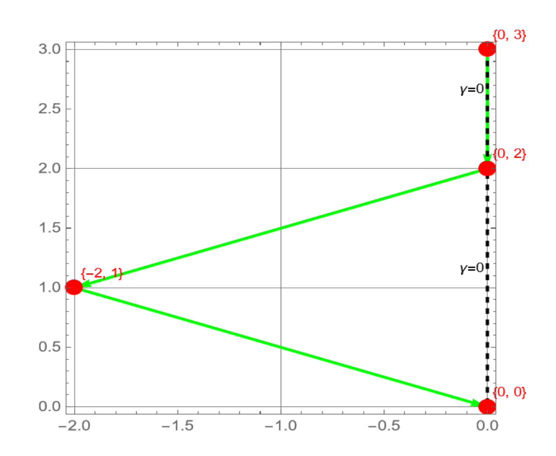
Exemple 4 A.R.Forsythe Chapter 90, page 275 : *Soit l'équation différentielle du second degré* $z^2 y''(z)-(a+b\,z^2)\,y(z)=0$. *Le point z=0 est régulier. L'équation indicielle en ce point est* $\rho(\rho-1)=a$. *Cela indique qu'il est possible de développer la solution autour de z=0 sous la forme* $y(z)=z^{\rho}\sum_{l=0}^{l=1} c_l z^l$. *Le point z=∞ est irrégulier d'équation indicielle* $-b=0$ *soit sans solution régulière. Le polygone de Newton-Puisieux est de la forme :*



Cela conduit à proposer le terme exponentiel qui suit: $\gamma=0\rightarrow s=\gamma+1=1\Rightarrow\Omega(z)=\alpha\,z\quad et\quad y(z)=e^{\Omega(z)}u(z)$ *. La liste des nombre* $Kg_l=\{0{,}0\}$. *Le nombre maximal est* $Kg_l=0$ *et les positions minimum et maximum des indices de cette valeur sont donc les suivantes* $Min(Kg_l)=1\quad et\quad Max(Kg_l)=2$ *et le développement en série de l'expression:* $N=2\rightarrow(\Omega'(z))^N+P_1(z)(\Omega'(z))^1+P_2(z)(\Omega'(z))^0$ *autour de z=∞ à l'ordre 0 permet de fixer la valeur du paramètre α :* $(\Omega'(z))^2+P_2(z)(\Omega'(z))^0=\alpha^2-b+O\left(\frac{1}{z}\right)\Rightarrow\alpha^2=b$ *. En insérant le terme exponentiel* $y(z)=e^{\alpha\,z}u(z)$ *, on obtient une équation différentielle du second degré qui possède une solution régulière :* $u''(z)+2\alpha\,u'(z)-\frac{a}{z^2}u(z)=0$ *dont l'équation indicielle est la suivante :* $\sigma=0$. *Le développement de la solution u(z) sous la forme* $u(z)=\sum_{l=0}^{l=\infty}c_l z^{-l}$ *conduit à la récurrence à deux termes suivantes :* $c_0=1\qquad c_l=\frac{l(l-1)-a}{2\alpha\,l}c_{l-1}$ *. Lorsque a=p(p-1) où p est entier alors il y a factorisation de la récurrence :* $c_0=1\qquad c_l=\frac{l(l-1)-p(p-1)}{2\alpha\,l}c_{l-1}=\frac{(l+p-1)(l-p)}{2\alpha\,l}c_{l-1}$ *et cette dernière se termine à l'indice :* $l=p-1$. *Les solutions de forme normale s'écrivent donc :* $u(z)=e^{\alpha\,z}\times\sum_{l=0}^{l=p-1}c_l z^{-l}$ *. Par exemple pour les premières valeurs de p et donc de a :*

$$\begin{cases}a=p(p-1)\\ \alpha^2=b\quad z^2y''(z)-(a+b\,z^2)\,y(z)=0\end{cases}\qquad\begin{cases}p=1\quad a=p(p-1)=0\rightarrow y(z)=e^{\alpha\,z}\\ p=2\quad a=p(p-1)=2\rightarrow y(z)=e^{\alpha\,z}\left(1-\frac{1}{\alpha\,z}\right)\\ p=3\quad a=p(p-1)=6\rightarrow y(z)=e^{\alpha\,z}\left(1+\frac{3}{\alpha\,z}-\frac{3}{\alpha^2z^2}\right)\\ p=4\quad a=p(p-1)=12\rightarrow y(z)=e^{\alpha\,z}\left(1+\frac{6}{\alpha\,z}-\frac{15}{\alpha^2z^2}-\frac{15}{\alpha^3z^3}\right)\\ p=5\quad a=p(p-1)=20\rightarrow y(z)=e^{\alpha\,z}\left(1+\frac{10}{\alpha\,z}-\frac{45}{\alpha^2z^2}-\frac{105}{\alpha^3z^3}+\frac{105}{\alpha^4z^4}\right)\end{cases}$$

<u>Exemple 6 A.R.Forsythe Chapter 90, page 276</u> : Soit l'équation différentielle du troisième degré $y^{(3)}(z)-\frac{6}{z^2}y'(z)+y(z)=0$. *Le point z=0 est régulier. L'équation indicielle en ce point est* $\rho(\rho^2-3\rho-4)=0$. *Cela indique qu'il est possible de développer la solution autour de z=0 sous la forme* $y(z)=z^{\rho}\sum_{l=0}^{l=1}c_l z^l$. *Le point z=∞ est irrégulier essentielle. Le polygone de Newton-Puisieux est de la forme :*



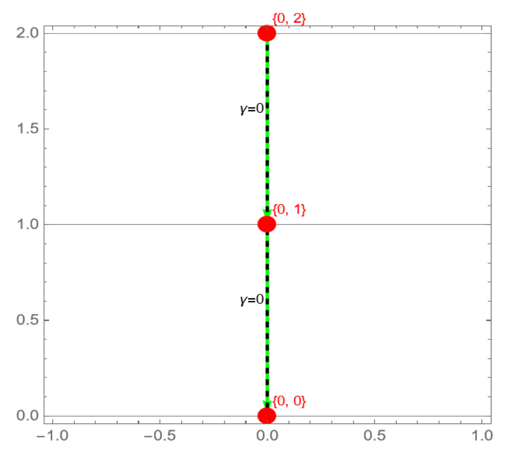
Cela conduit à proposer le terme exponentiel qui suit: $\gamma=0\rightarrow s=\gamma+1=1\Rightarrow\Omega(z)=\alpha\, z \quad et \quad y(z)=e^{\Omega(z)}u(z)$ *. La liste des nombre* $Kg_l=\{0,-1,0\}$. *Le nombre maximal est* $Kg_l=0$ *et les positions minimum et maximum des indices de cette valeur sont donc les suivantes* $Min(Kg_l)=1 \quad et \quad Max(Kg_l)=3$ *et le développement en série de l'expression:* $N=3\rightarrow(\Omega'(z))^N+P_1(z)(\Omega'(z))^2+P_2(z)(\Omega'(z))^1+P_3(z)(\Omega'(z))^0$ *autour de z=∞ à l'ordre 0 permet de fixer la valeur du paramètre α :* $(\Omega'(z))^3+P_1(z)(\Omega'(z))^2+P_2(z)(\Omega'(z))^1+P_3(z)(\Omega'(z))^0=\alpha^3+1+O\left(\frac{1}{z}\right)\Rightarrow\alpha^3=-1$ *. En insérant le terme exponentiel* $y(z)=e^{\alpha z}u(z)$ *, on obtient une équation différentielle du second degré qui possède une solution régulière :* $u^{(3)}(z)+3\,\alpha\, u''(z)+\left(3\,\alpha^2-\frac{6}{z^2}\right)u'(z)-\frac{6\,\alpha}{z^2}u(z)=0$ *dont l'équation indicielle est la suivante :* $\sigma=0$. *Le développement de la solution u(z) sous la forme* $u(z)=\sum_{l=0}^{l=\infty}c_l z^{-l}$ *conduit à une récurrence qui se termine immédiatement, à tel point que la forme normale s'écrit :* $y(z)=e^{\alpha z}\times\left(1-\frac{2}{\alpha\, z}\right)$. *Soit donc trois solutions :*

$$y_1(z)=e^{-z}\times\left(1+\frac{2}{z}\right)$$

$$y_2(z)=e^{\alpha z}\times\left(1-\frac{2}{\alpha\, z}\right) \quad avec \quad \alpha=\sqrt[3]{-1}\neq-1$$

$$y_3(z)=e^{-\alpha^2 z}\times\left(1+\frac{2}{\alpha^2\, z}\right) \quad avec \quad \alpha=\sqrt[3]{-1}\neq-1$$

Exemple 9 A.R.Forsythe Chapter 90, page 276 : *Soit l'équation différentielle du deuxième degré* $y''(z)+\left(a+2\frac{s+1}{z}\right)y'(z)+\left(b+\frac{c}{z}+2\frac{s(s+1)}{z^2}\right)y(z)=0$. *Le point z=0 est régulier. L'équation indicielle en ce point est* $(\rho+s)(\rho+s+1)=0$. *Cela indique qu'il est possible de développer la solution autour de z=0 sous la forme* $y(z)=z^{\rho}\sum_{l=0}^{l=1}c_l z^l$. *Le point z=∞ est irrégulier essentielle. Le polygone de Newton-Puisieux est de la forme :*



Cela conduit à proposer le terme exponentiel qui suit: $\gamma=0\rightarrow s=\gamma+1=1\Rightarrow\Omega(z)=\alpha\, z \quad et \quad y(z)=e^{\Omega(z)}u(z)$ *. La liste des nombres* $Kg_l=\{0,0\}$. *Le nombre maximal est* $Kg_l=0$ *et les positions minimum et maximum des indices de cette valeur sont donc les suivantes* $Min(Kg_l)=1 \quad et \quad Max(Kg_l)=2$ *et le développement en série de l'expression:* $N=2\rightarrow(\Omega'(z))^2+P_1(z)(\Omega'(z))^1+P_2(z)(\Omega'(z))^0$ *autour de z=∞ à l'ordre 0 permet de fixer la valeur du paramètre α :* $(\Omega'(z))^3+P_1(z)(\Omega'(z))^2+P_2(z)(\Omega'(z))^1+P_3(z)(\Omega'(z))^0=\alpha\,(a+\alpha)+b+O\left(\frac{1}{z}\right)\Rightarrow\alpha\,(a+\alpha)+b=0$ *.* *Notons :* $\alpha=-\frac{a}{2}\pm\frac{\Delta}{2} \qquad \Delta=\sqrt{a^2-4b}$ *et posons également* $c=a\,(s+1)-\varepsilon\,\Delta\,(\lambda+1)$ *. En insérant le terme exponentiel* $y(z)=e^{\alpha\, z}u(z)$ *, on obtient une équation différentielle du second degré qui possède une solution régulière :* $u''(z)+\left(\varepsilon\,\Delta+\frac{2(1+s)}{z}\right)u'(z)+\left(\frac{\varepsilon\,\Delta\,(s-\lambda)}{z}+\frac{s\,(s+1)}{z^2}\right)u(z)=0 \quad avec \quad \varepsilon^2=1$ *dont l'équation indicielle est la suivante :* $\sigma=s-\lambda$ *. Le développement de la solution u(z) sous la forme* $u(z)=z^{-\sigma}\sum_{l=0}^{l=\infty}c_l z^{-l}$ *conduit à une récurrence à deux termes :* $c_0=1 \qquad c_l=\frac{(l-\lambda-1)(l-\lambda-2)}{\varepsilon\,\Delta\, l}c_{l-1}$ *et cette dernière se termine à l'indice :* $l=\lambda$ *pour peu que la valeur de λ soit un entier positif , soit que la contrainte* $c=a\,(s+1)-\varepsilon\,\Delta\,(\lambda+1)$ *soit respectée. Les solutions de forme normale s'écrivent donc :*

$$y(z)=e^{\frac{-a+\varepsilon\,\Delta}{2}z}\times z^{\lambda-s}\times\sum_{l=0}^{l=\lambda}c_l z^{-l} \qquad c_0=1 \qquad c_l=\frac{(l-\lambda-1)(l-\lambda-2)}{\varepsilon\,\Delta\, l}c_{l-1}=\frac{(\lambda+1-l)(\lambda+2-l)}{\varepsilon\,\Delta\, l}c_{l-1}$$

Il se trouve que le calcul des coefficients du développement est explicite à savoir :

$$y(z)=e^{\frac{-a+\varepsilon\,\Delta}{2}z}\times z^{\lambda-s}\times\sum_{l=0}^{l=\lambda}c_l z^{-l}=e^{\frac{-a+\varepsilon\,\Delta}{2}z}\times z^{-s}\times\sum_{l=0}^{l=\lambda}c_{\lambda-l}z^{l}\Rightarrow\frac{y(z)}{c_\lambda}=e^{\frac{-a+\varepsilon\,\Delta}{2}z}\times z^{-s}\times\sum_{l=0}^{l=\lambda}\frac{c_{\lambda-l}}{c_\lambda}z^{l}$$

$$c_0=1\quad c_l=\frac{\prod_{j=1}^{j=l}(\lambda+1-j)\times\prod_{j=1}^{j=l}(\lambda+2-j)}{\varepsilon^l\Delta^l\,l!}=\frac{(\lambda+1)(\lambda+1-l)\times\left(\prod_{j=1}^{j=l-1}(\lambda+1-j)\right)^2}{\varepsilon^l\Delta^l\,l!}\quad pour\quad l\le\lambda\Rightarrow c_\lambda=\frac{(\lambda+1)\times\left(\prod_{j=1}^{j=\lambda-1}(\lambda+1-j)\right)^2}{\varepsilon^\lambda\Delta^\lambda\,\lambda!}$$

$$\Rightarrow c_{\lambda-l}=\frac{(\lambda+1)(l+1)\times\left(\prod_{j=1}^{j=\lambda-l-1}(\lambda+1-j)\right)^2}{\varepsilon^{\lambda-l}\Delta^{\lambda-l}\,(\lambda-l)!}\Rightarrow\frac{c_{\lambda-l}}{c_\lambda}=\frac{(l+1)\times\left(\prod_{j=1}^{j=\lambda-l-1}(\lambda+1-j)\right)^2\lambda!}{(\lambda-l)!\times\left(\prod_{j=1}^{j=\lambda-1}(\lambda+1-j)\right)^2}\times\varepsilon^l\Delta^l\leftarrow\begin{cases}\prod_{j=1}^{j=\lambda-1}(\lambda+1-j)=\lambda!\\ \prod_{j=1}^{j=\lambda-l-1}(\lambda+1-j)=\dfrac{\lambda!}{(l+1)!}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{c_{\lambda-l}}{c_\lambda}=\frac{\lambda!}{(\lambda-l)!\times(l+1)\times(l!)^2}$$

Aussi la solution peut donc s'exprimer comme un polynôme de degré λ en divisant par le coefficient c_λ *:* $y(z)=e^{\frac{-a+\varepsilon\,\Delta}{2}z}\times z^{-s}\times\sum_{l=0}^{l=\lambda}\frac{\lambda!}{(\lambda-l)!\times(l+1)\times(l!)^2}z^l$.

Par exemple pour les premières valeurs de λ et donc de c, nous avons :

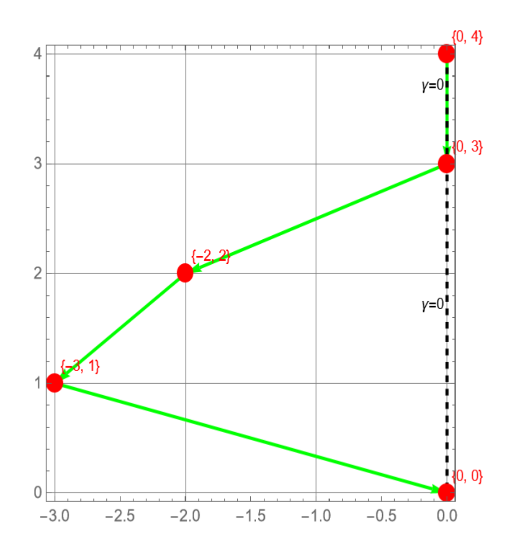
$$\begin{cases}\lambda=0\to y(z)=e^{\frac{-a+\varepsilon\,\Delta}{2}z}\times z^{-s}\\ \lambda=1\to y(z)=e^{\frac{-a+\varepsilon\,\Delta}{2}z}\times z^{-s}\times\left(z+\varepsilon\frac{2}{\Delta}\right)\propto e^{\frac{-a+\varepsilon\,\Delta}{2}z}\times z^{-s}\times\left(1+\varepsilon\frac{\Delta}{2}z\right)\\ \lambda=2\to y(z)=e^{\frac{-a+\varepsilon\,\Delta}{2}z}\times z^{2-s}\times\left(1+\varepsilon\frac{6}{\Delta z}+\frac{6}{\Delta^2z^2}\right)\propto e^{\frac{-a+\varepsilon\,\Delta}{2}z}\times z^{-s}\times\left(1+\varepsilon\frac{2\Delta z}{2}+\frac{\Delta^2z^2}{6}\right)\\ \lambda=3\to y(z)=e^{\frac{-a+\varepsilon\,\Delta}{2}z}\times z^{3-s}\times\left(1+\varepsilon\frac{12}{\Delta z}+\frac{36}{\Delta^2z^2}+\varepsilon\frac{24}{\Delta^3z^3}\right)\propto e^{\frac{-a+\varepsilon\,\Delta}{2}z}\times z^{-s}\times\left(1+\varepsilon\frac{3\Delta z}{2}+\frac{\Delta^2z^2}{2}+\varepsilon\frac{\Delta^3z^3}{24}\right)\\ \lambda=4\to y(z)=e^{\frac{-a+\varepsilon\,\Delta}{2}z}\times z^{4-s}\times\left(1+\varepsilon\frac{20}{\Delta z}+\frac{120}{\Delta^2z^2}+\varepsilon\frac{240}{\Delta^3z^3}+\frac{120}{\Delta^4z^4}\right)\propto e^{\frac{-a+\varepsilon\,\Delta}{2}z}\times z^{-s}\times\left(1+\varepsilon\frac{4\Delta z}{2}+\Delta^2z^2+\varepsilon\frac{\Delta^3z^3}{6}+\frac{\Delta^4z^4}{120}\right)\\ \lambda=5\to y(z)=e^{\frac{-a+\varepsilon\,\Delta}{2}z}\times z^{5-s}\times\left(1+\varepsilon\frac{30}{\Delta z}+\frac{300}{\Delta^2z^2}+\varepsilon\frac{1200}{\Delta^3z^3}+\frac{1800}{\Delta^4z^4}+\varepsilon\frac{720}{\Delta^5z^5}\right)\propto e^{\frac{-a+\varepsilon\,\Delta}{2}z}\times z^{-s}\times\left(1+\varepsilon\frac{5\Delta z}{2}+\frac{5\Delta^2z^2}{3}+\varepsilon\frac{5\Delta^3z^3}{12}+\frac{\Delta^4z^4}{24}+\varepsilon\frac{\Delta^5z^5}{720}\right)\end{cases}$$

Exemple 5 A.R.Forsythe Chapitre 91, page 281

Soit l'équation différentielle du quatrième degré suivante :

$$y^{(4)}(z)-\frac{2\,n\,(n+1)}{z^2}y''(z)+\frac{4\,n\,(n+1)}{z^3}y'(z)+\left(\frac{n\,(n+1)(n+3)(n-2)}{z^4}-c^4\right)y(z)=0$$

Le points z=∞ est un point irrégulier essentiel. Le diagramme de Newton-Puisieux est de la forme :



Cela conduit à proposer un terme exponentiel comme suit: $y(z)=e^{\Omega(z)}u(z)\quad \Omega(z)=\beta\, z$ *. La liste des nombres est* $Kg_l=\{0,-1,-1,0\}$. *Le nombre maximal est* $Kg_l=0$ *et les positions minimum et maximum des indices de cette valeur sont donc les suivantes* $Min(Kg_l)=1 \quad et \quad Max(Kg_l)=4$ *et le développement en série de l'expression :* $(\Omega'(z))^4+P_1(z)(\Omega'(z))^3+P_2(z)(\Omega'(z))^2+P_3(z)(\Omega'(z))^1+P_4(z)(\Omega'(z))^0$ *autour de z=∞ à l'ordre 0 permet de fixer la valeur du paramètre β :*

$$(\Omega'(z))^4+P_1(z)(\Omega'(z))^3+P_2(z)(\Omega'(z))^2+P_3(z)(\Omega'(z))^1+P_4(z)(\Omega'(z))^0=\beta^4-c^4+O\left(\frac{1}{z}\right)\Rightarrow \beta^4=c^4$$

En insérant le terme exponentiel $y(z)=e^{\beta z}u(z)\quad avec \quad \beta^4=c^4$ *on obtient une équation différentielle du troisième degré qui possède une solution régulière :*

$$u^{(4)}(z)+4\beta\, u^{(3)}(z)+\left(6\beta^2-\frac{2n(n+1)}{z^2}\right)u''(z)+4\left(\beta^3-\beta\,\frac{n(n+1)}{z^2}+\frac{n(n+1)}{z^3}\right)u'(z)+\frac{2n^3+n^4-n^2(5+2\beta\, z\,(\beta\, z-2))-2n\,(3+\beta\, z\,(\beta\, z-2))}{z^4}u(z)=0$$

Et l'équation indicielle de cette dernière donne la valeur de l'exposant pour la solution régulière $\sigma=0$.

L'injection d'un développement de la forme $u(z)=\sum_{l=0}^{l=+\infty} c_l z^{-l}$ *conduit à une récurrence à 4 termes de la forme :*

$$\begin{cases} c_0=1 \qquad c_1=-\dfrac{n(n+1)}{2\beta} \qquad c_2=\dfrac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{8\beta^2} \\ 4l\beta^3 c_l=2\beta^2\left(3l(l-1)-n(n+1)\right)c_{l-1}-4(l-1)\left(l(l-2)-n(n+1)\right)c_{l-2}+(l+n)(l+n-2)(l-n-1)(l-n-3)\,c_{l-3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_3=-\dfrac{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)}{48\beta^3} \qquad c_4=\dfrac{(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{384\beta^4} \\ c_5=-\dfrac{(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}{3840\beta^5} \\ c_6=\dfrac{(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)}{46080\beta^6} \\ c_7=-\dfrac{(n-6)(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)(n+7)}{645120\beta^7} \end{cases}$$

On a déjà vu que cette récurrence est finie et qu'elle elle s'arrête à l'indice n. De plus le calcul des coefficients est explicite :

$$y(z)=e^{\beta z}\times\sum_{l=0}^{l=n}(-1)^l\times\frac{\prod_{i=0}^{i=l-1}(n-i)\times\prod_{i=0}^{i=l}(n+i)}{2^l\,l!\,\beta^l}\times z^{-l} \quad avec \quad \beta^4=c^4$$

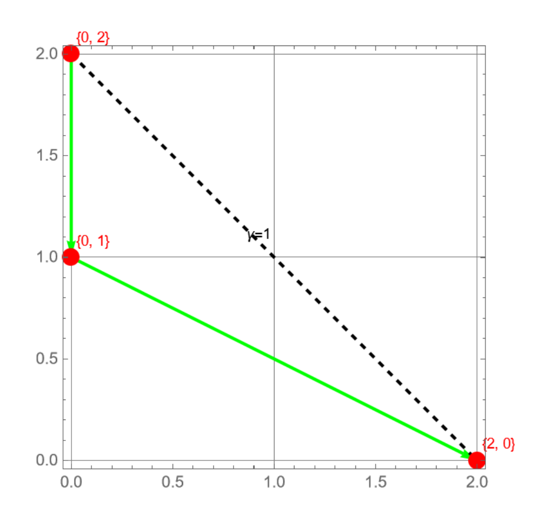
Voici les quelques solutions des premières valeurs de n :

$$y^{(4)}(z)-\frac{2\,n(n+1)}{z^2}y''(z)+\frac{4\,n(n+1)}{z^3}y'(z)+\left(\frac{n(n+1)(n-2)(n+3)}{z^4}-c^4\right)y(z)=0$$

$$\begin{cases} n=1\rightarrow y(z)=e^{\beta z}\times\left(1-\dfrac{1}{\beta z}\right) \quad avec \quad \beta^4=c^4 \\ n=2\rightarrow y(z)=e^{\beta z}\times\left(1-\dfrac{3}{\beta z}+\dfrac{3}{\beta^2 z^2}\right) \quad avec \quad \beta^4=c^4 \\ n=3\rightarrow y(z)=e^{\beta z}\times\left(1-\dfrac{6}{\beta z}+\dfrac{15}{\beta^2 z^2}-\dfrac{15}{\beta^3 z^3}\right) \quad avec \quad \beta^4=c^4 \\ n=4\rightarrow y(z)=e^{\beta z}\times\left(1-\dfrac{10}{\beta z}+\dfrac{45}{\beta^2 z^2}-\dfrac{105}{\beta^3 z^3}+\dfrac{105}{\beta^4 z^4}\right) \quad avec \quad \beta^4=c^4 \\ n=5\rightarrow y(z)=e^{\beta z}\times\left(1-\dfrac{15}{\beta z}+\dfrac{105}{\beta^2 z^2}-\dfrac{420}{\beta^3 z^3}+\dfrac{945}{\beta^4 z^4}-\dfrac{945}{\beta^5 z^5}\right) \quad avec \quad \beta^4=c^4 \end{cases}$$

Exemple 2 A.R.Forsythe Chapitre 108, page 347

Soit l'équation différentielle du second degré $y''(z)-\frac{1+z^3}{z}y(z)=0$. *Le points z=∞ est un point irrégulier essentiel. Le diagramme de Newton-Puisieux est de la forme :*



Cela conduit à proposer un terme exponentiel comme suit: $y(z)=e^{\Omega(z)}u(z)\quad \Omega(z)=\beta_1 z+\beta_2 z^2$ *. La liste des nombres est* $Kg_l=\{0,1\}$*. Le nombre maximal est* $Kg_l=1$ *et les positions minimum et maximum des indices de cette valeur sont donc les suivantes* $Min(Kg_l)=2 \quad et \quad Max(Kg_l)=2$ *et le développement en série de l'expression :* $(\Omega'(z))^2+P_2(z)(\Omega'(z))^0$ *autour de z=∞ à l'ordre 0 permet de fixer la valeur des paramètres β1 et β2 :* $(\Omega'(z))^2+P_2(z)(\Omega'(z))^0=z^2(4\beta_2{}^2-1)+4\beta_1\beta_2 z+O(1)\Rightarrow \beta_2{}^2=\frac{1}{4}\quad et \quad \beta_1=0$ *. En insérant le terme exponentiel* $y(z)=e^{\beta z^2}u(z)\quad avec \quad \beta^2=\beta_2{}^2=\frac{1}{4}$ *l'on obtient une équation différentielle du second degré qui possède une solution régulière :* $u''(z)+4\beta\, z\, u'(z)+\left(2\beta-\frac{1}{4z}\right)u(z)=0$ *dont l'équation indicielle est la suivante :* $\sigma=\frac{1}{2}$*. L'injection d'un développement de la forme* $u(z)=z^{-\frac{1}{2}}\sum_{l=0}^{l=+\infty}c_l z^{-l}$ *conduit à une récurrence à 3 termes de la forme :* $c_0=1 \quad c_1=-\frac{1}{4\beta} \quad c_l=-\frac{1}{4l\beta}c_{l-1}+\frac{(2l-1)(2l-3)}{16\,l\beta}c_{l-2} \quad l>1$

Le développement de la forme normale :

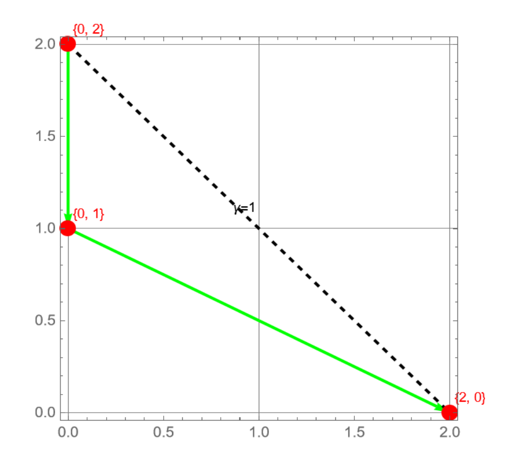
$$\begin{cases} y(z)=e^{\beta z^2}z^{-\frac{1}{2}}\sum_{l=0}^{l=+\infty}c_l z^{-l} \quad avec \quad \beta^2=\frac{1}{4} \\ c_0=1 \quad c_1=-\frac{1}{4\beta} \quad c_l=-\frac{1}{4l\beta}c_{l-1}+\frac{(2l-1)(2l-3)}{16\,l\beta}c_{l-2} \quad l>1 \end{cases}$$

ne converge pas pour les valeurs réelles de z . Par contre il y a convergence sur les lignes du plan complexe portées par le valeur de z de la forme :

$$z=x_0(1+i)\quad ou \quad z=x_0(1-i)\quad x_0\in\mathbf{R}$$

Exemple 3 A.R.Forsythe Chapitre 108, page 347

Soit l'équation différentielle du second degré $y''(z)-(\alpha+z^2)y(z)=0$. *Le points z=∞ est un point irrégulier essentiel. Le diagramme de Newton-Puisieux est de la forme :*



Cela conduit à proposer un terme exponentiel comme suit: $y(z)=e^{\Omega(z)}u(z)\quad \Omega(z)=\beta_1 z+\beta_2 z^2$. *La liste des nombres est* $Kg_l=\{0,1\}$. *Le nombre maximal est* $Kg_l=1$ *et les positions minimum et maximum des indices de cette valeur sont donc les suivantes* $Min(Kg_l)=2 \quad et \quad Max(Kg_l)=2$ *et le développement en série de l'expression :* $(\Omega'(z))^2+P_2(z)(\Omega'(z))^0$ *autour de z=∞ à l'ordre 0 permet de fixer la valeur des paramètres β1 et β2 :* $(\Omega'(z))^2+P_2(z)(\Omega'(z))^0=z^2(4\beta_2{}^2-1)+4\beta_1\beta_2 z+O(1)\Rightarrow \beta_2{}^2=\frac{1}{4} \quad et \quad \beta_1=0$. *En insérant le terme exponentiel* $y(z)=e^{\beta z^2}u(z) \quad avec \quad \beta^2=\beta_2{}^2=\frac{1}{4}$ *l'on obtient une équation différentielle du second degré qui possède une solution régulière :* $u''(z)+4\beta\, z\, u'(z)+(2\beta-\alpha)u(z)=0$ *dont l'équation indicielle est la suivante :* $\sigma=\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{4\beta}=\frac{1}{2}-\alpha\,\beta$. *L'injection d'un développement de la forme* $u(z)=z^{\alpha\beta-\frac{1}{2}}\sum_{l=0}^{l=+\infty}c_l z^{-l}$ *conduit à une récurrence à 2 termes de la forme par pas de deux :*

$$c_0=1 \quad c_l=\frac{(2\beta(2l-3)-\alpha)(2\beta(2l-1)-\alpha)}{16\,l\beta}c_{l-2} \quad l\geq 2 \Leftrightarrow c_0=1 \quad c_{2l}=\frac{(2\beta(4l-3)-\alpha)(2\beta(4l-1)-\alpha)}{32\,l\beta}c_{2l-2} \quad l\geq 2$$

$$Comme \quad 2\beta=\varepsilon \quad avec \quad \varepsilon=\pm 1\rightarrow c_{2l}=\varepsilon\frac{(4l-3-\varepsilon\,\alpha)(4l-1-\varepsilon\,\alpha)}{16\,l}c_{2l-2} \quad l\geq 2$$

Le développement de la forme normale est donc fini si α est un entier impair positif ou négatif plus précisément :

$$\begin{cases} 2\beta=\varepsilon \quad \alpha=2\vartheta+\varepsilon \quad c_l=\varepsilon\frac{(2l-\varepsilon\,\vartheta-2)(2l-\varepsilon\,\vartheta-1)}{4\,l}c_{l-1}\Rightarrow y(z)=e^{\varepsilon\frac{z^2}{2}}z^{\varepsilon\vartheta}\sum_{l=0}^{l=\left\lfloor\varepsilon\frac{\vartheta}{2}\right\rfloor}c_l z^{-2l} \\ \varepsilon=1 \quad \vartheta\geq 0\Rightarrow c_l=\frac{(2l-\vartheta-2)(2l-\vartheta-1)}{4\,l}c_{l-1} \quad l\geq 1\rightarrow y(z)=e^{\frac{z^2}{2}}z^{\vartheta}\sum_{l=0}^{l=\left\lfloor\frac{\vartheta}{2}\right\rfloor}c_l z^{-2l} \\ \varepsilon=-1 \quad \vartheta\leq 0\Rightarrow c_l=-\frac{(2l+\vartheta-2)(2l+\vartheta-1)}{4\,l}c_{l-1} \quad l\geq 1\rightarrow y(z)=e^{-\frac{z^2}{2}}z^{-\vartheta}\sum_{l=0}^{l=\left\lfloor-\frac{\vartheta}{2}\right\rfloor}c_l z^{-2l} \end{cases}$$

Ce qui par exemple pour les premières valeurs de ϑ, compte tenu du fait qu'en dehors du terme exponentiel, le reste est un polynôme que je normalise à 1 pour le premier terme :

$$
\begin{cases}
\vartheta = 0 \quad \alpha = \varepsilon \rightarrow y(z) = e^{\varepsilon \frac{z^2}{2}} \\
\vartheta = \varepsilon \quad \alpha = 3\varepsilon \rightarrow y(z) = e^{\varepsilon \frac{z^2}{2}} \times z \\
\vartheta = 2\,\varepsilon \quad \alpha = 5\varepsilon \rightarrow y(z) = e^{\varepsilon \frac{z^2}{2}} \times \left(1 + \varepsilon\, 2z^2\right) \\
\vartheta = 3\,\varepsilon \quad \alpha = 7\varepsilon \rightarrow y(z) = e^{\varepsilon \frac{z^2}{2}} \times \left(z + \varepsilon \frac{2}{3} z^3\right) \\
\vartheta = 4\,\varepsilon \quad \alpha = 9\varepsilon \rightarrow y(z) = e^{\varepsilon \frac{z^2}{2}} \times \left(1 + 4\varepsilon\, z^2 + \frac{4}{3} z^4\right) \\
\vartheta = 5\,\varepsilon \quad \alpha = 11\varepsilon \rightarrow y(z) = e^{\varepsilon \frac{z^2}{2}} \times \left(z + \frac{4}{3} \varepsilon\, z^3 + \frac{4}{15} z^5\right) \\
\vartheta = 6\,\varepsilon \quad \alpha = 13\varepsilon \rightarrow y(z) = e^{\varepsilon \frac{z^2}{2}} \times \left(1 + 6\varepsilon\, z^2 + 4z^4 + \varepsilon \frac{8}{15} z^6\right) \\
\vartheta = 7\,\varepsilon \quad \alpha = 15\varepsilon \rightarrow y(z) = e^{\varepsilon \frac{z^2}{2}} \times \left(z + 2\varepsilon\, z^3 + \frac{4}{5} z^5 + \varepsilon \frac{8}{105} z^7\right)
\end{cases}
$$

Exemple A.R.Forsythe Chapitre 98, page 301 et suivantes : équation différentielle du troisième degré

Soit l'équation différentielle de Hamburger du troisième degré décrite sous cette forme :

$$y^{(3)}(z)+3\,\frac{k_{10}z+k_{11}}{z^2}\,y''(z)+\frac{k_{20}z^2+k_{21}z+k_{22}}{z^4}\,y'(z)+\frac{k_{30}z^3+k_{31}z^2+k_{32}z+k_{33}}{z^6}\,y(z)=0$$

Le point z=∞ est un point régulier et le point z=0 est un point singulier essentiel. L'équation indicielle des solutions régulières au point z=∞ est la suivante : $\rho^3+3\,\rho^2(1-k_{10})+\rho(2+k_{20}-3k_{10})-k_{30}=0$.

On sait que les solutions régulières se construisent sous la forme : $y(z)=z^{-\rho}\times\sum_{l=0}^{l=\infty}c_l z^{-l}$ *. En injectant un tel développement on retrouve d'abord la contrainte :* $\rho^3+3\,\rho^2(1-k_{10})+\rho(2+k_{20}-3k_{10})-k_{30}=0$ *et la récurrence à 4 termes, vérifiée par les coefficients du développement :*

$$\begin{cases} c_0=1 \\ c_1=\dfrac{k_{31}-k_{21}\rho+3k_{11}\rho(\rho+1)}{6+9\,\rho+3\rho^2+k_{20}-6k_{10}(1+\rho)}\,c_0 \\ c_2=\dfrac{\left(k_{31}-k_{21}(1+\rho)+3k_{11}(2+\rho)(1+\rho)\right)c_1+\left(k_{32}-\rho\,k_{22}\right)c_0}{2\left(12+12\,\rho+3\rho^2+k_{20}-3k_{10}(3+2\rho)\right)} \\ c_l=\dfrac{\left(k_{31}-k_{21}(l+\rho-1)+3k_{11}(l+\rho)(l+\rho-1)\right)c_{l-1}+\left(k_{32}-k_{22}(l+\rho-2)\right)c_{l-2}+k_{33}\,c_{l-3}}{l\left(l^2+3\,l\,(1+\rho)+2+3\rho(2+\rho)+k_{20}-3k_{10}(l+1+2\rho)\right)} \end{cases}$$

Trois solutions régulières peuvent donc être construite sur cette base.

Revenons à l'équation différentielle : $y^{(3)}(z)+3\,\frac{k_{10}z+k_{11}}{z^2}\,y''(z)+\frac{k_{20}z^2+k_{21}z+k_{22}}{z^4}\,y'(z)+\frac{k_{30}z^3+k_{31}z^2+k_{32}z+k_{33}}{z^6}\,y(z)=0$

Cette équation peut se simplifier par le changement de fonction : $y(z)=z^{k_{10}}e^{-\frac{k_{11}}{z}}w(z)$ *sous la forme :*

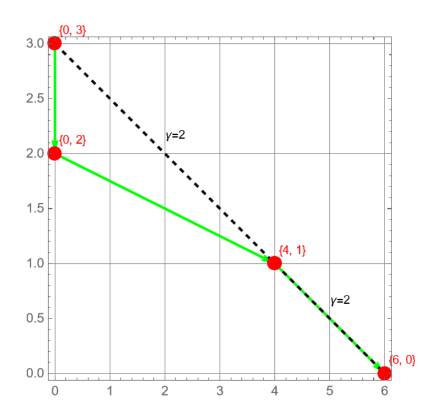
$$w^{(3)}(z)+\frac{a_{20}z^2+a_{21}z+a_{22}}{z^4}\,w'(z)+\frac{a_{30}z^3+a_{31}z^2+a_{32}z+a_{33}}{z^6}\,w(z)=0$$

Dans ce cas les nouveaux paramètres se déduisent des anciens par les relations :

$$\begin{aligned} a_{20}&=3k_{10}(1-k_{10})+k_{20} \\ a_{21}&=k_{21}+6k_{11}(1-k_{10}) \\ a_{22}&=k_{22}-3k_{11}^{\ 2} \\ a_{30}&=k_{30}+k_{10}\left(2k_{10}^{\ 2}-2-k_{20}\right) \\ a_{31}&=k_{31}-k_{10}k_{21}+k_{11}\left(6k_{10}^{\ 2}-6-k_{20}\right) \\ a_{32}&=k_{32}-k_{11}k_{21}+k_{10}\left(6k_{11}^{\ 2}-k_{22}\right) \\ a_{33}&=k_{33}-k_{11}k_{22}+2k_{11}^{\ 3} \end{aligned}$$

Partons donc de la forme « simplifiée » : $y^{(3)}(z)+\frac{a_{20}z^2+a_{21}z+a_{22}}{z^4}y'(z)+\frac{a_{30}z^3+a_{31}z^2+a_{32}z+a_{33}}{z^6}y(z)=0$

Pour cette équation différentielle, le point z=∞ est un point régulier et le point z=0 est un point singulier essentiel. L'équation indicielle des solutions régulières au point z=∞ de la forme : $y(z)=z^{-\rho}\times\sum_{l=0}^{l=+\infty}c_l z^{-l}$ *est la suivante :* $\rho^3+3\rho^2+\rho(2+a_{20})-a_{30}=0\Leftrightarrow\rho(\rho+1)(\rho+2)+\rho\, a_{20}-a_{30}=0$ *. Le diagramme de Newton-Puisieux au point z=0 est de la forme :*



Cela conduit à proposer un terme exponentiel comme suit: $y(z)=e^{\Omega(z)}u(z)\quad\Omega(z)=\frac{\beta}{z}$.

Le développement en série de l'expression : $(\Omega'(z))^3+P_1(z)(\Omega'(z))^2+P_2(z)(\Omega'(z))^1+P_3(z)(\Omega'(z))^0$ *autour de z=0 à l'ordre 0 permet de fixer la valeur du paramètres β qui suit une équation polynomiale du troisième degré :* $(\Omega'(z))^3+P_1(z)(\Omega'(z))^2+P_2(z)(\Omega'(z))^1+P_3(z)(\Omega'(z))^0=\frac{a_{33}-\beta^3-\beta\, a_{22}}{z^6}+O\left(\frac{1}{z^5}\right)\Rightarrow\beta^3+a_{22}\beta-a_{33}=0$

En insérant le terme exponentiel $y(z)=e^{\frac{\beta}{z}}u(z)\quad avec\quad\beta^3+a_{22}\beta-a_{33}=0$ *l'on obtient une équation différentielle du troisième degré qui possède une solution régulière :*

$$u^{(3)}(z)-\frac{3\beta}{z^2}u''(z)+\frac{a_{20}z^2+(a_{21}+6\beta)z+a_{22}+3\beta^2}{z^4}u'(z)+\frac{a_{30}z^2+(a_{31}-\beta(6+a_{20}))z+a_{32}-\beta\, a_{21}-6\beta^2}{z^5}u(z)=0$$

dont l'équation indicielle est la suivante : $\sigma=\frac{6\beta^2+\beta\, a_{21}-a_{32}}{3\beta^2+a_{22}}=\frac{2(3\beta^2+a_{22})+\beta\, a_{21}-a_{32}-2a_{22}}{3\beta^2+a_{22}}=2+\frac{\beta\, a_{21}-a_{32}-2a_{22}}{3\beta^2+a_{22}}$.

L'injection d'un développement de la forme $u(z)=z^{\sigma}\sum_{l=0}^{l=+\infty}c_l z^l$ *conduit à une récurrence à 3 termes de la forme :*

$$\begin{cases} c_0=1\quad c_1=-\frac{a_{31}+a_{21}\sigma-\beta\,(a_{20}+3(\sigma-1)(\sigma-2))}{3\beta^2+a_{22}}c_0 \\ c_l=-\frac{(a_{31}+a_{21}(l+\sigma-1)-\beta\,(a_{20}+3(l+\sigma-2)(l+\sigma-3)))c_{l-1}+(a_{30}+a_{20}(l+\sigma-2)+(l+\sigma-2)(l+\sigma-3)(l+\sigma-4))c_{l-2}}{(3\beta^2+a_{22})l} \end{cases}\quad l\geq 2$$

Avec les coefficients c_l, c_{l+1}, c_{l+2} *la récurrence s'écrit :*

$$\begin{cases} c_0 = 1 \quad c_1 = -\dfrac{a_{31} + a_{21}\sigma - \beta\left(a_{20} + 3(\sigma-1)(\sigma-2)\right)}{3\beta^2 + a_{22}} c_0 \\ \left(3\beta^2 + a_{22}\right)(l+2)\, c_l + \\ + \left(a_{31} - \beta\, a_{20} - 6\beta + (a_{21} + 6\beta)(l+\sigma+1) - 3\beta(l+\sigma)(l+\sigma+1)\right) c_{l+1} + \\ + \left(a_{30} + a_{20}(l+\sigma) + (l+\sigma)(l+\sigma-1)(l+\sigma-2)\right) c_l = 0 \end{cases}$$

$$Posons \quad \begin{cases} k_l = \left(3\beta^2 + a_{22}\right)(l+2) \\ h_l = a_{31} - \beta\, a_{20} - 6\beta + (a_{21} + 6\beta)(l+\sigma+1) - 3\beta(l+\sigma)(l+\sigma+1) \\ g_l = a_{30} + a_{20}(l+\sigma) + (l+\sigma)(l+\sigma-1)(l+\sigma-2) \end{cases} \Rightarrow k_l\, c_l + h_l\, c_{l+1} + g_l\, c_{l+2} = 0$$

La condition d'arrêt de cette récurrence est également celle qui permet de se placer dans les conditions de l'équation dîtes de Hamburger avec une continuation analytique possible entre le voisinage de z=0 et celui de z=∞ . Pour qu'une telle récurrence soit finie et s'arrête à une valeur d'indice ϑ entière, il convient que les deux coefficients suivants s'annulent, soit :

$$c_{\vartheta+1} = c_{\vartheta+2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} k_{\vartheta-1}\, c_{\vartheta-1} + h_{\vartheta-1}\, c_\vartheta + g_{\vartheta-1}\, c_{\vartheta+1} = 0 \Rightarrow k_{\vartheta-1}\, c_{\vartheta-1} + h_{\vartheta-1}\, c_\vartheta = 0 \\ k_\vartheta\, c_\vartheta + h_\vartheta\, c_{\vartheta+1} + g_\vartheta\, c_{\vartheta+2} = 0 \Rightarrow k_\vartheta\, c_\vartheta = 0 \Leftrightarrow k_\vartheta \end{cases}$$

Remarque : les coefficients de la récurrence sur la forme normale s'écrivent :

$$k_l\, c_l + h_l\, c_{l+1} + g_l\, c_{l+2} = 0 \rightarrow \begin{cases} k_l = \left(3\beta^2 + a_{22}\right)(l+2) \\ h_l = a_{31} - \beta\, a_{20} - 6\beta + (a_{21} + 6\beta)(l+\sigma+1) - 3\beta(l+\sigma)(l+\sigma+1) \\ g_l = (l+\sigma)(l+\sigma-1)(l+\sigma-2) + a_{20}(l+\sigma) + a_{30} \end{cases}$$

L'équation indicielle des formes régulières s'écrit (voir immédiatement ce qui suit) comme fonction de l'exposant ρ :

$$\begin{cases} f_0(\varsigma) = \varsigma(\varsigma-1)(\varsigma-2) + \varsigma\, a_{20} + a_{30} \\ \Rightarrow -\left(\rho^3 + 3\,\rho^2 + \rho(2 + a_{20}) - a_{30}\right) = f_0(-\rho) = -\rho(\rho+1)(\rho+2) - \rho\, a_{20} + a_{30} \\ Avec \quad f_0(-\rho) = 0 \end{cases}$$

Le coefficient g_l *s'exprime sous la forme de la fonction indicielle* f_0 *du développement de Fröbenius :*

$$g_l = (l+\sigma)(l+\sigma-1)(l+\sigma-2) + a_{20}(l+\sigma) + a_{30} = f_0(l+\sigma)$$

Les deux conditions pour l'arrêt de la récurrence à l'indice ϑ sont :

$$\begin{cases} k_{\vartheta-1}\, c_{\vartheta-1} + h_{\vartheta-1}\, c_\vartheta = 0 \\ k_\vartheta\, c_\vartheta = 0 \end{cases}$$

Il y a en tout pour l'équation différentielle simplifiée 7 paramètres : $a_{20}, a_{21}, a_{22}, a_{30}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$ *. Il y a donc en quelque sorte cinq de ces paramètres qui restent libre de choix.*

Revenons rapidement à la construction de la solution régulière : de même que pour l'équation différentielle de départ nous avons abordé la construction de la solution régulière autour de z=∞ :

$$y^{(3)}(z)+3\,\frac{k_{10}z+k_{11}}{z^2}\,y''(z)+\frac{k_{20}z^2+k_{21}z+k_{22}}{z^4}\,y'(z)+\frac{k_{30}z^3+k_{31}z^2+k_{32}z+k_{33}}{z^6}\,y(z)=0$$

Faisons de même avec l'équation simplifiée : $y^{(3)}(z)+\frac{a_{20}z^2+a_{21}z+a_{22}}{z^4}\,y'(z)+\frac{a_{30}z^3+a_{31}z^2+a_{32}z+a_{33}}{z^6}\,y(z)=0$ *que nous allons considérer comme notre équation initiale et construisons les solutions régulières autour de z=∞. On sait que les solutions régulières se construise sous la forme :* $y(z)=z^{-\rho}\times\sum_{l=0}^{l=\infty}c_l z^{-l}$ *. En injectant un tel développement on retrouve d'abord la contrainte :* $\rho^3+3\,\rho^2+\rho(2+a_{20})-a_{30}=0$ *qui est l'équation indicielle dont les racines sont à la base du développement de Fröbenius et la récurrence à 4 termes, vérifiée par les coefficients du développement :*

$$\begin{cases} c_0=1 \\ c_1=\dfrac{(a_{31}-a_{21}\rho)\,c_0}{6+9\,\rho+3\rho^2+a_{20}} \\ c_2=\dfrac{(a_{31}-a_{21}(\rho+1))\,c_1+(a_{32}-a_{22}\rho)\,c_0}{2\,(12+12\,\rho+3\rho^2+a_{20})} \\ c_l=\dfrac{(a_{31}-a_{21}(l+\rho-1))\,c_{l-1}+(a_{32}-a_{22}(l+\rho-2))\,c_{l-2}+a_{33}\,c_{l-3}}{l\,(l^2+3\,l\,(1+\rho)+2+3\rho(2+\rho)+a_{20})} \end{cases}$$

Trois solutions régulières peuvent donc être construite sur cette base.

Par ailleurs ces formes régulières sont construites sur trois racines indicielles ρ_1,ρ_2,ρ_3 *qui en tant que racines de l'équation indicielle sont reliées par les relations :*

$$\rho^3+3\,\rho^2+\rho(2+a_{20})-a_{30}=0 \Rightarrow \begin{cases} \rho_1+\rho_2+\rho_3=-3 \\ \rho_1\rho_2+\rho_1\rho_3+\rho_2\rho_3=2+a_{20} \\ \rho_1\rho_2\rho_3=a_{30} \end{cases}$$

Du fait que l'équation est dîtes de Hamburger si l'on désigne par ρ l'exposant de la solution régulière à z=∞ et par σ l'exposant de la forme normale en z=0, alors ces deux exposants sont liés par la relation : $\sigma=-\rho-k$ *avec k un entier positif. On a déjà vu précédemment que cette relation contraint l'existence simultanée de plusieurs formes normales. En effet dans le cas d'une équation du troisième degré, il y a au plus 3 formes normales potentiellement constructibles, mais la question peut être posée de la coexistence de ces formes normales pour un même jeu de paramètres de l'équation différentielle.*

Discutons maintenant les différents cas de racines de l'équation $\beta^3+a_{22}\beta-a_{33}=0$ *pour le coefficient β qui conditionne le nombre de formes normales possibles.*

β ne peut-être une racine triple *car dans ce cas* $a_{22}=a_{33}=0$ *et la construction d'une forme normale et sans objet. Au demeurant le cas* $a_{22}=a_{33}=0$ *ne peut être ignoré quant à la construction de solutions possibles autour de z=0.*

***<u>Supposons maintenant que β est une racine simple</u>**, soit que* $\beta^3 + a_{22}\beta - a_{33} = (\beta - \beta_1)(\beta - \beta_2)(\beta - \beta_3) = 0$*, avec les relations :*

$$\begin{cases} \beta_1\beta_2\beta_3 = a_{33} \\ \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0 \\ \beta_1\beta_2 + \beta_2\beta_3 + \beta_1\beta_3 = a_{22} \end{cases}$$

Par ailleurs un résultat « plus ou moins connu » pour une équation polynomiale de degré quelconque et au cas d'espèce de degré 3 :

$$h(\beta) = \prod_{l=1}^{l=N}(\beta - \beta_l) \rightarrow \sum_{l=1}^{l=N} \frac{\beta_l^{\,m}}{\left.\frac{dh(\beta)}{d\beta}\right|_{\beta=\beta_l}} = 0 \quad pour \quad m = 0, N-2 \quad et \quad \sum_{l=1}^{l=N} \frac{\beta_l^{\,N-1}}{\left.\frac{dh(\beta)}{d\beta}\right|_{\beta=\beta_l}} = 1 \quad et \quad \sum_{l=1}^{l=N} \frac{\beta_l^{\,N}}{\left.\frac{dh(\beta)}{d\beta}\right|_{\beta=\beta_l}} = \sum_{l=1}^{l=N}\beta_l$$

$$h(\beta) = \beta^3 + a_{22}\beta - a_{33} = \prod_{l=1}^{l=3}(\beta - \beta_l) \Rightarrow \sum_{l=1}^{l=3} \frac{1}{\left.\frac{dh(\beta)}{d\beta}\right|_{\beta=\beta_l}} = 0 \quad et \quad \sum_{l=1}^{l=3} \frac{\beta_l}{\left.\frac{dh(\beta)}{d\beta}\right|_{\beta=\beta_l}} = 0$$

L'exposant σ s'écrit $\sigma = 2 + \frac{\beta\, a_{21} - a_{32} - 2a_{22}}{3\beta^2 + a_{22}}$ *et admet donc trois valeurs distinctes suivant celles de β :*

$$\sigma_l = 2 + \frac{\beta_l\, a_{21} - a_{32} - 2a_{22}}{3\beta_l^{\,2} + a_{22}} = 2 + \frac{\beta_l\, a_{21} - a_{32} - 2a_{22}}{\left.\frac{dh(\beta)}{d\beta}\right|_{\beta=\beta_l}}$$

La somme des trois valeurs possibles de σ est donc :

$$\sum_{l=1}^{l=3}\sigma_l = 6 + a_{21} \times \sum_{l=1}^{l=3} \frac{\beta_l}{\left.\frac{dh(\beta)}{d\beta}\right|_{\beta=\beta_l}} - (a_{32} + 2a_{22}) \times \sum_{l=1}^{l=3} \frac{\beta_l}{\left.\frac{dh(\beta)}{d\beta}\right|_{\beta=\beta_l}} = 6$$

De même remarquons que :

$$h(\beta) = \beta^3 + a_{22}\beta - a_{33} \Rightarrow \frac{dh(\beta)}{d\beta} = 3\beta^2 + a_{22} = (\beta - \beta_1)(\beta - \beta_2) + (\beta - \beta_2)(\beta - \beta_3) + (\beta - \beta_1)(\beta - \beta_3)$$

$$\Rightarrow \left.\frac{dh(\beta)}{d\beta}\right|_{\beta=\beta_1} = (\beta_1 - \beta_2)(\beta_1 - \beta_3) \neq 0 \quad \left.\frac{dh(\beta)}{d\beta}\right|_{\beta=\beta_2} = (\beta_2 - \beta_1)(\beta_2 - \beta_3) \neq 0 \quad \left.\frac{dh(\beta)}{d\beta}\right|_{\beta=\beta_3} = (\beta_3 - \beta_1)(\beta_3 - \beta_2) \neq 0$$

Si bien que chacune des valeurs de $\sigma = \frac{6\beta^2 + \beta\, a_{21} - a_{32}}{3\beta^2 + a_{22}} = 2 + \frac{\beta\, a_{21} - a_{32} - 2a_{22}}{3\beta^2 + a_{22}}$ *est parfaitement définie pour un racine simple de β.*

Par ailleurs l'existence d'une première forme normale est conditionné par l'arrêt de la récurrence sur la partie régulière. Nous venons de voir que cela laisse un choix libre pour ***cinq des paramètres*** *de l'équation différentielle de départ. Admettons la coexistence d'une seconde forme normale, ce qui implique deux conditions supplémentaires pour l'arrêt de la récurrence avec le second choix de β et donc de σ,* ***soit un choix libre de trois paramètres****. Si maintenant nous supposons une troisième forme normale coexistante alors le choix libre de paramètres est encore réduit de deux soit* ***un seul paramètre libre****.*

Mais en réalité la coexistence de trois formes normales n'est pas possible si les trois valeurs de β sont différentes. En effet d'après la relation σ=-ρ-k que l'on applique sur les trois valeurs de ρ et σ avec trois valeurs positives de k :

$$\begin{cases} \sigma_1 + k_1 = -\rho_1 \\ \sigma_2 + k_2 = -\rho_2 \Rightarrow \sigma_1 + k_1 + \sigma_2 + k_2 + \sigma_3 + k_3 = 3 = k_1 + k_2 + k_3 + 6 \Rightarrow k_1 + k_2 + k_3 = -3 \\ \sigma_3 + k_3 = -\rho_3 \end{cases}$$

Conclusion sur trois racines β distinctes donc trois valeurs σ distinctes provenant de trois racines indicielles ρ distinctes : l'équation différentielle admet au plus la coexistence de deux formes normales.

Toutefois si les valeurs de σ sont en nombre plus restreint (une ou deux valeurs distinctes) la coexistence de trois formes normales est possible.

Passons maintenant à l'hypothèse que β est une racine double*, soit que l'équation pour β soit de la forme* $\beta^3 + a_{22}\beta - a_{33} = (\beta - \beta_1)^2(\beta - \beta_3) = 0 \quad avec \quad \beta_1 = \beta_2$ *. Avec la racine double vient les relations suivantes :*

$$\beta_1 = \beta_2 \quad et \quad \begin{cases} \beta_1\beta_2\beta_3 = a_{33} \\ \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0 \\ \beta_1\beta_2 + \beta_2\beta_3 + \beta_1\beta_3 = a_{22} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1^2\beta_3 = a_{33} \\ \beta_3 = -2\beta_1 \\ \beta_1^2 + 2\beta_1\beta_3 = a_{22} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3\beta_1^2 + a_{22} = 0 \Leftrightarrow a_{22} = -3\beta_1^2 \\ a_{33} = -2\beta_1^3 \\ \beta_1^3 + a_{22}\beta_1 = a_{33} = \beta_1^3 - 3\beta_1^3 = -2\beta_1^3 \end{cases} \Rightarrow \frac{a_{33}^2}{4} = -\frac{a_{22}^3}{27} \Rightarrow 27a_{33}^2 + 4a_{22}^3 = 0 \qquad De\ plus \quad \begin{cases} \beta_1^3 = -\dfrac{a_{33}}{2} \\ \beta_1^2 = -\dfrac{a_{22}}{3} \end{cases} \Rightarrow \beta_1 = \frac{3}{2}\frac{a_{33}}{a_{22}}$$

Le dénominateur de l'exposant σ devient donc nul et l'exposant n'est alors plus défini :

$$\sigma_1 = \frac{6\beta_1^2 + \beta_1 a_{21} - a_{32}}{3\beta_1^2 + a_{22}} = 2 + \frac{\beta_1 a_{21} - a_{32} - 2a_{22}}{3\beta_1^2 + a_{22}}$$

Sauf si le numérateur s'annule soit encore si $6\beta_1^2 + \beta_1 a_{21} - a_{32} = 0$ *Comme* $3\beta_1^2 = -a_{22}$ *cela conduit à une contrainte sur les paramètres :* $-2a_{22} + \beta_1 a_{21} - a_{32} = 0 \Rightarrow \beta_1 = \frac{a_{32} + 2a_{22}}{a_{21}}$ *que l'on vérifie également sur la valeur de σ. En multipliant par* β_1^2*, il vient :* $\beta_1 = \frac{a_{32} + 2a_{22}}{a_{21}} \quad \beta_1^2 = -\frac{a_{22}}{3} \quad \beta_1^3 = -\frac{a_{33}}{2} \quad \beta_1^4 = \frac{a_{22}^2}{9}$.

$$\Rightarrow 6\beta_1^4 + \beta_1^3 a_{21} - a_{32}\beta_1^2 = \frac{2a_{22}^2}{3} - \frac{a_{21}a_{33}}{2} + \frac{a_{22}a_{32}}{3} = 0 \Rightarrow 4a_{22}^2 - 3a_{21}a_{33} + 2a_{22}a_{32} = 0$$

On retrouve cette même relation en considérant : $\beta_1 = \frac{3}{2}\frac{a_{33}}{a_{22}} = \frac{a_{32} + 2a_{22}}{a_{21}} \Rightarrow 3a_{33}a_{21} - 4a_{22}^2 - 2a_{22}a_{32} = 0$.

Dans ces conditions l'équation de la partie régulière de la forme normale avec $\beta=\beta_1$ *et uniquement avec cette valeur :*

$$u^{(3)}(z)-\frac{3\beta}{z^2}u''(z)+\frac{a_{20}z^2+(a_{21}+6\beta)z+a_{22}+3\beta^2}{z^4}u'(z)+\frac{a_{30}z^2+(a_{31}-\beta(6+a_{20}))z+a_{32}-\beta\,a_{21}-6\beta^2}{z^5}u(z)=0$$

Devient en posant :

$$c_{10}=-3\beta=-\frac{9}{2}\frac{a_{33}}{a_{22}}\qquad c_{21}=a_{21}+6\beta=\frac{a_{32}}{\beta}=\frac{2}{3}\frac{a_{22}a_{32}}{a_{33}}\quad c_{31}=a_{31}-\beta(6+a_{20})=a_{31}-\frac{3}{2}\frac{a_{33}}{a_{22}}(6+a_{20})$$
$$\Rightarrow u^{(3)}(z)+\frac{c_{10}}{z^2}u''(z)+\frac{a_{20}z+c_{21}}{z^3}u'(z)+\frac{a_{30}z+c_{31}}{z^4}u(z)=0$$

Pour cette équation différentielle le point z=0 est un point singulier irrégulier mais pour autant il admet des solutions régulières (non essentiel). Et l'équation indicielle provenant de l'injection d'un développement de la forme $u(z)=z^\sigma\times\sum_{l=0}^{l=\infty}c_l z^l$ *est la suivante :* $\sigma(\sigma-1)c_{10}+\sigma\,c_{21}+c_{31}=0$ *. Elle a donc deux racines possibles et deux formes régulières correspondantes, et s'en suivant, deux formes normales.*

La récurrence des coefficients du développement est à deux termes :

$$c_0=1\qquad c_l=-\frac{(l+\sigma-1)(l+\sigma-2)(l+\sigma-3)+(l+\sigma-1)a_{20}+a_{30}}{(l+\sigma)(l+\sigma-1)c_{10}+(l+\sigma)c_{21}+c_{31}}\;c_{l-1}\quad l\geq 1$$

Avec les coefficients c_l,c_{l+1} *la récurrence s'écrit :*

$$\left((l+\sigma)(l+\sigma-1)(l+\sigma-2)+(l+\sigma)a_{20}+a_{30}\right)\;c_l+\left((l+\sigma+1)(l+\sigma)c_{10}+(l+1+\sigma)c_{21}+c_{31}\right)c_{l+1}=0$$
$$\text{Posons}\quad\begin{cases}h_l(\sigma)=(l+\sigma+1)(l+\sigma)c_{10}+(l+1+\sigma)c_{21}+c_{31}\\ g_l(\sigma)=(l+\sigma)(l+\sigma-1)(l+\sigma-2)+(l+\sigma)a_{20}+a_{30}=f_0(l+\sigma)\end{cases}\qquad\Rightarrow g_l(\sigma)c_l+h_l(\sigma)c_{l+1}=0$$

Pour évoquer la question de la correspondance avec les solutions régulières en z=∞, là encore il convient que le développement ci-dessus soit fini, sinon il diverge en théorie. La question de l'arrêt de la récurrence à un indice ϑ *entier se résume à l'annulation d'un des coefficients de la récurrence à savoir :* $g_\vartheta=0\rightarrow g_\vartheta\,c_\vartheta+h_\vartheta\,c_{\vartheta+1}=h_\vartheta\,c_{\vartheta+1}=0\Rightarrow c_{\vartheta+1}=0\rightarrow g_\vartheta(\sigma)=0$ *.*

Soit les deux racines σ_1*,* σ_2 *de l'équation indicielle* $\sigma(\sigma-1)c_{10}+\sigma\,c_{21}+c_{31}=h_{-1}(\sigma)=0$ *avec par hypothèse deux conditions d'arrêt de la récurrence qui sont vérifiées, soit :* $g_{\vartheta_1}(\sigma_1)=f_0(\vartheta_1+\sigma_1)=0\;\;et\;\;g_{\vartheta_2}(\sigma_2)=f_0(\vartheta_2+\sigma_2)=0$

Sous cette hypothèse les relations avec des racines indicielles des solutions régulières (en z=∞) :

$$g_{\vartheta_1}(\sigma_1)=f_0(\vartheta_1+\sigma_1)=0\quad g_{\vartheta_2}(\sigma_2)=f_0(\vartheta_2+\sigma_2)=0\Rightarrow\begin{cases}\sigma_1+\vartheta_1=-\rho_1\\ \sigma_2+\vartheta_2=-\rho_2\end{cases}$$
$$Et\quad g_0(\sigma_1)=f_0(\sigma_1)\neq 0\quad sauf\;si\quad\vartheta_1=0\quad g_0(\sigma_2)=f_0(\sigma_2)\neq 0\quad sauf\;si\quad\vartheta_2=0$$

A ce stade la coexistence de deux formes normales n'est donc pas remis en cause .

Par ailleurs on sait que :

$$\begin{cases} c_{10} = -\dfrac{9}{2}\dfrac{a_{33}}{a_{22}} \qquad c_{21} = \dfrac{2}{3}\dfrac{a_{22}a_{32}}{a_{33}} \\ 27a_{33}{}^2 + 4a_{22}{}^3 = 0 \Rightarrow a_{33}{}^2 = -\dfrac{4}{27}a_{22}{}^3 \end{cases} \Rightarrow \frac{c_{21}}{c_{10}} = -\frac{4}{27}\frac{a_{22}{}^2 a_{32}}{a_{33}{}^2} = \frac{a_{32}}{a_{22}}$$

$$\sigma(\sigma-1)c_{10} + \sigma\, c_{21} + c_{31} = c_{10}(\sigma-\sigma_1)(\sigma-\sigma_2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1\sigma_2 = \dfrac{c_{31}}{c_{10}} \\ \sigma_1 + \sigma_2 = 1 - \dfrac{c_{21}}{c_{10}} = 1 - \dfrac{a_{32}}{a_{22}} \end{cases} \quad \sigma_{1,2} = \frac{c_{10} - c_{21} \pm \sqrt{(c_{21}-c_{10})^2 - 4c_{31}c_{10}}}{2c_{10}} \Rightarrow \sigma_1 - \sigma_2 = \frac{\sqrt{(c_{21}-c_{10})^2 - 4c_{31}c_{10}}}{c_{10}}$$

Voyons maintenant la troisième forme normale liée au deuxième exposant β_3 distinct de $\beta_1 = \beta_2$.
Ici l'exposant : $\sigma_3 = \dfrac{6\beta_3{}^2 + \beta_3\, a_{21} - a_{32}}{3\beta_3{}^2 + a_{22}} = 2 + \dfrac{\beta_3\, a_{21} - a_{32} - 2a_{22}}{3\beta_3{}^2 + a_{22}}$ *est parfaitement défini puisque :* $3\beta_3{}^2 + a_{22} \neq 0$ *. En effet :* $\begin{cases} 3\beta_1{}^2 + a_{22} = 0 \\ 3\beta_3{}^2 + a_{22} = c \end{cases} \Rightarrow 3(\beta_3 - \beta_1)(\beta_1 + \beta_3) = c \neq 0$ *. Supposons maintenant qu'en plus des deux formes normales coexistante, cette troisième forme normale construite avec β_3 et donc σ_3, est possible alors il existe un troisième forme normale qui vérifie la relation :* $g_{\vartheta_3}(\sigma_3) = f_0(\vartheta_3 + \sigma_3) = 0$ *.*

On peut tirer certaines relations concernant cette racine simple. En effet :

$$\begin{cases} 4a_{22}{}^2 = 3a_{21}a_{33} - 2a_{22}a_{32} \\ \beta_1{}^2 = -\dfrac{a_{22}}{3} \quad \beta_1 = \dfrac{3}{2}\dfrac{a_{33}}{a_{22}} \to \dfrac{24\beta_1{}^2 - 2\beta_1\, a_{21} - a_{32}}{12\beta_1{}^2 + a_{22}} = \dfrac{8\,a_{22}{}^2 + 3\,a_{21}a_{33} + a_{22}a_{32}}{3\,a_{22}{}^2} = \dfrac{12\,a_{22}{}^2 + 3a_{22}a_{32}}{3\,a_{22}{}^2} = 4 + \dfrac{a_{32}}{a_{22}} \\ \beta_3 = -2\beta_1 \Rightarrow \sigma_3 = \dfrac{6\beta_3{}^2 + \beta_3\, a_{21} - a_{32}}{3\beta_3{}^2 + a_{22}} = \dfrac{24\beta_1{}^2 - 2\beta_1\, a_{21} - a_{32}}{12\beta_1{}^2 + a_{22}} = 4 + \dfrac{a_{32}}{a_{22}} \\ \Rightarrow \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 1 - \dfrac{a_{32}}{a_{22}} + 4 + \dfrac{a_{32}}{a_{22}} = 5 \end{cases}$$

De même que pour le cas de trois racines simples de β formons la somme des trois racines ρ :

$$\begin{cases} \sigma_1 + \vartheta_1 = -\rho_1 \\ \sigma_2 + \vartheta_2 = -\rho_2 \\ \sigma_3 + \vartheta_3 = -\rho_3 \end{cases} \Rightarrow \sigma_1 + \vartheta_1 + \sigma_2 + \vartheta_2 + \sigma_3 + \vartheta_3 = 3 = \vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 + 1 - \frac{a_{32}}{a_{22}} + 4 + \frac{a_{32}}{a_{22}} = \vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 + 5 \Rightarrow \vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 = -2$$

Ce qui est impossible puisque les trois indices d'arrêt « supposé » de la récurrence sont positifs ou nuls.

Donc là encore sur une racine β_1 double et une racine β_3 distincte et trois racines de σ distinctes provenant de trois racines indicielles ρ distinctes : l'équation différentielle n'admet au plus que la coexistence de deux formes normales.

Par contre si pour les valeurs de ρ parmi les trois quantités $\begin{cases} \sigma_1 + \vartheta_1 = -\rho_1 \\ \sigma_2 + \vartheta_2 = -\rho_2 \\ \sigma_3 + \vartheta_3 = -\rho_3 \end{cases}$ *deux d'entre-elles au moins sont égales la coexistence de trois formes normales est possible. Il en est de même si deux racines de σ sont égales.*

Lorsqu'il y a la coexistence de deux formes normales, alors ces dernières s'écrivent :

$$\begin{cases} y(z)=e^{\frac{\beta_1}{z}}z^{\sigma}\times\sum_{l=0}^{l=\vartheta(\sigma)}c_l z^l \quad Avec \quad c_l=(-1)^l\prod_{j=0}^{j=l-1}\frac{g_j(\sigma)}{h_j(\sigma)} \quad et \quad \sigma=\sigma_1 \quad ou \quad \sigma_2 \quad tel\ que \quad \sigma(\sigma-1)c_{10}+\sigma c_{21}+c_{31}=c_{10}(\sigma-\sigma_1)(\sigma-\sigma_2)=0 \\ Avec \quad \theta \quad tel\ que \quad g_{\vartheta}(\sigma)=f_0(\vartheta+\sigma)=0 \quad \begin{cases} h_l(\sigma)=(l+\sigma+1)(l+\sigma)c_{10}+(l+1+\sigma)c_{21}+c_{31} \\ g_l(\sigma)=(l+\sigma)(l+\sigma-1)(l+\sigma-2)+(l+\sigma)a_{20}+a_{30}=f_0(l+\sigma) \end{cases} \end{cases}$$

Racine indicielle double. *Envisageons maintenant le cas ou les deux racines de l'équation indicielle :* $\sigma(\sigma-1)c_{10}+\sigma c_{21}+c_{31}=0$ *sont identiques.*

Notons alors que : $\sigma_1^{\,2}=\frac{c_{31}}{c_{10}} \quad et \quad 2\sigma_1=1-\frac{a_{32}}{a_{22}} \quad et \quad (c_{21}-c_{10})^2=4c_{31}c_{10}$.

La coexistence des trois formes normales est possible, du fait qu'il n'y a plus de contradiction lorsque l'on additionne les trois racines indicielles ρ car deux d'entre-elles sont identiques :

$$\begin{cases} \begin{cases} \sigma_1=\sigma_2 \\ \vartheta_1=\vartheta_2 \end{cases} \Rightarrow \rho_1=\rho_2 \\ \sigma_3+\vartheta_3=-\rho_3\neq-\rho_1 \end{cases} \quad 2\sigma_1+\sigma_3=5\Rightarrow\sigma_1+\vartheta_1+\sigma_2+\vartheta_2+\sigma_3+\vartheta_3=2\sigma_1+\sigma_3+2\vartheta_1+\vartheta_3=2\vartheta_1+\vartheta_3+5=-2\rho_1-\rho_3\neq 3$$

$$\Rightarrow\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_3+5\Rightarrow 2\vartheta_1+\vartheta_3=-2\rho_1-\rho_3-5$$

Comme les racines de σ sont identiques, la partie régulière de la seconde forme normale doit comporter un terme logarithmique, qui est construit à l'identique de la construction réalisée avec un développement de Fröbenius. La construction se réalise classiquement pour la première forme normale :

$$\begin{cases} y_0(z)=e^{\frac{\beta_1}{z}}z^{\sigma_1}\times\sum_{l=0}^{l=\vartheta(\sigma_1)}c_l(\sigma_1)z^l \quad Avec \quad c_l=(-1)^l\prod_{j=0}^{j=l-1}\frac{g_j(\sigma_1)}{h_j(\sigma_1)} \quad et \quad \sigma_1 \quad racine\ double \quad \sigma(\sigma-1)c_{10}+\sigma c_{21}+c_{31}=c_{10}(\sigma-\sigma_1)^2=0 \\ Avec \quad \theta \quad tel\ que \quad g_{\vartheta}(\sigma)=f_0(\vartheta+\sigma)=0 \quad \begin{cases} h_l(\sigma)=(l+\sigma+1)(l+\sigma)c_{10}+(l+1+\sigma)c_{21}+c_{31} \\ g_l(\sigma)=(l+\sigma)(l+\sigma-1)(l+\sigma-2)+(l+\sigma)a_{20}+a_{30}=f_0(l+\sigma) \end{cases} \end{cases}$$

La seconde solution se construit par dérivée première sur le paramètre σ car il n'y a pas nécessité de « régulariser » la récurrence par un facteur multiplicatif quelconque puisque la racine est unique et de multiplicité double :

$$\begin{cases} y_1(z)=y_0(z)\,Log(z)+w_1(z) \\ w_1(z)=e^{\frac{\beta_1}{z}}z^{\sigma_1}\times\sum_{l=0}^{l=\vartheta(\sigma_1)}z^l\times\left.\frac{\partial c_l(\sigma)}{\partial\sigma}\right|_{\sigma=\sigma_1} \quad \rightarrow\frac{\partial c_l(\sigma)}{\partial\sigma}=(-1)^l\left(\prod_{j=0}^{j=l-1}\frac{g_j(\sigma)}{h_j(\sigma)}\right)\times\sum_{j=0}^{j=l-1}\left(\frac{1}{g_j(\sigma)}\frac{\partial g_j(\sigma)}{\partial\sigma}-\frac{1}{h_j(\sigma)}\frac{\partial h_j(\sigma)}{\partial\sigma}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} y_1(z)=Log(z)\times e^{\frac{\beta_1}{z}}z^{\sigma_1}\times\sum_{l=0}^{l=\vartheta(\sigma_1)}\left\{z^l\times(-1)^l\prod_{j=0}^{j=l-1}\frac{g_j(\sigma_1)}{h_j(\sigma_1)}\right\}+ \\ +e^{\frac{\beta_1}{z}}z^{\sigma_1}\times\sum_{l=0}^{l=\vartheta(\sigma_1)}\left\{z^l\times(-1)^l\times\left(\prod_{j=0}^{j=l-1}\frac{g_j(\sigma_1)}{h_j(\sigma_1)}\right)\times\sum_{j=0}^{j=l-1}\left(\frac{1}{g_j(\sigma_1)}\left.\frac{\partial g_j(\sigma)}{\partial\sigma}\right|_{\sigma=\sigma_1}-\frac{1}{h_j(\sigma_1)}\left.\frac{\partial h_j(\sigma)}{\partial\sigma}\right|_{\sigma=\sigma_1}\right)\right\} \end{cases}$$

étant donné que la racine indicielle β_1 est double alors la troisième racine distincte β_3=-2 β_1 et l'exposant correspondant est :

$$\begin{cases}\sigma_3 = 2 + \dfrac{\beta_3\, a_{21} - a_{32} - 2a_{22}}{3\beta_3^{\,2} + a_{22}} = 2 - \dfrac{2\beta_1\, a_{21} + a_{32} + 2a_{22}}{12\beta_1^{\,2} + a_{22}} \\ Or \quad 2\sigma_1 + \sigma_3 = 5 \Rightarrow \sigma_3 = 5 - 2\sigma_1 \quad et \quad 2\sigma_1 = 1 - \dfrac{a_{32}}{a_{22}} \Rightarrow \sigma_3 = 4 + \dfrac{a_{32}}{a_{22}}\end{cases}$$

La troisième forme normale coexistante est de la forme :

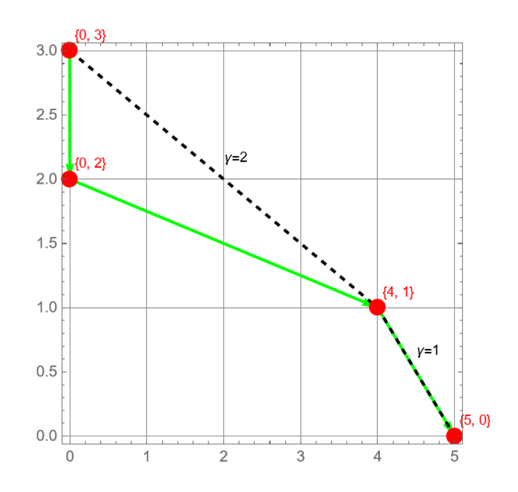
$$\begin{cases} y_2(z) = e^{-\frac{2\beta_1}{z}} z^{\sigma_3} \times \displaystyle\sum_{l=0}^{l=\vartheta(\sigma_3)} c_l(\sigma_3) z^l \quad Avec \quad c_l = (-1)^l \prod_{j=0}^{j=l-1} \frac{g_j(\sigma_3)}{h_j(\sigma_3)} \quad et \quad \sigma_3 = 4 + \frac{a_{32}}{a_{22}} \\ Avec \quad \theta \quad tel\ que \quad g_\vartheta(\sigma) = f_0(\vartheta + \sigma) = 0 \quad \begin{cases} h_l(\sigma) = (l+\sigma+1)(l+\sigma)c_{10} + (l+1+\sigma)c_{21} + c_{31} \\ g_l(\sigma) = (l+\sigma)(l+\sigma-1)(l+\sigma-2) + (l+\sigma)a_{20} + a_{30} = f_0(l+\sigma) \end{cases}\end{cases}$$

<u>Considérons le cas où l'équation de départ du troisième degré est de la forme</u>

$$y^{(3)}(z) + \frac{a_{20}z^2 + a_{21}z + a_{22}}{z^4} y'(z) + \frac{a_{30}z^3 + a_{31}z^2 + a_{32}z + a_{33}}{z^6} y(z) = 0$$

Où a_{33} est nul, soit donc l'équation de départ : $y^{(3)}(z) + \frac{a_{20}z^2 + a_{21}z + a_{22}}{z^4} y'(z) + \frac{a_{30}z^2 + a_{31}z + a_{32}}{z^5} y(z) = 0$

Le point z=0 est toujours un point singulier mais cette fois non essentiel car il admet une solution régulière. Le diagramme de Newton-Puisieux confirme cela d'après sa forme :



Cela conduit à proposer pour la forme normale un terme exponentiel comme suit: $y(z) = e^{\Omega(z)} u(z) \quad \Omega(z) = \frac{\beta}{z}$ *. Le développement en série de l'expression:* $(\Omega'(z))^3 + P_1(z)(\Omega'(z))^2 + P_2(z)(\Omega'(z))^1 + P_3(z)(\Omega'(z))^0$ *autour de z=0 à l'ordre 0 permet de fixer la valeur du paramètres β qui suit une équation polynomiale du troisième degré :* $(\Omega'(z))^3 + P_1(z)(\Omega'(z))^2 + P_2(z)(\Omega'(z))^1 + P_3(z)(\Omega'(z))^0 = -\frac{\beta(\beta^2 + a_{22})}{z^6} + O\left(\frac{1}{z^5}\right) \Rightarrow \beta = 0 \quad ou \quad \beta^2 = -a_{22}$.

En insérant le terme exponentiel $y(z)=e^{\frac{\beta}{z}}u(z) \quad avec \quad \beta^2=-a_{22}$ *l'on obtient une équation différentielle du troisième degré qui possède une solution régulière :*

$$u^{(3)}(z)-\frac{3\beta}{z^2}u''(z)+\frac{a_{20}z^2+(a_{21}+6\beta)z-2a_{22}}{z^4}u'(z)+\frac{a_{30}z^2+(a_{31}-\beta(6+a_{20}))z+a_{32}-\beta\,a_{21}+6\,a_{22}}{z^5}u(z)=0$$

dont l'équation indicielle est la suivante : $\sigma=2+\frac{\beta\,a_{21}-a_{32}-2a_{22}}{3\beta^2+a_{22}}=3+\frac{a_{32}-\beta\,a_{21}}{2a_{22}}$ *. L'injection d'un développement de la forme* $u(z)=z^{\sigma}\sum_{l=0}^{l=+\infty}c_l z^l$ *conduit à une récurrence à 3 termes de la forme :*

$$\begin{cases} c_0=1 \quad c_1=\frac{a_{31}+a_{21}\sigma-\beta\,(a_{20}+3(\sigma-1)(\sigma-2))}{2a_{22}}c_0 \\ c_l=-\frac{(a_{31}+a_{21}(l+\sigma-1)-\beta\,(a_{20}+3(l+\sigma-2)(l+\sigma-3)))c_{l-1}+(a_{30}+a_{20}(l+\sigma-2)+(l+\sigma-2)(l+\sigma-3)(l+\sigma-4))c_{l-2}}{2a_{22}\,l} \end{cases} \quad l\geq 2$$

Avec les coefficients c_l,c_{l+1},c_{l+2} *la récurrence s'écrit :*

$$Posons \begin{cases} k_l=-2a_{22}\,(l+2) \\ h_l=a_{31}-\beta\,a_{20}-6\beta+(a_{21}+6\beta)(l+\sigma+1)-3\beta(l+\sigma)(l+\sigma+1) \\ g_l=a_{30}+a_{20}(l+\sigma)+(l+\sigma)(l+\sigma-1)(l+\sigma-2) \end{cases} \quad c_0=1 \quad c_1=-\frac{a_{31}+a_{21}\sigma-\beta\,(a_{20}+3\,(\sigma-1)(\sigma-2))}{2a_{22}}c_0 \Rightarrow k_l\,c_l+h_l\,c_{l+1}+g_l\,c_{l+2}=0$$

$$Conditions\ d'arrêt\ de\ la\ récurrence \begin{cases} k_{\theta-1}\,c_{\theta-1}+h_{\theta-1}\,c_\theta=0 \\ k_\theta\,c_\theta=0 \end{cases}$$

La somme des deux valeurs d'exposant possibles est égale à : $\sigma_1+\sigma_2=6+\frac{a_{32}}{a_{22}}$

Pour la forme régulière soit avec β=0, en injectant directement le développement de la forme : $y(z)=z^{\sigma}\sum_{l=0}^{l=+\infty}c_l z^l$ *, l'équation indicielle est la suivante :* $\sigma=\sigma_3=-\frac{a_{32}}{a_{22}}$ *. L'injection d'un développement de la forme* $u(z)=z^{\sigma}\sum_{l=0}^{l=+\infty}c_l z^l$ *conduit à une récurrence à 3 termes de la forme :*

$$\begin{cases} c_0=1 \quad c_1=-\frac{a_{31}+a_{21}\sigma}{a_{22}}c_0 \\ c_l=-\frac{(a_{31}+a_{21}(l+\sigma-1))c_{l-1}+(a_{30}+a_{20}(l+\sigma-2)+(l+\sigma-2)(l+\sigma-3)(l+\sigma-4))c_{l-2}}{a_{22}\,l} \end{cases} \quad l\geq 2$$

Avec les coefficients c_l,c_{l+1},c_{l+2} *la récurrence s'écrit :*

$$Posons \begin{cases} k_l=a_{22}\,(l+2) \\ h_l=a_{31}+a_{21}(l+\sigma+1) \\ g_l=a_{30}+a_{20}(l+\sigma)+(l+\sigma)(l+\sigma-1)(l+\sigma-2) \end{cases} \quad c_0=1 \quad c_1=-\frac{a_{31}+a_{21}\sigma}{a_{22}}c_0 \Rightarrow k_l\,c_l+h_l\,c_{l+1}+g_l\,c_{l+2}=0$$

$$Conditions\ d'arrêt\ de\ la\ récurrence \begin{cases} k_{\theta-1}\,c_{\theta-1}+h_{\theta-1}\,c_\theta=0 \\ k_\theta\,c_\theta=0 \end{cases}$$

Peut-on considérer que la coexistence des deux formes normales et de la forme régulière est possible. Comme les trois conditions d'arrêt des récurrences respectives des formes normales et régulière s'appliquent, il n'y a plus de degré de liberté pour les 6 paramètres de l'équation différentielle. Par ailleurs lorsque ces trois formes ne pas sont censés correspondre à trois solutions régulières de racines indicielles ρ différentes car dans ce cas on aboutit à la même contradiction.

$$\begin{cases}\sigma_1+k_1=-\rho_1\\ \sigma_2+k_2=-\rho_2 \Rightarrow \sigma_1+k_1+\sigma_2+k_2+\sigma_3+k_3=3=k_1+k_2+k_3+6 \Rightarrow k_1+k_2+k_3=-3\\ \sigma_3+k_3=-\rho_3\end{cases}$$

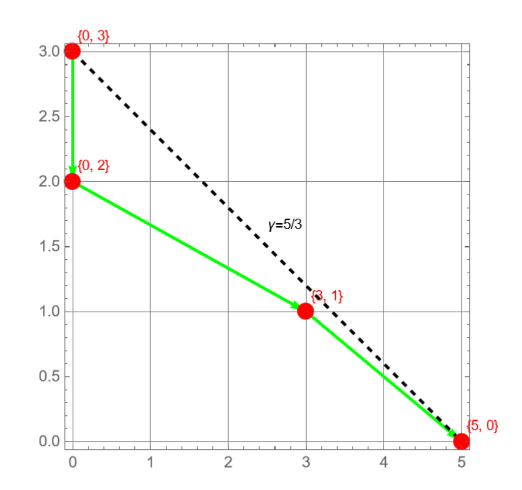
<u>Conclusion sur trois racines β distinctes donc trois valeurs σ distinctes provenant de trois racines indicielles ρ distinctes</u> : l'équation différentielle admet au plus la coexistence de deux formes normales ou d'une forme normale et d'une forme régulière.

<u>Considérons le cas où l'équation de départ du troisième degré est de la forme</u>

$$y^{(3)}(z)+\frac{a_{20}z^2+a_{21}z+a_{22}}{z^4}y'(z)+\frac{a_{30}z^3+a_{31}z^2+a_{32}z+a_{33}}{z^6}y(z)=0$$

Où a_{22} et a_{33} sont nuls, soit donc l'équation de départ : $y^{(3)}(z)+\frac{a_{20}z+a_{21}}{z^3}y'(z)+\frac{a_{30}z^2+a_{31}z+a_{32}}{z^5}y(z)=0$

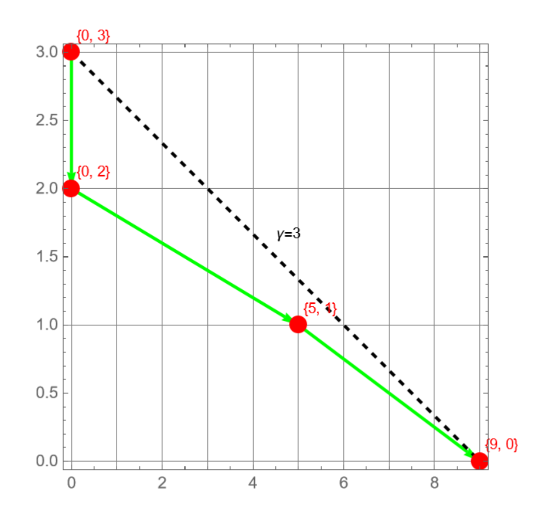
Ce sont les conditions pour lesquelles l'équation indicielle $\beta^3+a_{22}\beta-a_{33}=0$ *n'aboutit qu'à la solution triviale* $\beta=0$ *pour laquelle il ne s'agit plus d'une forme normale. Dans ce cas pour l'équation résultante* $y^{(3)}(z)+\frac{a_{20}z+a_{21}}{z^3}y'(z)+\frac{a_{30}z^2+a_{31}z+a_{32}}{z^5}y(z)=0$ *, le diagramme de Newton-Puisieux est le suivant :*



Cela indique qu'il s'agit de construire une forme subnormale. Pour revenir à des termes exponentiels en puissance entière de z, on réalise le changement de variable $\zeta=z^{1/3}\quad puis\quad \zeta\to z$ *et de fonction :* $y(\zeta)=\zeta^2u(\zeta)\quad puis\quad \zeta\to z\quad et\quad u(z)\to y(z)$ *et l'équation différentielle s'écrit :*

$$y^{(3)}(z)+\left(\frac{9a_{20}-8}{z^2}+\frac{9a_{21}}{z^5}\right)y'(z)+\left(\frac{27a_{30}+18\,a_{20}+8}{z^3}+9\frac{3a_{31}+2\,a_{21}}{z^6}+\frac{27\,a_{32}}{z^9}\right)y(z)=0$$

Le diagramme de Newton-Puisieux est le suivant :



Cela conduit à proposer pour la forme normale un terme exponentiel comme suit : $y(z)=e^{\Omega(z)}u(z)\quad \Omega'(z)=\frac{\beta_1}{z^2}+\frac{\beta_2}{z^3}\rightarrow\Omega(z)=-\frac{\beta_1}{z}-\frac{\beta_2}{2z^2}$ *. Le développement en série de l'expression:* $(\Omega'(z))^3+P_1(z)(\Omega'(z))^2+P_2(z)(\Omega'(z))^1+P_3(z)(\Omega'(z))^0$ *autour de z=0 à l'ordre 0 permet de fixer la valeur des paramètres β1 et β2 qui suit un système de deux équations polynomiales du troisième degré :*

$$(\Omega'(z))^3+P_1(z)(\Omega'(z))^2+P_2(z)(\Omega'(z))^1+P_3(z)(\Omega'(z))^0=\frac{\beta_2^{\ 3}+27a_{32}}{z^9}+\frac{3\beta_2(\beta_1\beta_2+3a_{21})}{z^8}+O\left(\frac{1}{z^7}\right)$$

$$\Rightarrow\beta_2^{\ 3}=-27a_{32}\quad\beta_1=-\frac{3a_{21}}{\beta_2}=-\frac{a_{21}\beta_2^{\ 2}}{9a_{32}}\rightarrow\beta_1^{\ 3}=-\frac{27a_{21}^{\ \ 3}}{\beta_2^{\ 3}}=\frac{a_{21}^{\ \ 3}}{a_{32}}\quad et\quad 3\beta_1^{\ 2}-9\beta_2=-\beta_2\left(9+\frac{a_{21}^{\ \ 2}}{a_{32}}\right)$$

En insérant le terme exponentiel $y(z)=e^{-\frac{\beta_1}{z}-\frac{\beta_2}{2z^2}}u(z)$ *avec* $\beta_2^{\ 3}=-27a_{32}$ *et* $\beta_1=-\frac{a_{21}\beta_2^{\ 2}}{9a_{32}}$ *l'on obtient une équation différentielle du troisième degré qui possède une solution régulière :*

$$u^{(3)}(z)+\frac{3(\beta_1 z+\beta_2)}{z^3}u''(z)+\frac{3\beta_2^{\ 2}-9a_{21}z+3\left(\beta_1^{\ 2}-3\beta_2\right)z^2-6\beta_1 z^3+(9a_{20}-8)z^4}{z^6}u'(z)+$$
$$+\frac{-9\beta_2^{\ 2}+\left(63a_{21}+27a_{31}+\beta_1^{\ 3}\right)z+3\left(\beta_2(9a_{20}+4)-6\beta_1^{\ 2}\right)z^2+\beta_1(9a_{20}-2)z^3+(27a_{30}+18a_{20}+8)z^4}{z^7}u(z)=0$$

dont l'équation indicielle est la suivante : $\sigma=3$ *. L'injection d'un développement de la forme* $u(z)=z^\sigma\sum_{l=0}^{l=+\infty}c_l z^l$ *conduit à une récurrence à 5 termes de la forme :*

$$\begin{cases}c_{-l}=0\quad l>0\quad c_0=1\qquad e_l c_l+g_l c_{l+1}+h_l c_{l+2}+k_l c_{l+3}+o_l c_{l+4}=0\\ e_l=(l+1)(l+2)(l+3)+(9a_{20}-8)(l+3)+27a_{30}+18a_{20}+8=(l-1)(l+2)(l+5)+9a_{20}(l+5)+27a_{30}\\ g_l=\beta_1\left(9a_{20}+\left(10+15\,l+3\,l^2\right)\right)=3\beta_1(l+3)(l+4)-6\beta_1(l+4)+\beta_1(9a_{20}-2)=-\frac{a_{21}\beta_2^{\ 2}}{9a_{32}}\left(9a_{20}+\left(10+15\,l+3\,l^2\right)\right)\\ h_l=3(3+l)\beta_1^{\ 2}+\beta_2\left(19+18\,l+3\,l^2\right)+9\beta_2 a_{20}=3\beta_2(l+4)(l+5)+\left(3\beta_1^{\ 2}-9\beta_2\right)(l+5)+\beta_2(9a_{20}+4)-6\,\beta_1^{\ 2}=\beta_2\left(3l^2+18l+19+9a_{20}-\frac{a_{21}^{\ \ 2}}{a_{32}}(l+3)\right)\\ k_l=\beta_1^{\ 3}+27a_{31}-9(l-1)a_{21}=\frac{a_{21}^{\ \ 3}}{a_{32}}+27a_{31}-9(l-1)a_{21}\\ o_l=3(l+4)\beta_2^{\ 2}\end{cases}$$

Cette récurrence peut s'exprimer sous une forme légèrement différente qui est indépendante de ma valeur de la racine de β_2 :

$$u(z)=z^{\sigma}\sum_{l=0}^{l=+\infty}\frac{\widetilde{c}_l}{\beta_2^{2l}}z^l \qquad e_l\widetilde{c}_l+\frac{g_l}{\beta_2^{2}}\widetilde{c}_{l+1}+\frac{h_l}{\beta_2^{4}}\widetilde{c}_{l+2}+\frac{k_l}{\beta_2^{6}}\widetilde{c}_{l+3}+\frac{o_l}{\beta_2^{8}}\widetilde{c}_{l+4}=0 \Leftrightarrow \widetilde{f}_l\widetilde{c}_l+\widetilde{g}_l\widetilde{c}_{l+1}+\widetilde{h}_l\widetilde{c}_{l+2}+\widetilde{k}_l\widetilde{c}_{l+3}+\widetilde{o}_l\widetilde{c}_{l+4}=0$$

$$\begin{cases}\widetilde{c}_{-l}=0 \quad l>0 \quad \widetilde{c}_0=1\\ e_l=\widetilde{e}_l=(l+1)(l+2)(l+3)+(9a_{20}-8)(l+3)+27a_{30}+18a_{20}+8=(l-1)(l+2)(l+5)+9a_{20}(l+5)+27a_{30}\\ \dfrac{g_l}{\beta_2^{2}}=\widetilde{g}_l=-\dfrac{a_{21}}{9a_{32}}\left(9a_{20}+10+15\,l+3\,l^2\right)\\ \dfrac{h_l}{\beta_2^{4}}=\widetilde{h}_l=-\dfrac{1}{27a_{32}}\left(3l^2+18l+19+9a_{20}-\dfrac{a_{21}^{\ 2}}{a_{32}}(l+3)\right)\\ \dfrac{k_l}{\beta_2^{6}}=\widetilde{k}_l=\dfrac{1}{729\,a_{32}^{\ 2}}\left(\dfrac{a_{21}^{\ 3}}{a_{32}}+27a_{31}-9(l-1)a_{21}\right)\\ \dfrac{o_l}{\beta_2^{8}}=\widetilde{o}_l=\dfrac{l+4}{243\,a_{32}^{\ 2}}\end{cases}$$

Pour simplifier je reviens aux notations privées de « tilde », par la substitution :

$$\widetilde{c}_l\to c_l \quad \widetilde{e}_l\to e_l \quad \widetilde{g}_l\to g_l \quad \widetilde{h}_l\to h_l \quad \widetilde{k}_l\to k_l \quad \widetilde{o}_l\to o_l$$

Comme en général cette récurrence diverge, une condition pour que la forme subnormale existe est que cette récurrence soit finie. Imaginons que la récurrence s'arrête à l'indice entier ϑ, alors la forme subnormale s'écrit :

$$y(z)=e^{-\frac{\beta_1}{z^{1/3}}-\frac{\beta_2}{2z^{2/3}}}\times z^{5/3}\times\sum_{l=0}^{l=\vartheta}\frac{c_l}{\beta_2^{2l}}z^{l/3} \quad avec \quad \beta_2^{\ 3}=-27a_{32} \quad et \quad \beta_1=-\frac{a_{21}\beta_2^{\ 2}}{9a_{32}}$$

Et les conditions d'arrêt de la récurrence s'expriment par quatre conditions cumulatives qui corresponde à l'annulation successive de 4 coefficients consécutifs conduisant à l'annulation du cinquième. Cela se traduit par les relations suivantes :

$$\begin{cases}c_{\vartheta+4}=0\to e_\vartheta c_\vartheta=0\Leftrightarrow e_\vartheta=0\\ c_{\vartheta+3}=0\to e_{\vartheta-1}c_{\vartheta-1}+g_{\vartheta-1}c_\vartheta=0\\ c_{\vartheta+2}=0\to e_{\vartheta-2}c_{\vartheta-2}+g_{\vartheta-2}c_{\vartheta-1}+h_{\vartheta-2}c_\vartheta=0\\ c_{\vartheta+1}=0\to e_{\vartheta-3}c_{\vartheta-3}+g_{\vartheta-3}c_{\vartheta-2}+h_{\vartheta-3}c_{\vartheta-1}+k_{\vartheta-3}c_\vartheta=0\end{cases}$$

Si ces quatre conditions d'arrêt sont vérifiées pour une racine de β_2, elles le sont automatiquement pour les deux autres puisque maintenant la récurrence est indépendante de la valeur de β_2. Dès lors la coexistence des trois formes subnormales est admise. De plus en réécrivant la première condition d'arrêt sous la forme suivante :

$$e_\vartheta=(\vartheta+5)(\vartheta+2)(\vartheta-1)+9a_{20}(\vartheta+5)+27a_{30}=27\,f_0\left(\frac{\vartheta+5}{3}\right)=0 \quad avec \quad f_0(\rho)=\rho(\rho-1)(\rho-2)+a_{20}\rho+a_{30}$$

On retrouve la relation $\frac{\sigma+k}{p}=-\rho \quad où \quad p=3$ *entre la racine indicielle de la solution régulière en z=+∞ et l'exposant σ=3 de la forme subnormale. L'indice k est donc :* $\vartheta+5=\sigma+k \Rightarrow k=\vartheta+2$ *et il est unique ce qui garantit la continuation analytique entre les trois formes subnormales coexistantes en z=0 avec une unique forme régulière en z=+∞ liée à une seule racine indicielle ρ.*

<u>Considérons maintenant l'équation du troisième degré suivante</u>

$$y^{(3)}(z)+\frac{a_{20}z+a_{21}}{z^3}y'(z)+\frac{a_{30}z+a_{31}}{z^4}y(z)=0$$

C'est une équation différentielle que l'on a déjà pratiquement rencontrée lors de l'étude de la partie régulière avec une racine double de l'exposant de la forme normale:

$$y^{(3)}(z)+\frac{c_{10}}{z^2}y''(z)+\frac{a_{20}z+c_{21}}{z^3}y'(z)+\frac{a_{30}z+c_{31}}{z^4}y(z)=0 \rightarrow c_{10}=0$$

Cette équation $y^{(3)}(z)+\frac{a_{20}z+a_{21}}{z^3}y'(z)+\frac{a_{30}z+a_{31}}{z^4}y(z)=0$ *est régulière au point z=+∞, et l'équation indicielle est toujours la même :* $f_0(-\rho)=\rho(\rho+1)(\rho+2)+\rho\, a_{20}-a_{30}=0$ *. Pour cette équation différentielle le point z=0 est un point singulier irrégulier mais pour autant il admet une seule solution régulière (c'est donc un point singulier irrégulier non essentiel). Et l'équation indicielle de cette forme régulière provenant de l'injection d'un développement de la forme* $y(z)=z^{\sigma}\times\sum_{l=0}^{l=\infty}c_l z^l$ *est la suivante :* $\sigma=-\frac{a_{31}}{a_{21}}$ *.*
La récurrence des coefficients du développement de la solution régulière est à deux termes :

$$c_0=1 \qquad c_l=-\frac{(l+\sigma-1)(l+\sigma-2)(l+\sigma-3)+(l+\sigma-1)a_{20}+a_{30}}{a_{21}l}\,c_{l-1} \quad l\geq 1$$

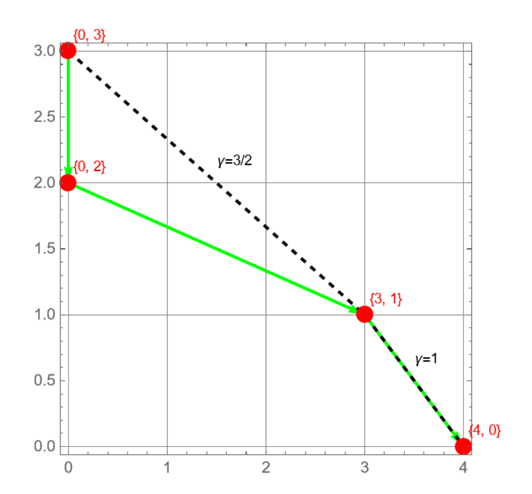
La condition d'arrêt de cette récurrence à l'indice entier ϑ_1 *se résume à la relation entre les 4 paramètres de l'équation différentielle :*

$$f_0(\vartheta_1+\sigma)=(\vartheta_1+\sigma)(\vartheta_1+\sigma-1)(\vartheta_1+\sigma-2)+(\vartheta_1+\sigma)a_{20}+a_{30}=0 \Leftrightarrow \left(\vartheta_1-\frac{a_{31}}{a_{21}}\right)\left(\vartheta_1-\frac{a_{31}}{a_{21}}-1\right)\left(\vartheta_1-\frac{a_{31}}{a_{21}}-2\right)+\left(\vartheta_1-\frac{a_{31}}{a_{21}}\right)a_{20}+a_{30}=0$$

$$\Leftrightarrow a_{30}=\left(\frac{a_{31}}{a_{21}}-\vartheta_1\right)\left(\frac{a_{31}}{a_{21}}+1-\vartheta_1\right)\left(\frac{a_{31}}{a_{21}}+2-\vartheta_1\right)+\left(\frac{a_{31}}{a_{21}}-\vartheta_1\right)a_{20} \rightarrow y(z)=z^{\sigma}\times\sum_{l=0}^{l=\vartheta_1}c_l z^l$$

Pour cette même solution régulière si $a_{31}=0\rightarrow\sigma=0$ *, et la récurrence et sa condition d'arrêt s'écrivent :* $c_0=1 \quad c_l=-\frac{(l-1)(l-2)(l-3)+(l-1)a_{20}+a_{30}}{a_{21}l}c_{l-1} \quad l\geq 1 \qquad y(z)=\sum_{l=0}^{l=\vartheta_1}c_l z^l \rightarrow a_{30}=-\vartheta_1(\vartheta_1-1)(\vartheta_1-2)-\vartheta_1 a_{20}$ *. La condition d'arrêt s'écrit bien sous la forme :* $(\vartheta_1+\sigma)(\vartheta_1+\sigma-1)(\vartheta_1+\sigma-2)+(\vartheta_1+\sigma)a_{20}+a_{30}=f_0(\vartheta_1+\sigma)=0$ *. On retrouve la relation* $\sigma+k_1=-\rho_1$ *entre l'une des racines indicielles* ρ_1 *de la solution régulière en z=+∞ et l'exposant* $\sigma=-\frac{a_{31}}{a_{21}}$ *de la forme subnormale, avec* $k_1=\vartheta_1$ *. L'indice* k_1 *est unique ce qui garantit la continuation analytique entre la forme régulière en z=0 avec une unique forme régulière en z=+∞ liée à la seule racine indicielle* ρ_1 *.*

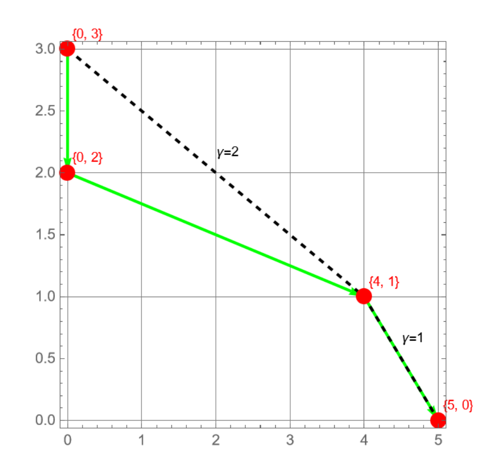
Le diagramme de Newton-Puisieux de l'équation différentielle confirme la présence d'une forme régulière et également d'une forme subnormale :



Pour revenir à des exposants entiers on réalise alors le changement de variable $\zeta = z^{1/2} \quad puis \quad \zeta \to z$ *et de fonction :* $y(\zeta) = \zeta\, u(\zeta)$ *et l'équation différentielle s'écrit :*

$$u^{(3)}(z) + \left(\frac{4a_{20} - 3}{z^2} + \frac{9a_{21}}{z^4}\right) y'(z) + \left(\frac{8\,a_{30} + 4\,a_{20} + 3}{z^3} + 4\,\frac{a_{21} + 2\,a_{31}}{z^5}\right) y(z) = 0$$

Le diagramme de Newton-Puisieux de cette équation différentielle est le suivant, où l'on retrouve toujours la présence d'une forme régulière :



Cela conduit à proposer un terme exponentiel comme suit: $y(z) = e^{\Omega(z)} u(z) \quad \Omega'(z) = \frac{\beta}{z^2} \to \Omega(z) = -\frac{\beta}{z}$ *. Le développement en série de l'expression:* $(\Omega'(z))^3 + P_1(z)(\Omega'(z))^2 + P_2(z)(\Omega'(z))^1 + P_3(z)(\Omega'(z))^0$ *autour de z=0 à l'ordre 0 permet de fixer la valeur du paramètre β qui suit une équation polynomiale du troisième degré :*

$$(\Omega'(z))^3 + P_1(z)(\Omega'(z))^2 + P_2(z)(\Omega'(z))^1 + P_3(z)(\Omega'(z))^0 = \frac{\beta\left(\beta^2 + 4\,a_{21}\right)}{z^6} + O\left(\frac{1}{z^5}\right) \Rightarrow \beta^2 = -4a_{21}$$

En insérant le terme exponentiel $y(z)=e^{-\frac{\beta}{z}}u(z) \quad avec \quad \beta^2=-4a_{21}$ *l'on obtient une équation différentielle du troisième degré qui possède une solution régulière :*

$$u^{(3)}(z)+\frac{3\beta}{z^2}u''(z)+\left(\frac{4a_{20}-3}{z^2}-\frac{6\beta}{z^3}-\frac{8a_{21}}{z^6}\right)u'(z)+\left(\frac{3+4a_{20}+8a_{30}}{z^3}+\beta\frac{4a_{20}+3}{z^4}+\frac{28a_{21}+8a_{31}}{z^5}\right)u(z)=0$$

dont l'équation indicielle est la suivante : $\sigma=\frac{7}{2}+\frac{a_{31}}{a_{21}}$ *. L'injection d'un développement de la forme* $u(z)=z^{\sigma}\sum_{l=0}^{l=+\infty}\frac{c_l}{\beta^l}z^l$ *conduit à une récurrence à 3 termes indépendante de la valeur de la racine de β : de la forme :*

$$\begin{cases} c_{-l}=0 \quad l>0 \quad c_0=1 \qquad e_lc_l+g_lc_{l+1}+h_lc_{l+2}=0 \\ e_l=(l+\sigma+1)(l+\sigma-1)(l+\sigma-3)+4a_{20}(l+\sigma+1)+8a_{30}=8f_0\left(\frac{l+\sigma+1}{2}\right) \\ g_l=4a_{20}+3\left((l+\sigma+1)(l+\sigma-1)-(l+\sigma)\right) \\ h_l=\frac{8a_{31}-4a_{21}(2l+2\sigma-7)}{\beta^2}=2l \end{cases}$$

Les deux conditions d'arrêt de cette récurrence à l'indice ϑ_2 *s'écrivent :* $\begin{cases} e_{\vartheta_2}\,c_{\vartheta_2}=0 \Leftrightarrow e_{\vartheta_2}=0 \\ e_{\vartheta_2-1}\,c_{\vartheta_2-1}+g_{\vartheta_2-1}\,c_{\vartheta_2}=0 \end{cases}$ *. De plus on peut réécrire la première condition d'arrêt sous la forme suivante :*

$$e_{\vartheta}=(\vartheta+\sigma+1)(\vartheta+\sigma-1)(\vartheta+\sigma-3)+4a_{20}(\vartheta+\sigma+1)+8a_{30}=8f_0\left(\frac{\vartheta+\sigma+1}{2}\right)=0 \quad avec \quad f_0(\rho)=\rho(\rho-1)(\rho-2)+a_{20}\rho+a_{30}$$

On retrouve la relation $\frac{\sigma+k_2}{p}=-\rho \quad où \quad p=2$ *entre la racine indicielle de la solution régulière en z=+∞*

et l'exposant $\sigma=\frac{7}{2}+\frac{a_{31}}{a_{21}}$ *de la forme subnormale, avec* $k_2=\vartheta_2+1$ *. L'indice* k_2 *est unique ce qui garantit la continuation analytique entre les deux formes subnormales coexistantes en z=0 avec une unique forme régulière en z=+∞ liée à une seule racine indicielle* $\rho=\rho_2$*.*

Les deux formes subnormales s'écrivent :

$$\begin{cases} y_2(z)=e^{-\frac{\beta}{\sqrt{z}}}\times z^{\frac{9}{4}+\frac{a_{31}}{2a_{21}}}\times\sum_{l=0}^{l=\vartheta_2}\frac{c_l}{\beta^{l/2}}z^{l/2} \quad avec \quad \beta^2=-4a_{21} \qquad \sigma=\frac{7}{2}+\frac{a_{31}}{a_{21}} \\ Récurrence \quad \begin{cases} c_{-l}=0 \quad l>0 \quad c_0=1 \qquad e_lc_l+g_lc_{l+1}+h_lc_{l+2}=0 \\ e_l=(l+\sigma+1)(l+\sigma-1)(l+\sigma-3)+4a_{20}(l+\sigma+1)+8a_{30}=8f_0\left(\frac{l+\sigma+1}{2}\right) \\ g_l=4a_{20}+3\left((l+\sigma+1)(l+\sigma-1)-(l+\sigma)\right) \\ h_l=2l \end{cases} \\ Conditions\ d'arrêt\ de\ la\ récurrence \quad \begin{cases} e_{\vartheta_2}\,c_{\vartheta_2}=0 \Leftrightarrow e_{\vartheta_2}=0 \\ e_{\vartheta_2-1}\,c_{\vartheta_2-1}+g_{\vartheta_2-1}\,c_{\vartheta_2}=0 \end{cases} \end{cases}$$

La forme régulière s'écrit :

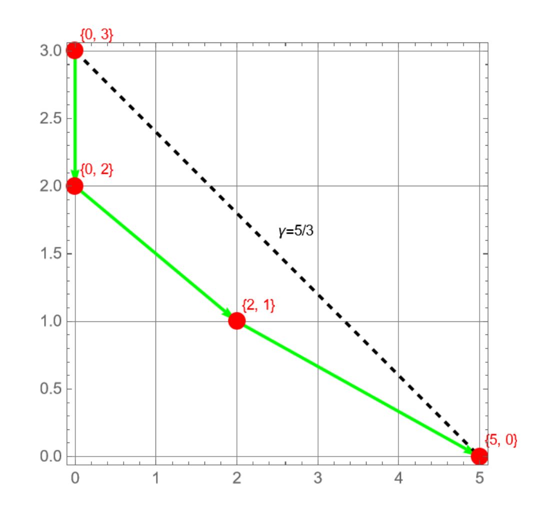
$$\begin{cases} y_1(z) = z^{-\frac{a_{31}}{a_{21}}} \times \sum_{l=0}^{l=\vartheta_1} c_l z^l \quad avec \quad \sigma = -\frac{a_{31}}{a_{21}} \\ Récurrence \quad c_0 = 1 \qquad c_l = -\frac{(l+\sigma-1)(l+\sigma-2)(l+\sigma-3)+(l+\sigma-1)\,a_{20}+a_{30}}{a_{21}l}\, c_{l-1} \quad l \geq 1 \\ Conditions\ d'arrêt\ de\ la\ récurrence \quad (\vartheta_1+\sigma)(\vartheta_1+\sigma-1)(\vartheta_1+\sigma-2)+(\vartheta_1+\sigma)\,a_{20}+a_{30} = f_0(\vartheta_1+\sigma) = 0 \end{cases}$$

A priori la coexistence des deux formes subnormales et de la forme régulière en z=0 est possible, les deux premières sont en continuation analytique avec une forme régulière en z=∞ unique, et la forme régulière en z=0 l'est avec une autre solution régulière en z=∞ de racine indicielle différente.

Dernière équation du troisième degré lorsque $a_{21}=a_{31}=0$ mais a_{32} est non nul

Soit donc l'équation différentielle du troisième degré : $y^{(3)}(z)+\frac{a_{20}}{z^2}y'(z)+\frac{a_{30}z^2+a_{32}}{z^5}y(z)=0$

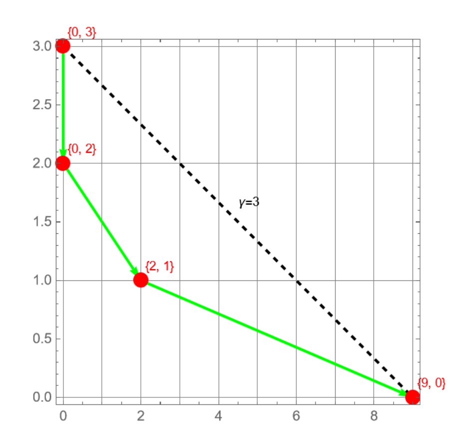
Cette équation est régulière au point z=+∞, et l'équation indicielle est toujours la même : $f_0(-\rho)=\rho(\rho+1)(\rho+2)+\rho\,a_{20}-a_{30}=0$ *. Pour cette équation différentielle le point z=0 est un point singulier essentiel. Le diagramme de Newton-Puisieux est le suivant :*



Cela indique qu'il s'agit de construire une forme subnormale. Pour revenir à des exposants entier on réalise alors le changement de variable $\zeta = z^{1/3} \quad puis \quad \zeta \to z$ *et de fonction :* $y(\zeta)=\zeta^2 u(\zeta)$ *et l'équation différentielle s'écrit :*

$$u^{(3)}(z)+\left(\frac{9a_{20}-8}{z^2}+\frac{9a_{21}}{z^5}\right)y'(z)+\left(\frac{27a_{30}+18\,a_{20}+8}{z^3}+\frac{27\,a_{32}}{z^9}\right)y(z)=0$$

Le diagramme de Newton-Puisieux est le suivant :



Cela conduit à proposer pour la forme normale un terme exponentiel comme suit: $y(z)=e^{\Omega(z)}u(z)\quad \Omega(z)=\frac{\beta_1}{z}+\frac{\beta_2}{z^2}\rightarrow \Omega'(z)=-\frac{\beta_1}{z^2}-2\frac{\beta_2}{z^3}$. *Le développement en série de l'expression:* $(\Omega'(z))^3+P_1(z)(\Omega'(z))^2+P_2(z)(\Omega'(z))^1+P_3(z)(\Omega'(z))^0$ *autour de z=0 à l'ordre 0 permet de fixer la valeur des paramètres β_1 et β_2 qui suit une équation polynomiale du troisième degré :*

$$(\Omega'(z))^3+P_1(z)(\Omega'(z))^2+P_2(z)(\Omega'(z))^1+P_3(z)(\Omega'(z))^0=\frac{\beta_2{}^3-27a_{32}}{z^9}-\frac{12\beta_1\beta_2{}^2}{z^8}+O\left(\frac{1}{z^7}\right)\Rightarrow \beta_2{}^3=\frac{27}{8}a_{32}\quad \beta_1=0$$

En insérant le terme exponentiel $y(z)=e^{\frac{\beta_2}{z^2}}u(z)$ *avec* $\beta_2{}^3=\frac{27}{8}a_{32}$ *l'on obtient une équation différentielle du troisième degré qui possède une solution régulière :*

$$u^{(3)}(z)-\frac{6\,\beta_2}{z^3}u''(z)+\frac{12\beta_2{}^2+18\beta_2{}^2z^2+(9a_{20}-8)z^4}{z^6}u'(z)+\frac{-36\beta_2{}^2-2\beta_2\,(9a_{20}+4)z^2+(27a_{30}+18\,a_{20}+8)z^4}{z^7}u(z)=0$$

dont l'équation indicielle est la suivante : $\sigma=3$ *. L'injection d'un développement de la forme* $u(z)=z^{\sigma}\sum_{l=0}^{l=+\infty}\frac{c_l}{\beta_2^{\frac{l}{2}}}z^l$ *conduit à une récurrence à 3 termes par pas de deux de la forme :*

$$\begin{cases} c_{-l}=0 \quad l>0 \quad c_0=1 \qquad e_lc_l+h_lc_{l+2}+o_lc_{l+4}=0 \\ e_l=(l-1)(l+2)(l+5)+9a_{20}(l+5)+27a_{30} \\ h_l=-2\,(19+18\,l+3\,l^2+9a_{20}) \\ o_l=12\,(l+4) \end{cases}$$

Cette récurrence peut alors se réécrire :

$$u(z)=z^3\sum_{l=0}^{l=+\infty}\frac{c_l}{\beta_2^{\frac{l}{2}}}z^l\Rightarrow u(z)=z^3\sum_{l=0}^{l=+\infty}\frac{c_l}{\beta_2{}^l}z^{2l}\qquad \begin{cases} c_{-l}=0 \quad l>0 \quad c_0=1 \qquad e_lc_l+h_lc_{l+1}+o_lc_{l+2}=0 \\ e_l=(2l-1)(2l+2)(2l+5)+9a_{20}(2l+5)+27a_{30} \\ h_l=-2\,(19+36\,l+12\,l^2+9a_{20}) \\ o_l=24\,(l+2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_{-l}=0 \quad l>0 \quad c_0=1 \quad c_1=\frac{9a_{20}-5}{12} \\ c_l=\frac{2\,(9a_{20}-5-12\,l+12\,l^2)c_{l-1}-((2l-5)(2l-2)(2l+1)+9a_{20}(2l+1)+27a_{30})c_{l-2}}{24\,l} \end{cases}$$

Les deux conditions d'arrêt de cette récurrence à l'indice ϑ sont les suivantes : $\begin{cases} e_\vartheta = 0 \\ e_{\vartheta-1}\, c_{\vartheta-1} + h_{\vartheta-1}\, c_\vartheta = 0 \end{cases}$

Pour les premières valeurs de ϑ, il vient alors par la résolution du système d'équations sur les deux paramètres a_{20}, a_{30}, leurs valeurs et les formes normales résultantes :

$$\begin{cases} e_l = (2l-1)(2l+2)(2l+5) + 9a_{20}(2l+5) + 27a_{30} \\ h_l = -2\left(19 + 36\,l + 12\,l^2 + 9a_{20}\right) \\ o_l = 24\,(l+2) \end{cases} \quad \begin{cases} e_l c_l + h_l c_{l+1} + o_l c_{l+2} = 0 \\ \text{Conditions d'arrêt de la récurrence} \quad \begin{cases} e_\vartheta = 0 \\ e_{\vartheta-1}\, c_{\vartheta-1} + h_{\vartheta-1}\, c_\vartheta = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$y(z) = z^{5/3}\, e^{\beta_2 z^{-2/3}} \times \sum_{l=0}^{l=+\infty} \frac{c_l}{\beta_2^{\,l}} z^{\frac{2l}{3}} \quad avec \quad \beta_2^{\,3} = \frac{27}{8} a_{32}$$

$$\vartheta = 0 \Rightarrow \begin{cases} a_{20} = \frac{5}{9} \\ a_{30} = -\frac{5}{9} \end{cases} \Rightarrow y^{(3)}(z) + \frac{5}{9\,z^2}\, y'(z) + \frac{9a_{32} - 5\,z^2}{9z^5}\, y(z) = 0 \quad et \quad y(z) = z^{5/3}\, e^{\beta_2 z^{-2/3}}$$

$$\vartheta = 1 \Rightarrow \begin{cases} a_{20} = -\frac{19}{9} \\ a_{30} = \frac{35}{9} \end{cases} \Rightarrow y^{(3)}(z) - \frac{19}{9\,z^2}\, y'(z) + \frac{9a_{32} + 35\,z^2}{9z^5}\, y(z) = 0 \quad et \quad y(z) = z^{5/3}\, e^{\beta_2 z^{-2/3}} \left(1 - \frac{2}{\beta_2} z^{2/3}\right)$$

$$\vartheta = 2 \Rightarrow \begin{cases} a_{20} = -\frac{67}{9} \\ a_{30} = \frac{49}{3} \end{cases} \Rightarrow y^{(3)}(z) - \frac{67}{9\,z^2}\, y'(z) + \frac{3a_{32} + 49\,z^2}{3z^5}\, y(z) = 0 \quad et \quad y(z) = z^{5/3}\, e^{\beta_2 z^{-2/3}} \left(1 - \frac{6}{\beta_2} z^{2/3} + \frac{10}{\beta_2^{\,2}} z^{4/3}\right)$$

$$\vartheta = 3 \Rightarrow \begin{cases} a_{20} = -\frac{139}{9} \\ a_{30} = \frac{121}{3} \end{cases} \Rightarrow y^{(3)}(z) - \frac{139}{9\,z^2}\, y'(z) + \frac{3a_{32} + 121\,z^2}{3z^5}\, y(z) = 0 \quad et \quad y(z) = z^{5/3}\, e^{\beta_2 z^{-2/3}} \left(1 - \frac{12}{\beta_2} z^{2/3} + \frac{52}{\beta_2^{\,2}} z^{4/3} - \frac{80}{\beta_2^{\,3}} z^{6/3}\right)$$

$$\vartheta = 4 \Rightarrow \begin{cases} a_{20} = -\frac{235}{9} \\ a_{30} = \frac{715}{3} \end{cases} \Rightarrow y^{(3)}(z) - \frac{235}{9\,z^2}\, y'(z) + \frac{9a_{32} + 715\,z^2}{9z^5}\, y(z) = 0 \quad et \quad y(z) = z^{5/3}\, e^{\beta_2 z^{-2/3}} \left(1 - \frac{20}{\beta_2} z^{2/3} + \frac{160}{\beta_2^{\,2}} z^{4/3} - \frac{600}{\beta_2^{\,3}} z^{6/3} + \frac{880}{\beta_2^{\,4}} z^{8/3}\right)$$

Exemple : équation différentielle du troisième degré, A.R.Forsythe, Chapitre 98, exercice n°1 page 309

Soit l'équation différentielle du troisième degré suivante :

$$y^{(3)}(z)+\frac{1}{z^6}\times\left(\sum_{l=0}^{l=4}a_{2,l}z^l\right)\times y'(z)+\frac{1}{z^9}\times\left(\sum_{l=0}^{l=6}a_{3,l}z^l\right)\times y(z)=0$$

Sous une forme « moins condensée » cela donne

$$y^{(3)}(z)+\frac{a_{20}+a_{21}z+a_{22}z^2+a_{23}z^3+a_{24}z^4}{z^6}y'(z)+\frac{a_{30}+a_{31}z+a_{32}z^2+a_{33}z^3+a_{34}z^4+a_{35}z^5+a_{36}z^6}{z^9}y(z)=0$$

Avec le choix :

$$a_{20}=a_{21}=a_{30}=a_{31}=a_{32}=0\Rightarrow y^{(3)}(z)+\frac{a_{22}+a_{23}z+a_{24}z^2}{z^4}y'(z)+\frac{a_{33}+a_{34}z+a_{35}z^2+a_{36}z^3}{z^6}y(z)=0$$

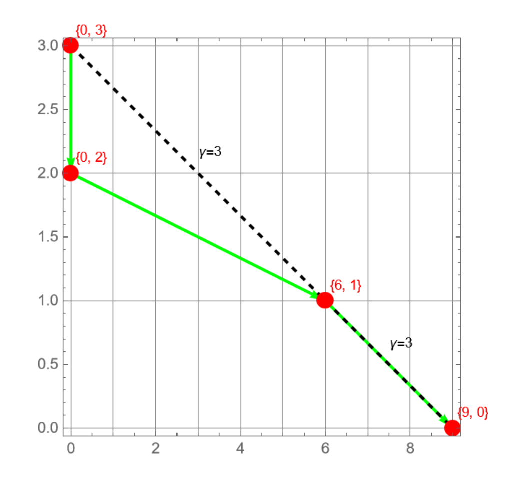
Cette équation devient similaire à celle déjà étudiée juste avant de la forme :

$$y^{(3)}(z)+\frac{a_{20}z^2+a_{21}z+a_{22}}{z^4}y'(z)+\frac{a_{30}z^3+a_{31}z^2+a_{32}z+a_{33}}{z^6}y(z)=0$$

Pour cette équation différentielle, le point z=∞ est un point régulier et le point z=0 est un point singulier essentiel. L'équation indicielle des solutions régulières au point z=∞ de la forme : $y(z)=z^{-\rho}\times\sum_{l=0}^{l=+\infty}c_l z^{-l}$ *est la suivante :*

$$\rho^3+3\,\rho^2+\rho(2+a_{24})-a_{36}=0\Leftrightarrow\rho(\rho+1)(\rho+2)+\rho\,a_{24}-a_{36}=0$$
$$f_0(\zeta)=\zeta(\zeta-1)(\zeta-2)+\zeta\;a_{24}=a_{36}\Rightarrow f_0(-\rho)=\rho(\rho+1)(\rho+2)+\rho\,a_{24}-a_{36}=0$$

Le diagramme de Newton-Puisieux au point z=0 est de la forme :



Cela conduit à proposer un terme exponentiel comme suit:

$$y(z)=e^{\Omega(z)}u(z)\quad\Omega(z)=-\frac{\beta_2}{z}-\frac{\beta_1}{2z^2}\quad\Rightarrow\Omega'(z)=\frac{\beta_1}{z^3}+\frac{\beta_2}{z^2}$$

Le développement en série de l'expression : $(\Omega'(z))^3 + P_1(z)(\Omega'(z))^2 + P_2(z)(\Omega'(z))^1 + P_3(z)(\Omega'(z))^0$ *autour de z=0 à l'ordre 0 permet de fixer les valeurs des paramètres* β_1 *et* β_2*. En l'occurrence* β_1 *suit une équation polynomiale du troisième degré :*

$$(\Omega'(z))^3 + P_1(z)(\Omega'(z))^2 + P_2(z)(\Omega'(z))^1 + P_3(z)(\Omega'(z))^0 = \frac{\beta_1^{\,3} + \beta_1 a_{20} + a_{30}}{z^9} + \frac{\beta_2\left(3\beta_1^{\,2} + a_{20}\right) + \beta_1 a_{21} + a_{31}}{z^8} + O\left(\frac{1}{z^6}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta_1^{\,3} + \beta_1 a_{20} + a_{30} = 0 \\ \beta_2\left(a_{20} + 3\beta_1^{\,2}\right) + \beta_1 a_{21} + a_{31} = 0 \end{cases}$$

En insérant le terme exponentiel $y(z) = e^{-\frac{\beta_2}{z} - \frac{\beta_1}{2z^2}} u(z)$ *avec* $\begin{cases} \beta_1^{\,3} + \beta_1 a_{20} + a_{30} = 0 \\ \beta_2\left(a_{20} + 3\beta_1^{\,2}\right) + \beta_1 a_{21} + a_{31} = 0 \end{cases}$ *l'on obtient une équation différentielle du troisième degré qui possède une solution régulière :*

$$u^{(3)}(z) + \frac{3\beta_1 + \beta_2 z}{z^3} u''(z) + \frac{3\beta_1^{\,2} + a_{20} + (6\beta_1\beta_2 + a_{21})z + \left(3\beta_2^{\,2} - 9\beta_1 + a_{22}\right)z^2 + (a_{23} - 6\beta_2)z^3 + a_{24}z^4}{z^6} u'(z) +$$
$$+ \frac{\beta_2 a_{21} - 9\beta_1^{\,2} + \beta_1\left(3\beta_2^{\,2} + a_{22}\right) + a_{32} + \left(\beta_2^{\,3} + \beta_2 a_{22} + \beta_1(a_{23} - 15\beta_2) + a_{33}\right)z + \left(\beta_2 a_{23} - 6\beta_2^{\,2} + \beta_1(12 + a_{24}) + a_{34}\right)z^2 + \left(a_{35} + \beta_2(6 + a_{24})\right)z^3 + a_{36}z^4}{z^7} u(z) = 0$$

dont l'équation indicielle est la suivante : $\sigma = -\frac{3\beta_1\beta_2^{\,2} - 9\beta_1^{\,2} + \beta_2 a_{21} + \beta_1 a_{22} + a_{32}}{3\beta_1^{\,2} + a_{20}}$.

L'injection d'un développement comme suit : $u(z) = z^\sigma \sum_{l=0}^{l=+\infty} c_l z^l$ *conduit à une récurrence à 5 termes de la forme :*

$$\begin{cases} c_{-l} = 0 \quad l > 0 \quad c_0 = 1 \qquad e_l c_{l-4} + g_l c_{l-3} + h_l c_{l-2} + k_l c_{l-1} + o_l c_l = 0 \\ e_l = (l+\sigma-4)(l+\sigma-5)(l+\sigma-6) + a_{24}(l+\sigma-4) + a_{36} = f_0(l+\sigma-4) \\ g_l = a_{35} + \beta_2\left(a_{24} + 3(l+\sigma-4)(l+\sigma-5)\right) + (l+\sigma-3)\,a_{23} \\ h_l = \beta_2 a_{23} + \beta_1 a_{24} + a_{34} + (l+\sigma-2)\,a_{22} + 3\,(l+\sigma-4)\left(\beta_2^{\,2} + \beta_1(l+\sigma-4)\right) \\ k_l = \beta_2^{\,3} + \beta_2 a_{22} + a_{33} + (l+\sigma-1)\,a_{21} + \beta_1\left(3\beta_2(2l+2\sigma-7) + a_{23}\right) \\ o_l = \left(3\,\beta_1^{\,2} + a_{20}\right)l \end{cases}$$

Comme en général cette récurrence diverge, une condition pour que la forme normale existe est que cette récurrence soit finie. Imaginons que la récurrence s'arrête à l'indice entier ϑ*, alors la forme normale s'écrit :*

$$y(z) = e^{-\frac{\beta_2}{z} - \frac{\beta_1}{2z^2}} \times z^\sigma \times \sum_{l=0}^{l=\vartheta} c_l z^l \quad avec \quad \begin{cases} \beta_1^{\,3} + \beta_1 a_{20} + a_{30} = 0 \\ \beta_2\left(a_{20} + 3\beta_1^{\,2}\right) + \beta_1 a_{21} + a_{31} = 0 \end{cases}$$

$$Et \quad \sigma = -\frac{3\beta_1\beta_2^{\,2} - 9\beta_1^{\,2} + \beta_2 a_{21} + \beta_1 a_{22} + a_{32}}{3\beta_1^{\,2} + a_{20}}$$

Et les conditions d'arrêt de la récurrence sont établies lorsque qu'au moins 4 coefficients du développements s'annulent consécutivement conduisant à l'annulation du cinquième et par conséquent s'expriment par quatre conditions cumulatives donnant les relations suivantes :

$$\begin{cases} e_{\vartheta+4}c_\vartheta + g_{\vartheta+4}c_{\vartheta+1} + h_{\vartheta+4}c_{\vartheta+2} + k_{\vartheta+4}c_{\vartheta+3} + o_{\vartheta+4}c_{\vartheta+4} = 0 \quad et \quad c_{\vartheta+4} = 0 \rightarrow e_{\vartheta+4}c_\vartheta = 0 \Leftrightarrow e_{\vartheta+4} = 0 \\ e_{\vartheta+3}c_{\vartheta-1} + g_{\vartheta+1}c_\vartheta + h_{\vartheta+3}c_{\vartheta+1} + k_{\vartheta+3}c_{\vartheta+2} + o_{\vartheta+3}c_{\vartheta+3} = 0 \quad et \quad c_{\vartheta+3} = 0 \rightarrow e_{\vartheta+3}c_{\vartheta-1} + g_{\vartheta+3}c_\vartheta = 0 \\ e_{\vartheta+2}c_{\vartheta-2} + g_{\vartheta+2}c_{\vartheta-1} + h_{\vartheta+2}c_\vartheta + k_{\vartheta+2}c_{\vartheta+1} + o_{\vartheta+2}c_{\vartheta+2} = 0 \quad et \quad c_{\vartheta+2} = 0 \rightarrow e_{\vartheta+2}c_{\vartheta-2} + g_{\vartheta+2}c_{\vartheta-1} + h_{\vartheta+2}c_\vartheta = 0 \\ e_{\vartheta+1}c_{\vartheta-3} + g_{\vartheta+1}c_{\vartheta-2} + h_{\vartheta+1}c_{\vartheta-1} + k_{\vartheta+1}c_\vartheta + o_{\vartheta+1}c_{\vartheta+1} = 0 \quad et \quad c_{\vartheta+1} = 0 \rightarrow e_{\vartheta+1}c_{\vartheta-3} + g_{\vartheta+1}c_{\vartheta-2} + h_{\vartheta+1}c_{\vartheta-1} + k_{\vartheta+1}c_\vartheta = 0 \end{cases}$$

La condition d'arrêt de cette récurrence est également celle qui permet de se placer dans les conditions de l'équation dîtes de Hamburger avec une continuation analytique possible entre le voisinage de z=0 et celui de z=∞ .

Pour les racines indicielles des formes régulières en z=∞ nous avons les relations suivantes entre-elles :

$$\rho^3 + 3\,\rho^2 + \rho(2 + a_{24}) - a_{36} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = -3 \\ \rho_1\rho_2 + \rho_1\rho_3 + \rho_2\rho_3 = 2 + a_{24} \\ \rho_1\rho_2\rho_3 = a_{36} \end{cases}$$

Pour les exposants des formes normales, ils sont solutions des équations cubiques suivantes :

$$\begin{cases} h(\beta_1) = \beta_1^{\,3} + \beta_1 a_{20} + a_{30} = 0 \Rightarrow \dfrac{dh(\beta_1)}{d\beta_1} = 3\beta_1^{\,2} + a_{20} \\ \beta_2\left(a_{20} + 3\beta_1^{\,2}\right) + \beta_1 a_{21} + a_{31} = 0 \Rightarrow \beta_2 = -\dfrac{\beta_1 a_{21} + a_{31}}{3\beta_1^{\,2} + a_{20}} \Rightarrow \beta_2 = -\dfrac{\beta_1}{\dfrac{dh(\beta_1)}{d\beta_1}} \times a_{21} - \dfrac{1}{\dfrac{dh(\beta_1)}{d\beta_1}} \times a_{31} \end{cases}$$

β_1 possède trois racines possibles distinctes ou non, notons les $\beta_{1,1}$, $\beta_{1,2}$ et $\beta_{1,3}$, il s'ensuit trois valeurs possibles du second exposant β_2 noté également : $\beta_{2,1}$, $\beta_{2,2}$ et $\beta_{2,3}$.

Les relations entre les trois valeurs de l'exposant β_1 sont : $\begin{cases} \beta_{1,1}\beta_{1,2}\beta_{1,3} = -a_{30} \\ \beta_{1,1} + \beta_{1,2} + \beta_{1,3} = 0 \\ \beta_{1,1}\beta_{1,2} + \beta_{1,2}\beta_{1,3} + \beta_{1,1}\beta_{1,3} = a_{20} \end{cases}$.

Comme : $\displaystyle\sum_{l=1}^{l=3} \frac{1}{\left.\dfrac{dh(\beta_1)}{d\beta_1}\right|_{\beta_1=\beta_{1,l}}} = \sum_{l=1}^{l=3} \frac{\beta_{1,l}}{\left.\dfrac{dh(\beta_1)}{d\beta_1}\right|_{\beta_1=\beta_{1,l}}} = 0$ *, il vient :* $\beta_{2,1} + \beta_{2,2} + \beta_{2,3} = 0$.

L'exposant indicielle σ de la partie régulière de la forme normale possède donc également trois valeurs possibles, et il se trouve que la somme de ces trois valeurs est toujours égale à 9, comme on le voit dans ce qui suit :

$$\sigma=-\frac{3\beta_1\beta_2^{\;2}-9\beta_1^{\;2}+\beta_2a_{21}+\beta_1a_{22}+a_{32}}{3\beta_1^{\;2}+a_{20}}=3-\beta_2\frac{3\beta_1\beta_2+a_{21}}{3\beta_1^{\;2}+a_{20}}-\frac{\beta_1a_{22}+3\,a_{20}+a_{32}}{3\beta_1^{\;2}+a_{20}}\rightarrow\begin{cases}\beta_1\rightarrow\beta_{1,1},\beta_{1,2},\beta_{1,3}\\ \beta_2\rightarrow\beta_{2,1},\beta_{2,2},\beta_{2,3}\\ \sigma\rightarrow\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\end{cases}$$

$$\text{De plus}\quad A(\beta_1)=\beta_2\frac{3\beta_1\beta_2+a_{21}}{3\beta_1^{\;2}+a_{20}}=\frac{3\beta_1^{\;2}a_{21}a_{31}-a_{20}a_{21}a_{31}+\beta_1\left(3\,a_{31}^{\;2}-a_{20}a_{21}^{\;2}\right)}{\left(3\beta_1^{\;2}+a_{20}\right)^3}\Rightarrow\sum_{i=1}^{i=3}\sigma_i=9+\sum_{i=1}^{i=3}A(\beta_{1,i})$$

$$\sum_{l=1}^{l=3}\frac{1}{\left(\left.\frac{dh(\beta_1)}{d\beta_1}\right|_{\beta_1=\beta_{1,l}}\right)^3}=-\frac{3}{(\beta_{1,1}-\beta_{1,2})^2(\beta_{1,1}-\beta_{1,3})^2(\beta_{1,2}-\beta_{1,3})^2}\qquad\sum_{l=1}^{l=3}\frac{\beta_{1,l}}{\left(\left.\frac{dh(\beta_1)}{d\beta_1}\right|_{\beta_1=\beta_{1,l}}\right)^3}=-\frac{\beta_{1,1}+\beta_{1,2}+\beta_{1,3}}{(\beta_{1,1}-\beta_{1,2})^2(\beta_{1,1}-\beta_{1,3})^2(\beta_{1,2}-\beta_{1,3})^2}=0$$

$$\sum_{l=1}^{l=3}\frac{\beta_{1,l}^{\;2}}{\left(\left.\frac{dh(\beta_1)}{d\beta_1}\right|_{\beta_1=\beta_{1,l}}\right)^3}=-\frac{\beta_{1,1}\beta_{1,2}+\beta_{1,1}\beta_{1,3}+\beta_{1,2}\beta_{1,3}}{(\beta_{1,1}-\beta_{1,2})^2(\beta_{1,1}-\beta_{1,3})^2(\beta_{1,2}-\beta_{1,3})^2}=-\frac{a_{20}}{(\beta_{1,1}-\beta_{1,2})^2(\beta_{1,1}-\beta_{1,3})^2(\beta_{1,2}-\beta_{1,3})^2}$$

$$\Rightarrow\sum_{i=1}^{i=3}A(\beta_{1,i})=\frac{3a_{20}a_{21}a_{31}-3a_{20}a_{21}a_{31}}{(\beta_{1,1}-\beta_{1,2})^2(\beta_{1,1}-\beta_{1,3})^2(\beta_{1,2}-\beta_{1,3})^2}=0\Rightarrow\sum_{i=1}^{i=3}\sigma_i=9$$

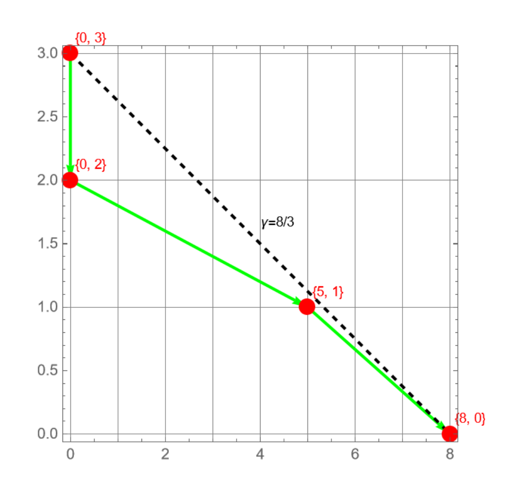
<u>Considération sur la coexistence des formes normales de l'équation différentielle :</u>

$$y^{(3)}(z)+\frac{1}{z^6}\times\left(\sum_{l=0}^{l=4}a_{2,l}z^l\right)\times y'(z)+\frac{1}{z^9}\times\left(\sum_{l=0}^{l=6}a_{3,l}z^l\right)\times y(z)=0$$

<u>Supposons que β soit une racine triple</u>*, alors il faut que* $a_{20}=a_{30}=0\Rightarrow\beta_1=0$ *et dans ce cas* β_2 *n'est également plus défini. Ici c'est une autre catégorie d'équation différentielle :*

$$y^{(3)}(z)+\frac{1}{z^5}\times\left(\sum_{l=1}^{l=4}a_{2,l}z^{l-1}\right)\times y'(z)+\frac{1}{z^8}\times\left(\sum_{l=1}^{l=6}a_{3,l}z^{l-1}\right)\times y(z)=0$$

Dont le diagramme de Newton-Puisieux suggère le développement d'une forme subnormale :



***<u>Supposons maintenant que β est une racine simple</u>**, soit que* $\beta_1^3 + a_{20}\beta_1 + a_{30} = (\beta_1 - \beta_{1,1})(\beta_1 - \beta_{1,2})(\beta_1 - \beta_{1,3}) = 0$,

La somme des trois valeurs possibles de σ est égale à 9 et remarquons que :

$$\frac{dh(\beta_1)}{d\beta_1} = 3\beta_1^2 + a_{20} = (\beta_1 - \beta_{1,1})(\beta_1 - \beta_{1,2}) + (\beta_1 - \beta_{1,2})(\beta_1 - \beta_{1,3}) + (\beta_1 - \beta_{1,1})(\beta_1 - \beta_{1,3})$$
$$\Rightarrow \left.\frac{dh(\beta_1)}{d\beta_1}\right|_{\beta=\beta_{1,1}} = (\beta_{1,1} - \beta_{1,2})(\beta_{1,1} - \beta_{1,3}) \neq 0 \quad \left.\frac{dh(\beta)}{d\beta}\right|_{\beta=\beta_{1,2}} = (\beta_{1,2} - \beta_{1,1})(\beta_{1,2} - \beta_{1,3}) \neq 0 \quad \left.\frac{dh(\beta)}{d\beta}\right|_{\beta=\beta_{1,3}} = (\beta_{1,3} - \beta_{1,1})(\beta_{1,3} - \beta_{1,2}) \neq 0$$

Si bien que chacune des valeurs de σ et β_2 :

$$\beta_2 = -\frac{\beta_1}{\frac{dh(\beta_1)}{d\beta_1}} \times a_{21} - \frac{1}{\frac{dh(\beta_1)}{d\beta_1}} \times a_{31} \quad et \quad \sigma = 3 - \beta_2 \frac{3\beta_1\beta_2 + a_{21}}{3\beta_1^2 + a_{20}} - \frac{\beta_1 a_{22} + 3a_{20} + a_{32}}{3\beta_1^2 + a_{20}}$$

est parfaitement définie pour un racine simple de β_1 . De plus l'existence d'une première forme normale est conditionnée par l'arrêt de la récurrence sur la partie régulière. Il y a en tout 12 paramètres libres, et nous venons de voir que l'arrêt de la récurrence est conditionné par 4 contraintes à chaque fois. Trois formes normales coexistantes impliques 12 contraintes et plus aucun paramètres n'est libre.

Mais la coexistence de trois formes normales n'est pas possible si les trois valeurs de β_1 sont différentes. En effet d'après la relation σ=-ρ-k que l'on applique sur les trois valeurs de ρ et σ avec trois valeurs positives de k :

$$\begin{cases} \sigma_1 + k_1 = -\rho_1 \\ \sigma_2 + k_2 = -\rho_2 \Rightarrow \sigma_1 + k_1 + \sigma_2 + k_2 + \sigma_3 + k_3 = 3 \Rightarrow k_1 + k_2 + k_3 = -6 \\ \sigma_3 + k_3 = -\rho_3 \end{cases}$$

<u>Conclusion sur trois racines β_1 distinctes donc trois valeurs σ distinctes provenant de trois racines indicielles ρ distinctes</u> : l'équation différentielle admet au plus la coexistence de deux formes normales.

Toutefois si les valeurs de σ sont en nombre plus restreint (une ou deux valeurs distinctes) la coexistence de trois formes normales est possible.

***<u>Passons maintenant à l'hypothèse que β_1 est une racine double</u>**, soit que l'équation pour β_1 soit de la forme* $\beta_1^3 + a_{20}\beta + a_{30} = (\beta_1 - \beta_{1,1})^2(\beta - \beta_{1,3}) = 0 \quad avec \quad \beta_{1,1} = \beta_{1,2} \neq \beta_{1,3}$. *Avec la racine double vient les relations suivantes :*

$$\beta_{1,1} = \beta_{1,2} \quad et \quad \begin{cases} \beta_{1,1}\beta_{1,2}\beta_{1,3} = -a_{30} \\ \beta_{1,1} + \beta_{1,2} + \beta_{1,3} = 0 \\ \beta_{1,1}\beta_{1,2} + \beta_{1,2}\beta_{1,3} + \beta_{1,1}\beta_{1,3} = a_{20} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_{1,1}^2\beta_{1,3} = -a_{30} \\ \beta_{1,3} = -2\beta_{1,1} \\ \beta_{1,1}^2 + 2\beta_{1,1}\beta_{1,3} = a_{20} \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a_{20} = -3\beta_{1,1}^2 \\ a_{30} = 2\beta_{1,1}^3 \end{cases} \Rightarrow \frac{a_{30}^2}{4} = -\frac{a_{20}^3}{27} \Rightarrow 27a_{30}^2 + 4a_{20}^3 = 0 \qquad De\ plus \quad \begin{cases} \beta_{1,1}^3 = \frac{a_{30}}{2} \\ \beta_{1,1}^2 = -\frac{a_{20}}{3} \end{cases} \Rightarrow \beta_{1,1} = -\frac{3}{2}\frac{a_{30}}{a_{20}}$$

Le dénominateur de l'exposant σ devient donc nul et l'exposant σ ainsi que la valeur de l'exposant β_2 ne sont plus définis : $\beta_2 = -\frac{\beta_1 a_{21} + a_{31}}{3\beta_1^2 + a_{20}}$ *et* $\sigma = 3 - \frac{\beta_2(3\beta_1\beta_2 + a_{21}) + \beta_1 a_{22} + 3a_{20} + a_{32}}{3\beta_1^2 + a_{20}}$ *sauf si dans un premier temps l'un des numérateurs* $\beta_1 a_{21} + a_{31} = 0$ *s'annule. Cette contrainte supplémentaire induit de nouvelles relations entre les paramètres de l'équation différentielle :*

$$\beta_1 = -\frac{a_{31}}{a_{21}} = -\frac{3}{2}\frac{a_{30}}{a_{20}} \Rightarrow 2a_{20}a_{31} = 3a_{30}a_{21} \Rightarrow \begin{cases} 8a_{20}^3 a_{31}^3 = 27a_{30}^3 a_{21}^3 \\ 4a_{20}^3 + 27a_{30}^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow a_{30}a_{21}^3 + 2a_{31}^3 = 0 \Rightarrow a_{30} = -2\frac{a_{31}^3}{a_{21}^3} \quad et \quad a_{20} = -3\frac{a_{31}^2}{a_{21}^2}$$

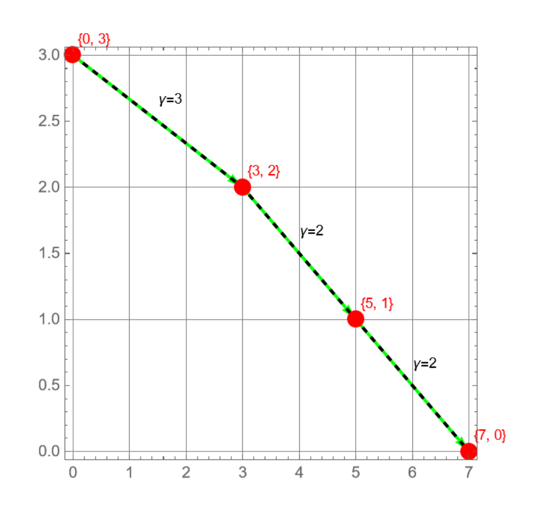
Il convient de revenir à l'équation de départ : $y^{(3)}(z)+\frac{1}{z^6}\times\left(\sum_{l=0}^{l=4}a_{2,l}z^l\right)\times y'(z)+\frac{1}{z^9}\times\left(\sum_{l=0}^{l=6}a_{3,l}z^l\right)\times y(z)=0$,

compte tenu de la seule substitution : $y(z)=e^{-\frac{\beta_1}{2z^2}}u(z)$ *avec* $\left\{\begin{array}{l}\beta_1^3+a_{20}\beta_1+a_{30}=0\\ 3\beta_1^2+a_{20}=0\\ \beta_1 a_{21}+a_{31}=0\end{array}\right\}\leftarrow \textit{Racine double de } \beta_1$.

L'équation résultante de u(z) est la suivante :

$$u^{(3)}(z)+\frac{3\beta_1}{z^3}u''(z)+\frac{a_{21}+(a_{22}-9\beta_1)z+a_{23}z^2+a_{24}z^3}{z^5}u'(z)+\frac{\beta_1 a_{22}+a_{32}+3a_{20}+(\beta_1 a_{23}+a_{33})z+(\beta_1(12+a_{24})+a_{34})z^2+a_{35}z^3+a_{36}z^4}{z^7}u(z)=0$$

Et son diagramme de Newton-Puisieux est le suivant :



Cela conduit à proposer un terme exponentiel comme suit: $u(z)=e^{-\frac{\beta_2}{z}}v(z)\quad \Omega(z)=-\frac{\beta_2}{z}\qquad \Omega'(z)=\frac{\beta_2}{z^2}$.

Le développement de l'expression permettant la détermination du paramètre β₂ :

$$(\Omega'(z))^3+P_1(z)(\Omega'(z))^2+P_2(z)(\Omega'(z))^1+P_3(z)(\Omega'(z))^0=\frac{-3\frac{a_{31}}{a_{21}}\beta_2^2+\beta_2 a_{21}-\frac{a_{22}a_{31}}{a_{21}}-9\frac{a_{31}^2}{a_{21}^2}+a_{32}}{z^7}+O\left(\frac{1}{z^6}\right)$$

$$\Rightarrow -3\frac{a_{31}}{a_{21}}\beta_2^2+\beta_2 a_{21}-\frac{a_{22}a_{31}}{a_{21}}-9\frac{a_{31}^2}{a_{21}^2}+a_{32}=0\Rightarrow \beta_2^2=\beta_2\frac{a_{21}^2}{3a_{31}}-\frac{a_{22}}{3}-3\frac{a_{31}}{a_{21}}+\frac{a_{21}a_{32}}{3a_{31}}$$

Soit que β_2 *est solution d'une équation quadratique, soit deux valeurs possibles de* β_2 *pour une même valeur de* β_1 *. Dans ces* conditions *l'équation de la partie régulière de la forme normale pour la fonction v(z) devient :*

$$v^{(3)}(z)+\frac{\beta_2 z-3\frac{a_{31}}{a_{21}}}{z^3}v''(z)+\frac{a_{21}-6\beta_2\frac{a_{31}}{a_{21}}+(a_{32}+\beta_2 a_{21})\frac{a_{21}}{a_{31}}z+(a_{23}-6\beta_2)z^2+a_{24}z^3}{z^5}v'(z)$$
$$+\left(\begin{array}{l}\dfrac{a_{33}-a_{21}-\dfrac{a_{21}^2 a_{22}}{9a_{31}}-\dfrac{a_{23}a_{31}}{a_{21}}+\dfrac{a_{21}^3 a_{32}}{9a_{31}^2}-9a_{23}+\dfrac{\beta_2}{9}\left(6a_{22}+\dfrac{a_{21}^4}{a_{31}^2}+108\dfrac{a_{31}}{a_{21}}+3\dfrac{a_{21}a_{32}}{a_{31}}\right)}{z^6}+\\ +\dfrac{2a_{22}+a_{34}+(6-a_{24})\dfrac{a_{31}}{a_{21}}-2\dfrac{a_{21}a_{32}}{a_{31}}+\beta_2\left(a_{23}-2\dfrac{a_{21}^2}{a_{31}}\right)}{z^5}+\dfrac{\beta_2(a_{24}+6)+a_{35}}{z^4}+\dfrac{a_{36}}{z^3}\end{array}\right)v(z)=0$$

Pour cette équation différentielle le point z=0 est un point singulier irrégulier mais pour autant il admet des solutions régulières (point irrégulier non essentiel). Et l'équation indicielle provenant de l'injection d'un développement de la forme $v(z)=z^{\sigma}\times\sum_{l=0}^{l=\infty}c_l z^l$ *est la suivante :*

$$\sigma=\frac{a_{21}{}^4a_{32}+9a_{21}a_{31}{}^2a_{33}-a_{21}{}^3a_{22}a_{31}-9a_{21}{}^2a_{31}{}^2-9a_{23}a_{31}{}^3+\beta_2\left(a_{21}{}^5+6\,a_{21}a_{22}a_{31}{}^2+108\,a_{31}{}^3+3a_{21}{}^2a_{31}a_{32}\right)}{9a_{31}{}^2\left(6\beta_2a_{31}-a_{21}{}^2\right)}$$

La récurrence des coefficients du développement est à 4 termes :

$$\begin{cases}c_{-l}=0 \quad l>0 \quad c_0=1\\ g_lc_{l-3}+h_lc_{l-2}+k_lc_{l-1}+o_lc_l=0\\ g_l=(l+\sigma-3)(l+\sigma-4)(l+\sigma-5)+a_{24}(l+\sigma-3)+a_{36}=f_0(l+\sigma-3)\\ h_l=a_{35}+a_{23}(l+\sigma-2)+\beta_2\left(a_{24}+3\,(l+\sigma-3)(l+\sigma-4)\right)\\ k_l=a_{34}+2a_{22}+\beta_2a_{23}+\beta_2(l+\sigma-3)\dfrac{a_{21}{}^2}{a_{31}}+(l+\sigma-3)\dfrac{a_{21}a_{32}}{a_{31}}+\left(a_{24}+3\,(l+\sigma)(l+\sigma-3)\right)\dfrac{a_{31}}{a_{21}}\\ o_l=\dfrac{a_{21}{}^2-6\beta_2a_{31}}{a_{21}}\,l\end{cases}$$

Pour évoquer la question de la correspondance avec les solutions régulières en z=∞, là encore il convient que le développement ci-dessus soit fini, sinon il diverge en théorie. L'arrêt de cette récurrence à un indice ϑ *entier s'expriment par trois conditions cumulatives donnant les relations suivantes :*

$$\begin{cases}g_{\vartheta+1}c_{\vartheta}+h_{\vartheta+3}c_{\vartheta+1}+k_{\vartheta+3}c_{\vartheta+2}+o_{\vartheta+3}c_{\vartheta+3}=0 \quad et \quad c_{\vartheta+3}=0\rightarrow g_{\vartheta+3}=0=f_0(\vartheta+3+\sigma-3)=f_0(\vartheta+\sigma)\\ g_{\vartheta+2}c_{\vartheta-1}+h_{\vartheta+2}c_{\vartheta}+k_{\vartheta+2}c_{\vartheta+1}+o_{\vartheta+2}c_{\vartheta+2}=0 \quad et \quad c_{\vartheta+2}=0\rightarrow g_{\vartheta+2}c_{\vartheta-1}+h_{\vartheta+2}c_{\vartheta}=0\\ g_{\vartheta+1}c_{\vartheta-2}+h_{\vartheta+1}c_{\vartheta-1}+k_{\vartheta+1}c_{\vartheta}+o_{\vartheta+1}c_{\vartheta+1}=0 \quad et \quad c_{\vartheta+1}=0\rightarrow g_{\vartheta+1}c_{\vartheta-2}+h_{\vartheta+1}c_{\vartheta-1}+k_{\vartheta+1}c_{\vartheta}=0\end{cases}$$

Soit les deux racines $\beta_{2,1}$, $\beta_{2,2}$ *de l'équation* $\beta_2{}^2-\beta_2\frac{a_{21}{}^2}{3\,a_{31}}+\frac{a_{22}}{3}+3\frac{a_{31}}{a_{21}}-\frac{a_{21}a_{32}}{3a_{31}}=0$ *qui entraîne deux valeurs de l'exposant* σ_1, σ_2 *avec par hypothèse six conditions d'arrêt de la récurrence qui sont vérifiées, dont les premières :* $g_{\vartheta_1}(\sigma_1)=f_0(\vartheta_1+\sigma_1)=0 \quad et \quad g_{\vartheta_2}(\sigma_2)=f_0(\vartheta_2+\sigma_2)=0$ *. Sous cette hypothèse les relations avec des racines indicielles des solutions régulières (en z=∞) :*

$$g_{\vartheta_1}(\sigma_1)=f_0(\vartheta_1+\sigma_1)=0 \quad g_{\vartheta_2}(\sigma_2)=f_0(\vartheta_2+\sigma_2)=0\Rightarrow\begin{cases}\sigma_1+\vartheta_1=-\rho_1\\ \sigma_2+\vartheta_2=-\rho_2\end{cases}$$
$$Et \quad g_0(\sigma_1)=f_0(\sigma_1)\neq0 \quad sauf\ si \quad \vartheta_1=0 \quad g_0(\sigma_2)=f_0(\sigma_2)\neq0 \quad sauf\ si \quad \vartheta_2=0$$

A ce stade la coexistence de deux formes normales n'est donc pas remis en cause . Or l'exposant σ est déterminé par la relation, il s'ensuit que $\sigma_1+\sigma_2$ *s'annule :*

$$h(\beta_2)=\beta_2{}^2-\beta_2\frac{a_{21}{}^2}{3\,a_{31}}+\frac{a_{22}}{3}+3\frac{a_{31}}{a_{21}}-\frac{a_{21}a_{32}}{3a_{31}}\rightarrow h'(\beta_2)=\frac{6\beta_2a_{31}-a_{21}{}^2}{3a_{31}}$$
$$Et \quad \sum_{l=1}^{l=2}\frac{1}{h'(\beta_{2,l})}=0 \quad \sum_{l=1}^{l=2}\frac{\beta_{2,l}}{h'(\beta_{2,l})}=1$$
$$Or \quad \sigma=\frac{a_{21}{}^4a_{32}+9a_{21}a_{31}{}^2a_{33}-a_{21}{}^3a_{22}a_{31}-9a_{21}{}^2a_{31}{}^2-9a_{23}a_{31}{}^3+\beta_2\left(a_{21}{}^5+6\,a_{21}a_{22}a_{31}{}^2+108\,a_{31}{}^3+3a_{21}{}^2a_{31}a_{32}\right)}{9a_{31}{}^2\left(6\beta_2a_{31}-a_{21}{}^2\right)}$$
$$\Rightarrow\sigma=\frac{a_{21}{}^4a_{32}+9a_{21}a_{31}{}^2a_{33}-a_{21}{}^3a_{22}a_{31}-9a_{21}{}^2a_{31}{}^2-9a_{23}a_{31}{}^3+\beta_2\left(a_{21}{}^5+6\,a_{21}a_{22}a_{31}{}^2+108\,a_{31}{}^3+3a_{21}{}^2a_{31}a_{32}\right)}{27a_{31}{}^3h'(\beta_2)}$$
$$\Rightarrow\sum_{l=1}^{l=2}\sigma_l=\sigma_1+\sigma_2=\frac{a_{21}{}^5+6\,a_{21}a_{22}a_{31}{}^2+108\,a_{31}{}^3+3a_{21}{}^2a_{31}a_{32}}{27a_{31}{}^3}=4+\frac{a_{21}{}^5}{27a_{31}{}^3}+\frac{a_{21}{}^2a_{32}}{9a_{31}{}^2}+\frac{2\,a_{21}a_{22}}{9a_{31}}$$

Voyons maintenant la troisième forme normale liée au deuxième exposant $\beta_{1,3}$ distinct de $\beta_{1,1}=\beta_{1,2}$. Ici l'exposant :

$$\beta_{1,3}=-2\beta_{1,1}=2\frac{a_{31}}{a_{21}}\quad a_{20}=-3\frac{a_{31}^{2}}{a_{21}^{2}}\quad 3\beta_{1,3}^{2}+a_{20}=9\frac{a_{31}^{2}}{a_{21}^{2}}\qquad \beta_{2,3}=-\frac{\beta_{1,3}a_{21}+a_{31}}{3\beta_{1,3}^{2}+a_{20}}=-\frac{a_{21}^{2}}{3\,a_{31}}$$

$$\sigma_3=-\frac{3\beta_{1,3}\beta_{2,3}^{2}-9\beta_{1,3}^{2}+\beta_{2,3}a_{21}+\beta_{1,3}a_{22}+a_{32}}{3\beta_{1,3}^{2}+a_{20}}=3-\beta_{2,3}\frac{3\beta_{1,3}\beta_{2,3}+a_{21}}{3\beta_{1,3}^{2}+a_{20}}-\frac{\beta_{1,3}a_{22}+3\,a_{20}+a_{32}}{3\beta_{1,3}^{2}+a_{20}}=4-\frac{a_{21}^{5}}{27\,a_{31}^{3}}-\frac{a_{32}a_{21}^{2}}{9\,a_{31}^{2}}-\frac{2\,a_{22}a_{21}}{9\,a_{31}}$$

est parfaitement défini puisque : $3\beta_{1,3}^{2}+a_{20}\neq 0$. Supposons maintenant qu'en plus des deux formes normales coexistantes, cette troisième forme normale construite avec β_3 et donc σ_3, est possible alors il existe un troisième forme normale qui vérifie la relation : $g_{\vartheta_3}(\sigma_3)=f_0(\vartheta_3+\sigma_3)=0$.

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_1+\sigma_2=4+\dfrac{a_{21}^{5}}{27a_{31}^{3}}+\dfrac{a_{21}^{2}a_{32}}{9a_{31}^{2}}+\dfrac{2\,a_{21}a_{22}}{9\,a_{31}}\\ \sigma_3=4-\dfrac{a_{21}^{5}}{27\,a_{31}^{3}}-\dfrac{a_{21}^{2}a_{32}}{9\,a_{31}^{2}}-\dfrac{2\,a_{21}a_{22}}{9\,a_{31}}\end{array}\right\}\Rightarrow\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3=8$$

De même que pour le cas de trois racines simples de β formons la somme des trois racines ρ :

$$\begin{cases}\sigma_1+\vartheta_1=-\rho_1\\ \sigma_2+\vartheta_2=-\rho_2\Rightarrow\sigma_1+\vartheta_1+\sigma_2+\vartheta_2+\sigma_3+\vartheta_3=3=\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_3+8=3\Rightarrow\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_3=-5\\ \sigma_3+\vartheta_3=-\rho_3\end{cases}$$

Ce qui est impossible puisque les trois indices d'arrêt « supposé » de la récurrence sont positifs ou nuls. Donc là encore sur une racine $\beta_{1,1}$ double et une racine $\beta_{1,3}$ distincte et trois racines de σ distinctes en correspondance avec trois racines indicielles ρ distinctes : l'équation différentielle n'admet au plus que la coexistence de deux formes normales.

Par contre si pour les valeurs de ρ parmi les trois quantités $\begin{cases}\sigma_1+\vartheta_1=-\rho_1\\ \sigma_2+\vartheta_2=-\rho_2\\ \sigma_3+\vartheta_3=-\rho_3\end{cases}$ deux d'entre-elles au moins sont égales la coexistence de trois formes normales est possible. Il en est de même si deux racines de σ sont égales. Je rappelle que les trois formes normales, s'écrivent ainsi :

$$\begin{cases}y_1(z)=e^{-\frac{\beta_{1,1}}{2z^2}-\frac{\beta_{2,1}}{z}}z^{\sigma_1}\times\sum_{l=0}^{l=\vartheta_1}c_{l,1}z^l\quad avec\quad \sigma_1=f(\beta_{2,1})\quad et\quad Récurrence\,4\,termes\,sur\,c_{l,1}\quad et\quad 3\,conditions\,d'arrêt\rightarrow\vartheta_1\\ y_2(z)=e^{-\frac{\beta_{1,1}}{2z^2}-\frac{\beta_{2,2}}{z}}z^{\sigma_2}\times\sum_{l=0}^{l=\vartheta_2}c_{l,2}z^l\quad avec\quad \sigma_2=f(\beta_{2,2})\quad et\quad Récurrence\,4\,termes\,sur\,c_{l,2}\quad et\quad 3\,conditions\,d'arrêt\rightarrow\vartheta_2\\ y_3(z)=e^{-\frac{\beta_{1,3}}{2z^2}-\frac{\beta_{2,3}}{z}}z^{\sigma_2}\times\sum_{l=0}^{l=\vartheta_3}c_{l,3}z^l\quad avec\quad \sigma_2=f(\beta_{1,3})\quad et\quad \beta_{2,3}=g(\beta_{1,3})\quad et\quad Récurrence\,5\,termes\,sur\,c_{l,3}\quad et\quad 4\,conditions\,d'arrêt\rightarrow\vartheta_3\end{cases}$$

Racine indicielle double de β₂ *. Envisageons maintenant le cas ou les deux racines de l'équation :* $\beta_2^2-\beta_2\frac{a_{21}^2}{3\,a_{31}}+\frac{a_{22}}{3}+3\frac{a_{31}}{a_{21}}-\frac{a_{21}a_{32}}{3a_{31}}=0$ *soient identiques. Notons que :*

$$\beta_2^2-\beta_2\frac{a_{21}^2}{3\,a_{31}}+\frac{a_{22}}{3}+3\frac{a_{31}}{a_{21}}-\frac{a_{21}a_{32}}{3a_{31}}=0=(\beta_2-\beta_{2,1})^2\Rightarrow\beta_{2,1}=\frac{a_{21}^2}{6\,a_{31}}\quad et\quad \frac{a_{22}}{3}+3\frac{a_{31}}{a_{21}}-\frac{a_{21}a_{32}}{3\,a_{31}}=\frac{a_{21}^4}{36\,a_{31}^2}\Rightarrow a_{22}=\frac{a_{21}^4}{12\,a_{31}^2}-9\frac{a_{31}}{a_{21}}+\frac{a_{21}a_{32}}{a_{31}}$$

Les trois exposants σ s'écrivent : $\begin{cases}\sigma_3=4-\frac{a_{21}^5}{27\,a_{31}^3}-\frac{a_{21}^2a_{32}}{9\,a_{31}^2}-\frac{2\,a_{21}a_{22}}{9\,a_{31}}=6-\frac{a_{21}^5}{18\,a_{31}^3}-\frac{a_{21}^2a_{32}}{3\,a_{31}^2}\\ \sigma_1+\sigma_2=4+\frac{a_{21}^5}{27a_{31}^3}+\frac{a_{21}^2a_{32}}{9a_{31}^2}+\frac{2\,a_{21}a_{22}}{9\,a_{31}}=2+\frac{a_{21}^5}{18\,a_{31}^3}+\frac{a_{21}^2a_{32}}{3\,a_{31}^2}\end{cases}$.

La coexistence des trois formes normales est possible, du fait qu'il n'y a plus de contradiction lorsque l'on additionne les trois racines indicielles ρ car deux d'entre-elles sont identiques :

$$\begin{cases}\begin{cases}\sigma_1=\sigma_2\\ \vartheta_1=\vartheta_2\end{cases}\Rightarrow\rho_1=\rho_2\\ \sigma_3+\vartheta_3=-\rho_3\neq-\rho_1\end{cases}\qquad\begin{cases}2\sigma_1+\sigma_3=8\Rightarrow\sigma_1+\vartheta_1+\sigma_2+\vartheta_2+\sigma_3+\vartheta_3=2\sigma_1+\sigma_3+2\vartheta_1+\vartheta_3=2\vartheta_1+\vartheta_3+8=-2\rho_1-\rho_3\neq3\\ \Rightarrow 2\vartheta_1+\vartheta_3=-2\rho_1-\rho_3-8\end{cases}$$

Comme les racines de σ sont identiques, la partie régulière de la seconde forme normale doit comporter un terme logarithmique.

A.R.Forsythe, Chapitre 98, exercice n°2 page 309, considérons maintenant l'équation différentielle :

$$a_{3,0}=0\to y^{(3)}(z)+\frac{1}{z^6}\times\left(\sum_{l=0}^{l=4}a_{2,l}z^l\right)\times y'(z)+\frac{1}{z^9}\times\left(\sum_{l=1}^{l=6}a_{3,l}z^l\right)\times y(z)=y^{(3)}(z)+\frac{1}{z^6}\times\left(\sum_{l=0}^{l=4}a_{2,l}z^l\right)\times y'(z)+\frac{1}{z^8}\times\left(\sum_{l=0}^{l=5}a_{3,l+1}z^l\right)\times y(z)=0$$

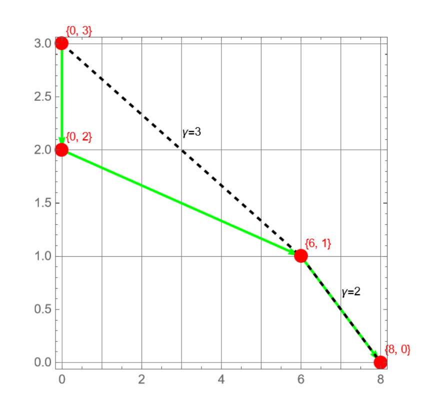
Sous une forme « moins condensée » cela donne

$$y^{(3)}(z)+\frac{a_{20}+a_{21}z+a_{22}z^2+a_{23}z^3+a_{24}z^4}{z^6}y'(z)+\frac{a_{31}z+a_{32}z^2+a_{33}z^3+a_{34}z^4+a_{35}z^5+a_{36}z^6}{z^9}y(z)=0$$

Pour cette équation différentielle, le point z=∞ est un point régulier et le point z=0 est un point singulier essentiel. L'équation indicielle des solutions régulières au point z=∞ de la forme : $y(z)=z^{-\rho}\times\sum_{l=0}^{l=+\infty}c_lz^{-l}$ *est la suivante :*

$$\rho^3+3\,\rho^2+\rho(2+a_{24})-a_{36}=0\Leftrightarrow\rho(\rho+1)(\rho+2)+\rho\,a_{24}-a_{36}=0$$
$$f_0(\zeta)=\zeta(\zeta-1)(\zeta-2)+\zeta\,a_{24}=a_{36}\Rightarrow f_0(-\rho)=\rho(\rho+1)(\rho+2)+\rho\,a_{24}-a_{36}=0$$

Le diagramme de Newton-Puisieux au point z=0 est de la forme :



Cela conduit à proposer le terme exponentiel suivant : $y(z)=e^{\Omega(z)}u(z)\quad \Omega(z)=-\frac{\beta_2}{z}-\frac{\beta_1}{2z^2}\quad \Rightarrow \Omega'(z)=\frac{\beta_1}{z^3}+\frac{\beta_2}{z^2}$ *qui permet d'appréhender les deux valeurs de pentes du diagramme.*

Le développement en série de l'expression : $(\Omega'(z))^3+P_1(z)(\Omega'(z))^2+P_2(z)(\Omega'(z))^1+P_3(z)(\Omega'(z))^0$ *autour de z=0 à l'ordre 0 permet de fixer les valeurs des paramètres β_1 et β_2. En l'occurrence β_1 suit une équation polynomiale du troisième degré :*

$$(\Omega'(z))^3+P_1(z)(\Omega'(z))^2+P_2(z)(\Omega'(z))^1+P_3(z)(\Omega'(z))^0=\frac{\beta_1\left(\beta_1^{\,2}+a_{20}\right)}{z^9}+\frac{\beta_2\left(3\beta_1^{\,2}+a_{20}\right)+\beta_1 a_{21}+a_{31}}{z^8}+O\left(\frac{1}{z^6}\right)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\beta_1=0\\ \beta_2=-\dfrac{a_{31}}{a_{20}}\end{cases}\quad ou\quad \begin{cases}\beta_1^{\,2}+a_{20}=0\\ \beta_2=\dfrac{\beta_1 a_{21}+a_{31}}{2a_{20}}\end{cases}$$

Par rapport à l'équation précédente où $a_{3,0}\neq 0$*, on est alors dans le cas où β_1 , n'a que des racines simples. On voit également que le premier choix $\beta_1=0$ correspond à la pente du diagramme $\gamma=2$. En insérant le terme exponentiel* $y(z)=e^{-\frac{\beta_2}{z}-\frac{\beta_1}{2z^2}}u(z)$ *avec* $\begin{cases}\beta_1=0\\ \beta_2=-\dfrac{a_{31}}{a_{20}}\end{cases}$ *ou* $\begin{cases}\beta_1^{\,2}+a_{20}=0\\ \beta_2=\dfrac{\beta_1 a_{21}+a_{31}}{2a_{20}}\end{cases}$ *l'on obtient une équation différentielle du troisième degré qui possède une solution régulière :*

$$\begin{aligned}&u^{(3)}(z)+\frac{3\beta_1+\beta_2\,z}{z^3}u''(z)+\frac{3\beta_1^{\,2}+a_{20}+(6\beta_1\beta_2+a_{21})\,z+\left(3\beta_2^{\,2}-9\beta_1+a_{22}\right)z^2+(a_{23}-6\beta_2)\,z^3+a_{24}z^4}{z^6}u'(z)+\\&+\frac{\beta_2 a_{21}-9\beta_1^{\,2}+\beta_1\left(3\beta_2^{\,2}+a_{22}\right)+a_{32}+\left(\beta_2^{\,3}+\beta_2 a_{22}+\beta_1(a_{23}-15\beta_2)+a_{33}\right)z+\left(\beta_2 a_{23}-6\beta_2^{\,2}+\beta_1(12+a_{24})+a_{34}\right)z^2+\left(a_{35}+\beta_2(6+a_{24})\right)z^3+a_{36}z^4}{z^7}u(z)=0\end{aligned}$$

dont l'équation indicielle est la suivante : $\sigma=-\frac{3\beta_1\beta_2^{\,2}-9\beta_1^{\,2}+\beta_2 a_{21}+\beta_1 a_{22}+a_{32}}{3\beta_1^{\,2}+a_{20}}$ *. Plus précisément pour les deux choix de valeurs de β_1 , les équations se simplifient un peu avec la première racine $\beta_1=0$:*

$$\begin{cases}\beta_1=0\\ \beta_2=-\dfrac{a_{31}}{a_{20}}\\ \sigma=\dfrac{a_{21}a_{31}-a_{20}a_{32}}{a_{20}^{\;2}}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u^{(3)}(z)-\dfrac{a_{31}}{a_{20}}\dfrac{1}{z^2}u''(z)+\dfrac{a_{20}+a_{21}\,z+\left(a_{22}+3\dfrac{a_{31}^{\;2}}{a_{20}^{\;2}}\right)z^2+\left(a_{23}+6\dfrac{a_{31}}{a_{20}}\right)z^3+a_{24}z^4}{z^6}u'(z)+\\ +\dfrac{a_{32}-\dfrac{a_{31}a_{21}}{a_{20}}+\left(a_{33}-\dfrac{a_{31}^{\;3}}{a_{20}^{\;3}}-\dfrac{a_{31}a_{22}}{a_{20}}\right)z+\left(a_{34}-\dfrac{a_{31}a_{23}}{a_{20}}-6\dfrac{a_{31}^{\;2}}{a_{20}^{\;2}}\right)z^2+\left(a_{35}-\dfrac{a_{31}}{a_{20}}(6+a_{24})\right)z^3+a_{36}z^4}{z^7}u(z)=0\end{cases}$$

Et :

$$\begin{cases}\beta_1^{\,2}+a_{20}=0\\ \beta_2=\dfrac{\beta_1 a_{21}+a_{31}}{2a_{20}}\\ \sigma=\dfrac{9a_{20}+3\beta_1\beta_2^{\,2}+\beta_2 a_{21}+\beta_1 a_{22}+a_{32}}{2\,a_{20}}\end{cases}\to\begin{cases}u^{(3)}(z)+\dfrac{3\beta_1+\beta_2\,z}{z^3}u''(z)+\dfrac{-2\,a_{20}+(6\beta_1\beta_2+a_{21})\,z+\left(3\beta_2^{\,2}-9\beta_1+a_{22}\right)z^2+(a_{23}-6\beta_2)\,z^3+a_{24}z^4}{z^6}u'(z)+\\ +\left(\begin{aligned}&\frac{9\,a_{20}+\beta_2 a_{21}+\beta_1\left(3\beta_2^{\,2}+a_{22}\right)+a_{32}}{z^7}+\frac{\beta_2^{\,3}+\beta_2 a_{22}+\beta_1(a_{23}-15\beta_2)+a_{33}}{z^6}+\\&+\frac{\beta_2 a_{23}-6\beta_2^{\,2}+\beta_1(12+a_{24})+a_{34}}{z^5}+\frac{a_{35}+\beta_2(6+a_{24})}{z^4}+\frac{a_{36}}{z^3}\end{aligned}\right)u(z)=0\end{cases}$$

L'injection d'un développement comme suit : $u(z)=z^{\sigma}\sum_{l=0}^{l=+\infty}c_l z^l$ *conduit à une récurrence à 5 termes de la forme :*

$$\begin{cases}\beta_1^{\,2}+a_{20}=0\\ \beta_2=\dfrac{\beta_1 a_{21}+a_{31}}{2a_{20}}\\ \sigma=\dfrac{9a_{20}+3\beta_1\beta_2^{\,2}+\beta_2 a_{21}+\beta_1 a_{22}+a_{32}}{2\,a_{20}}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}c_{-l}=0\quad l>0\quad c_0=1\qquad e_l c_{l-4}+g_l c_{l-3}+h_l c_{l-2}+k_l c_{l-1}+o_l c_l=0\\ e_l=(l+\sigma-4)(l+\sigma-5)(l+\sigma-6)+a_{24}(l+\sigma-4)+a_{36}=f_0(l+\sigma-4)\\ g_l=a_{35}+\beta_2\left(a_{24}+3(l+\sigma-4)(l+\sigma-5)\right)+(l+\sigma-3)\,a_{23}\\ h_l=\beta_2 a_{23}+\beta_1 a_{24}+a_{34}+(l+\sigma-2)\,a_{22}+3\,(l+\sigma-4)\left(\beta_2^{\,2}+\beta_1(l+\sigma-4)\right)\\ k_l=\beta_2^{\,3}+\beta_2 a_{22}+a_{33}+(l+\sigma-1)\,a_{21}+\beta_1\left(3\beta_2\,(2l+2\sigma-7)+a_{23}\right)\\ o_l=-2a_{20}l\end{cases}$$

Qui se simplifie un peu avec le premier choix :

$$\begin{cases}\beta_1=0\\ \beta_2=-\dfrac{a_{31}}{a_{20}}\\ \sigma=\dfrac{a_{21}a_{31}-a_{20}a_{32}}{a_{20}^{\,2}}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}c_{-l}=0\quad l>0\quad c_0=1\qquad e_l c_{l-4}+g_l c_{l-3}+h_l c_{l-2}+k_l c_{l-1}+o_l c_l=0\\ e_l=(l+\sigma-4)(l+\sigma-5)(l+\sigma-6)+a_{24}(l+\sigma-4)+a_{36}=f_0(l+\sigma-4)\\ g_l=a_{35}+\beta_2\left(a_{24}+3(l+\sigma-4)(l+\sigma-5)\right)+(l+\sigma-3)\,a_{23}\\ h_l=\beta_2 a_{23}+a_{34}+(l+\sigma-2)\,a_{22}+3\,(l+\sigma-4)\beta_2^{\,2}\\ k_l=\beta_2^{\,3}+\beta_2 a_{22}+a_{33}+(l+\sigma-1)\,a_{21}\\ o_l=a_{20}\,l\end{cases}$$

Comme en général cette récurrence diverge, une condition pour que la forme normale existe est que cette récurrence soit finie. Imaginons que la récurrence s'arrête à l'indice entier ϑ, alors la forme normale s'écrit :

$$y(z)=e^{-\frac{\beta_2}{z}-\frac{\beta_1}{2z^2}}\times z^{\sigma}\times\sum_{l=0}^{l=\vartheta}c_l z^l\quad avec\quad\begin{cases}\beta_1\left(\beta_1^{\,2}+a_{20}\right)=0\\ \beta_2\left(a_{20}+3\beta_1^{\,2}\right)+\beta_1 a_{21}+a_{31}=0\end{cases}$$

$$Et\quad\sigma=-\frac{3\beta_1\beta_2^{\,2}-9\beta_1^{\,2}+\beta_2 a_{21}+\beta_1 a_{22}+a_{32}}{3\beta_1^{\,2}+a_{20}}$$

Et les conditions d'arrêt de la récurrence sont établies lorsque qu'au moins 4 coefficients du développements s'annulent consécutivement conduisant à l'annulation du cinquième et par conséquent s'expriment par quatre conditions cumulatives donnant les relations suivantes :

$$\begin{cases}e_{\vartheta+4}c_{\vartheta}+g_{\vartheta+4}c_{\vartheta+1}+h_{\vartheta+4}c_{\vartheta+2}+k_{\vartheta+4}c_{\vartheta+3}+o_{\vartheta+4}c_{\vartheta+4}=0\quad et\quad c_{\vartheta+4}=0\rightarrow e_{\vartheta+4}c_{\vartheta}=0\Leftrightarrow e_{\vartheta+4}=0\\ e_{\vartheta+3}c_{\vartheta-1}+g_{\vartheta+3}c_{\vartheta}+h_{\vartheta+3}c_{\vartheta+1}+k_{\vartheta+3}c_{\vartheta+2}+o_{\vartheta+3}c_{\vartheta+3}=0\quad et\quad c_{\vartheta+3}=0\rightarrow e_{\vartheta+3}c_{\vartheta-1}+g_{\vartheta+3}c_{\vartheta}=0\\ e_{\vartheta+2}c_{\vartheta-2}+g_{\vartheta+2}c_{\vartheta-1}+h_{\vartheta+2}c_{\vartheta}+k_{\vartheta+2}c_{\vartheta+1}+o_{\vartheta+2}c_{\vartheta+2}=0\quad et\quad c_{\vartheta+2}=0\rightarrow e_{\vartheta+2}c_{\vartheta-2}+g_{\vartheta+2}c_{\vartheta-1}+h_{\vartheta+2}c_{\vartheta}=0\\ e_{\vartheta+1}c_{\vartheta-3}+g_{\vartheta+1}c_{\vartheta-2}+h_{\vartheta+1}c_{\vartheta-1}+k_{\vartheta+1}c_{\vartheta}+o_{\vartheta+1}c_{\vartheta+1}=0\quad et\quad c_{\vartheta+1}=0\rightarrow e_{\vartheta+1}c_{\vartheta-3}+g_{\vartheta+1}c_{\vartheta-2}+h_{\vartheta+1}c_{\vartheta-1}+k_{\vartheta+1}c_{\vartheta}=0\end{cases}$$

La condition d'arrêt de cette récurrence est également celle qui permet de se placer dans les conditions de l'équation dîtes de Hamburger avec une continuation analytique possible entre le voisinage de z=0 et celui de z=∞ .

Pour les racines indicielles des formes régulières en $z=\infty$ nous avons les relations suivantes entre-elles :

$$\rho^3 + 3\,\rho^2 + \rho(2 + a_{24}) - a_{36} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = -3 \\ \rho_1\rho_2 + \rho_1\rho_3 + \rho_2\rho_3 = 2 + a_{24} \\ \rho_1\rho_2\rho_3 = a_{36} \end{cases}$$

Pour les exposants des formes normales, β_1 possède trois racines strictement distinctes, notons les $\beta_{1,1}$, $\beta_{1,2}$ et $\beta_{1,3}$ et il s'ensuit trois valeurs possibles du second exposant β_2 noté également : $\beta_{2,1}$, $\beta_{2,2}$ et $\beta_{2,3}$ comme suit :

$$\beta_{1,1} = 0 \quad \beta_{1,2} = -\beta_{1,3} \Rightarrow \beta_{1,2}{}^2 = -a_{20}$$

$$\beta_{2,1} = -\frac{a_{31}}{a_{20}} \quad \beta_{2,2} = \frac{a_{31} + \beta_{1,2}a_{21}}{2a_{20}} \quad \beta_{2,3} = \frac{a_{31} - \beta_{1,2}a_{21}}{2a_{20}} \Rightarrow \beta_{2,1} + \beta_{2,2} + \beta_{2,3} = 0$$

Les trois valeurs de l'exposant σ sont ici plus simples à calculer :

$$\sigma_1 = \frac{a_{21}a_{31} - a_{20}a_{32}}{a_{20}{}^2} \quad \sigma_2 = \frac{9\,a_{20} + 3\beta_{1,2}\beta_{2,2}{}^2 + \beta_{2,2}a_{21} + \beta_{1,2}a_{22} + a_{32}}{2\,a_{20}} \quad \sigma_3 = \frac{9\,a_{20} + 3\beta_{1,3}\beta_{2,3}{}^2 + \beta_{2,3}a_{21} + \beta_{1,3}a_{22} + a_{32}}{2\,a_{20}}$$

$$\sigma_2 + \sigma_3 = 9 + \frac{a_{32}}{a_{20}} - \frac{a_{21}a_{31}}{a_{20}{}^2} \Rightarrow \sum_{i=1}^{i=3} \sigma_i = 9$$

<u>Conclusion il y a trois racines β_1 distinctes et trois valeurs σ distinctes provenant forcément de trois racines indicielles ρ distinctes</u> : l'équation différentielle n'admet au plus que la coexistence de deux formes normales.

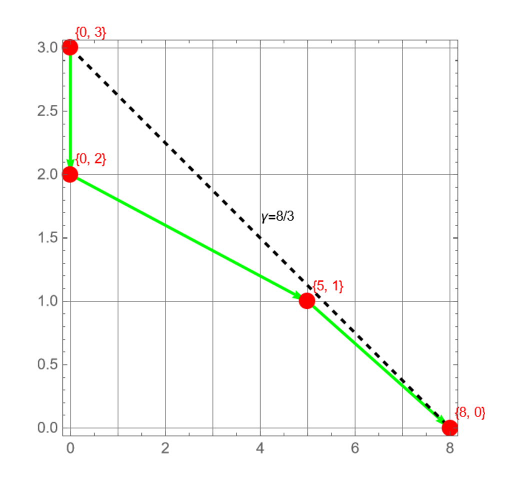
A.R.Forsythe, Chapitre 98, variante exercice n°1 page 309, considérons maintenant l'équation différentielle :

$$a_{2,0} = a_{3,0} = 0 \rightarrow y^{(3)}(z) + \frac{1}{z^5} \times \left(\sum_{l=0}^{l=3} a_{2,l+1} z^l \right) \times y'(z) + \frac{1}{z^8} \times \left(\sum_{l=0}^{l=5} a_{3,l+1} z^l \right) \times y(z) = 0$$

Rappelons que cette équation possède des solutions régulières de la forme : $y_\infty(z) = \sum_{l=0}^{l=+\infty} c_{\infty,l} z^{-l}$ *où l'exposant ρ est une racine de l'équation indicielle :*

$$\rho^3 + 3\rho^2 + \rho(2 + a_{24}) - a_{36} = 0 \Leftrightarrow \rho(\rho+1)(\rho+2) + \rho\, a_{24} - a_{36} = 0$$
$$f_0(\zeta) = \zeta(\zeta-1)(\zeta-2) + \zeta\, a_{24} = a_{36} \Rightarrow f_0(-\rho) = \rho(\rho+1)(\rho+2) + \rho\, a_{24} - a_{36} = 0$$

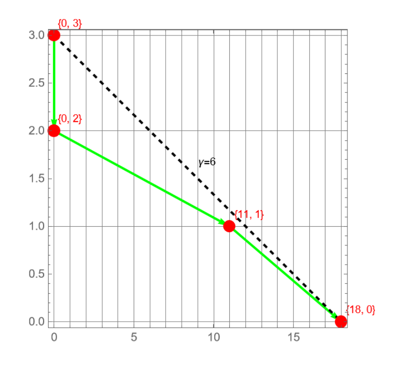
Le diagramme de Newton-Puisieux suggère le développement d'une forme subnormale en z=0 :



Pour revenir à des termes exponentiels en puissance entière de z effectuons le changement de variable $\zeta = z^{1/3}$ *puis* $\zeta \rightarrow z$ *et de fonction :* $y(\zeta) = \zeta^2 u(\zeta)$ *puis* $\zeta \rightarrow z$ *et* $u(z) \rightarrow y(z)$ *et l'équation différentielle s'écrit :*

$$y^{(3)}(z) + \left(\frac{9a_{21}}{z^{11}} + \frac{9a_{22}}{z^8} + \frac{9a_{23}}{z^5} + \frac{9a_{24} - 8}{z^2} \right) y'(z) + \left(\frac{27\, a_{31}}{z^{18}} + \frac{27\, a_{32}}{z^{15}} + 9\,\frac{2\, a_{21} + 3\, a_{33}}{z^{12}} + 9\,\frac{2\, a_{22} + 3\, a_{34}}{z^9} + 9\,\frac{2\, a_{23} + 3\, a_{35}}{z^6} + \frac{27 a_{36} + 18\, a_{24} + 8}{z^3} \right) y(z) = 0$$

Dont le diagramme de Newton-Puisieux est le suivant :



Ce qui suggère rien de moins qu'un terme exponentiel de la forme :

$$y(z) = e^{\Omega(z)} u(z) \quad \Omega'(z) = \frac{\beta_1}{z^2} + \frac{\beta_2}{z^3} + \frac{\beta_3}{z^4} + \frac{\beta_4}{z^5} + \frac{\beta_5}{z^6} \rightarrow \Omega(z) = -\frac{\beta_1}{z} - \frac{\beta_2}{2\,z^2} - \frac{\beta_3}{3\,z^3} - \frac{\beta_4}{4\,z^4} - \frac{\beta_5}{5\,z^5}$$

Le développement en série de l'expression: $(\Omega'(z))^3 + P_1(z)(\Omega'(z))^2 + P_2(z)(\Omega'(z))^1 + P_3(z)(\Omega'(z))^0$ *autour de z=0 à l'ordre 0 permet de fixer la valeur des paramètres* $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5$ *qui suit un système de 5 équations polynomiales du troisième degré :*

$$\begin{cases} A_1(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5) = \beta_5^{\,3} + 27a_{31} = 0 \\ A_2(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5) = \beta_4\beta_5 + 3a_{21} = 0 \\ A_3(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5) = \beta_4^{\,2}\beta_5 + \beta_3\beta_5^{\,2} + 3\beta_4 a_{21} = 0 \\ A_4(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5) = \beta_4^{\,3} + 6\beta_3\beta_4\beta_5 + 3\beta_2\beta_5^{\,2} + 9\beta_3 a_{21} + 27a_{32} = 0 \\ A_5(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5) = \beta_3\beta_4^{\,2} + \beta_3^{\,2}\beta_5 + 2\beta_2\beta_4\beta_5 + \beta_1\beta_5^{\,2} + 3\beta_2 a_{21} + 3\beta_5 a_{22} = 0 \end{cases}$$

$$(\Omega'(z))^3 + P_1(z)(\Omega'(z))^2 + P_2(z)(\Omega'(z))^1 + P_3(z)(\Omega'(z))^0 = \frac{A_1(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5)}{z^{18}} + \frac{3\beta_5 A_2(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5)}{z^{17}} +$$
$$+ \frac{3A_3(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5)}{z^{16}} + \frac{A_4(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5)}{z^{15}} + \frac{3A_5(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5)}{z^{14}} + O\left(\frac{1}{z^{13}}\right)$$

$$\text{De plus} \quad \begin{cases} A_3(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5) = \beta_4^{\,2}\beta_5 + \beta_3\beta_5^{\,2} + 3\beta_4 a_{21} = \beta_3\beta_5^{\,2} = 0 \Rightarrow \beta_3 = 0 \\ A_4(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5) = \beta_4^{\,3} + 6\beta_3\beta_4\beta_5 + 3\beta_2\beta_5^{\,2} + 9\beta_3 a_{21} + 27a_{32} = \beta_4^{\,3} + 3\beta_2\beta_5^{\,2} + 27a_{32} = 0 \\ A_5(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5) = \beta_3\beta_4^{\,2} + \beta_3^{\,2}\beta_5 + 2\beta_2\beta_4\beta_5 + \beta_1\beta_5^{\,2} + 3\beta_2 a_{21} + 3\beta_5 a_{22} = -3\beta_2 a_{21} + \beta_1\beta_5^{\,2} + 3\beta_5 a_{22} = 0 \end{cases}$$

Une simplification s'impose puisque $\beta_3=0$*.*

En insérant le terme exponentiel $y(z) = e^{-\frac{\beta_1}{z} - \frac{\beta_2}{2z^2} - \frac{\beta_4}{4z^4} - \frac{\beta_5}{5z^5}} u(z)$ *l'on obtient une équation différentielle du troisième degré qui possède une solution régulière :*

$$u^{(3)}(z) + 3\left(\frac{\beta_1}{z^2} + \frac{\beta_2}{z^3} + \frac{\beta_4}{z^5} + \frac{\beta_5}{z^6}\right)u''(z) +$$
$$+\left(\frac{9a_{24}-8}{z^2} - \frac{6\beta_1}{z^3} + \frac{3\left(\beta_1^{\,2} - 3\beta_2\right)}{z^4} + \frac{6\beta_1\beta_2 + 9a_{23}}{z^5} + 3\,\frac{\beta_2^{\,2} - 5\beta_4}{z^6} + 6\,\frac{\beta_1\beta_4 - 3\beta_5}{z^7} + 3\,\frac{2\beta_2\beta_4 + 2\beta_1\beta_5 + 3a_{22}}{z^8} + 6\,\frac{\beta_2\beta_5}{z^9} + 3\,\frac{\beta_4^{\,2}}{z^{10}} - 9\,\frac{a_{21}}{z^{11}} + 3\,\frac{\beta_5^{\,2}}{z^{12}}\right)u'(z) +$$
$$+\left(\begin{array}{l} \frac{8 + 18\,a_{24} + 27\,a_{36}}{z^3} + \frac{\beta_1(9\,a_{24} - 2)}{z^4} + \frac{\beta_2(9\,a_{24} + 4) - 6\beta_1^{\,2}}{z^5} + \frac{\beta_1^{\,3} - 15\beta_1\beta_2 + 3\,(6\,a_{23} + 9\,a_{35})}{z^6} + \\ + \frac{3\beta_1^{\,2}\beta_2 - 9\beta_2^{\,2} + 9\beta_1 a_{23} + \beta_4(9\,a_{24} + 22)}{z^7} + \frac{3\beta_1\left(\beta_2^{\,2} - 7\beta_4\right) + 34\beta_5 + 9\,\beta_2 a_{23} + 9\,\beta_5 a_{24}}{z^8} + \\ + \frac{\beta_2^{\,3} - 24\beta_2\beta_4 + 3\,\left(\beta_1^{\,2}\beta_4 - 8\beta_1\beta_5 + 6a_{22} + 9a_{34}\right)}{z^9} + 3\,\frac{2\beta_1\beta_2\beta_4 + \beta_1^{\,2}\beta_5 - 9\beta_2\beta_5 + 3\beta_1 a_{22} + 3\beta_4 a_{23}}{z^{10}} + \\ + 3\,\frac{\beta_2^{\,2}\beta_4 - 5\beta_4^{\,2} + \beta_2(2\beta_1\beta_5 + 3a_{22}) + 3\beta_5 a_{23}}{z^{11}} + \frac{3\left(\beta_1\beta_4^{\,2} + \beta_2^{\,2}\beta_5 + 39a_{21} + 9a_{33}\right)}{z^{12}} + 3\,\frac{\beta_2\beta_4^{\,2} - 6\beta_5^{\,2} - 3\,\beta_1 a_{21} + 3\beta_4 a_{22}}{z^{13}} \end{array}\right)u(z) = 0$$

dont l'équation indicielle est la suivante : $\sigma = 6 + \frac{3\beta_1 a_{21} - \beta_2\beta_4^{\,2} - 3\beta_4 a_{22}}{\beta_5^{\,2}}$.

Une autre petite « simplification » intervient dans le système des 4 équations algébriques de degré 3. On peut ainsi exprimer tous les autres paramètres en fonction du seul paramètre β_5 *:*

$$\begin{cases} \beta_5^{\,3} + 27a_{31} = 0 \\ \beta_4\beta_5 + 3a_{21} = 0 \\ \beta_4^{\,2}\beta_5 + 3\beta_4 a_{21} = 0 \\ \beta_4^{\,3} + 3\beta_2\beta_5^{\,2} + 27a_{32} = 0 \\ 2\beta_2\beta_4\beta_5 + \beta_1\beta_5^{\,2} + 3\beta_2 a_{21} + 3\beta_5 a_{22} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta_1 = \beta_5^{\,2} \times \frac{81\,a_{22}a_{31}^{\,2} - a_{21}^{\,4} - 27\,a_{21}a_{31}a_{32}}{729\,a_{31}^{\,3}} \\ \beta_2 = \beta_5 \times \frac{a_{21}^{\,3} + 27a_{31}a_{32}}{81\,a_{31}^{\,2}} \\ \beta_4 = \beta_5^{\,2} \times \frac{a_{21}}{9\,a_{31}} \end{cases}$$

L'injection d'un développement de la forme $u(z)=z^{\sigma}\sum_{l=0}^{l=+\infty} c_l z^l$ *conduit à une récurrence à 11 termes de qui est suffisamment compliqué pour que je m'interdise de la reproduire ici intégralement. Toutefois cette récurrence a la particularité suivante :*

$$\textit{Notation} \quad R_{j,l}=R_{j,l}\left(\beta_5,a_{2,1},a_{2,2},a_{2,3},a_{2,4},a_{3,1},a_{3,2},a_{3,3},a_{3,4},a_{3,5},a_{3,6}\right) \quad \widetilde{R}_{j,l}=\widetilde{R}_{j,l}\left(a_{2,1},a_{2,2},a_{2,3},a_{2,4},a_{3,1},a_{3,2},a_{3,3},a_{3,4},a_{3,5},a_{3,6}\right)$$

$$\begin{cases} R_{0,l}\,c_l+R_{1,l}c_{l-1}+R_{2,l}c_{l-2}+ \\ +R_{3,l}c_{l-3}+R_{4,l}c_{l-4}+R_{5,l}c_{l-5}+ \\ +R_{6,l}c_{l-6}+R_{7,l}c_{l-7}+R_{8,l}c_{l-8}+ \\ +R_{9,l}c_{l-9}+R_{10,l}c_{l-10}=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} R_{0,l}=\beta_5{}^2\widetilde{R}_{0,l}=3\,l\,\beta_5{}^2 \\ R_{1,l}=\widetilde{R}_{1,l} \\ R_{2,l}=\beta_5\widetilde{R}_{2,l} \\ R_{3,l}=\beta_5{}^2\widetilde{R}_{3,l} \\ R_{4,l}=\widetilde{R}_{4,l} \\ R_{5,l}=\beta_5\widetilde{R}_{5,l} \\ R_{6,l}=\beta_5{}^2\widetilde{R}_{6,l} \\ R_{7,l}=\widetilde{R}_{7,l} \\ R_{8,l}=\beta_5\widetilde{R}_{8,l} \\ R_{9,l}=\beta_5{}^2\widetilde{R}_{9,l} \\ R_{10,l}=\widetilde{R}_{10,l}=(l+\sigma-8)(l+\sigma-11)(l+\sigma-14)+9\,(l+\sigma-8)\,a_{24}+27\,a_{36}=f_0\left(\dfrac{l+\sigma-8}{3}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(z)=z^{\sigma}\sum_{l=0}^{l=+\infty}\dfrac{\widetilde{c}_l}{\beta_5{}^l}z^l \Rightarrow \beta_5\beta_5{}^2\widetilde{R}_{0,l}c_l+\beta_5\beta_5{}^{-1}\widetilde{R}_{1,l}c_{l-1}+\beta_5\beta_5{}^{-2}\beta_5\widetilde{R}_{2,l}c_{l-2}+\beta_5\beta_5{}^{-3}\beta_5{}^2\widetilde{R}_{3,l}c_{l-3}+\beta_5\beta_5{}^{-4}\widetilde{R}_{4,l}c_{l-4}+\beta_5\beta_5{}^{-5}\beta_5\widetilde{R}_{5,l}c_{l-5}+ \\ +\beta_5\beta_5{}^{-6}\beta_5{}^2\widetilde{R}_{6,l}c_{l-6}+\beta_5\beta_5{}^{-7}\widetilde{R}_{7,l}c_{l-7}+\beta_5\beta_5{}^{-8}\beta_5\widetilde{R}_{8,l}c_{l-8}+\beta_5\beta_5{}^{-9}\beta_5{}^2\widetilde{R}_{9,l}c_{l-9}+\beta_5\beta_5{}^{-10}\widetilde{R}_{10,l}c_{l-10}=0 \\ \Leftrightarrow \beta_5{}^3\widetilde{R}_{0,l}c_l+\widetilde{R}_{1,l}c_{l-1}+\widetilde{R}_{2,l}c_{l-2}+\widetilde{R}_{3,l}c_{l-3}+\beta_5{}^{-3}\widetilde{R}_{4,l}c_{l-4}+\beta_5{}^{-3}\widetilde{R}_{5,l}c_{l-5}+ \\ +\beta_5{}^{-3}\widetilde{R}_{6,l}c_{l-6}+\beta_5{}^{-6}\widetilde{R}_{7,l}c_{l-7}+\beta_5{}^{-6}\widetilde{R}_{8,l}c_{l-8}+\beta_5{}^{-6}\widetilde{R}_{9,l}c_{l-9}+\beta_5{}^{-9}\widetilde{R}_{10,l}c_{l-10}=0 \end{cases}$$

Dans ces conditions si le développement est mis sous la forme : $u(z)=z^{\sigma}\sum_{l=0}^{l=+\infty}\frac{\widetilde{c}_l}{\beta_5{}^l}z^l$ *alors la récurrence sur les coefficients* $\widetilde{c}_l$ *n'est plus dépendante explicitement de la valeur du paramètre* β_5 *. Ainsi lorsque les conditions d'arrêt de la récurrence sont acquises (ici elles sont au nombre de 10 en théorie), elles le seront donc quelque soit la valeur de* β_5 *ce qui signifie donc la coexistence potentielle des trois formes normales. L'une des contraintes d'arrêt de la récurrence à un indice* ϑ *s'écrit explicitement :* $\widetilde{R}_{10,\vartheta+10}=0=f_0\left(\frac{\vartheta+\sigma+2}{3}\right)$ *cela valide la relation* $\frac{k+\sigma}{3}=\frac{\vartheta+\sigma+2}{3}=-\rho\rightarrow k=\vartheta+2$ *et les trois formes normales sont donc liées à une seule et même racine de l'exposant régulier* ρ *. La coexistence des trois formes normales est donc acquise.*

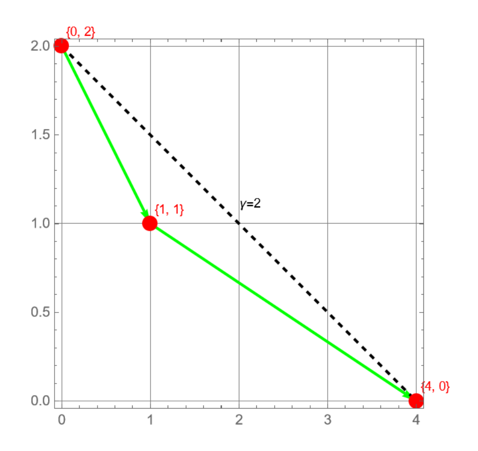
Exemple : équation différentielle du second degré, A.R.Forsythe, Chapitre 107, exercice n°1 page 341

Soit l'équation différentielle du troisième degré : $y''(z)+\left(a_0^{\;2}+\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\ldots\right)\times y(z)=0$

Pour cette équation différentielle, les points z=∞ et z=0 sont des points singulier essentiels. Au point z=∞ par le changement de variable z→1/z l'équation prend la forme suivante :

$$y''(z)+\frac{2}{z}y'(z)+\frac{a_0^{\;2}+a_1z+a_2z^2+\ldots}{z^4}y(z)=0$$

Et c'est maintenant le point z=0 qui nous occupe. Le diagramme de Newton-Puisieux en ce point est de la forme :



Cela conduit à proposer un terme exponentiel comme suit: $y(z)=e^{\Omega(z)}u(z) \quad \Omega(z)=\frac{\beta}{z}$ *. Le développement en série de l'expression :* $(\Omega'(z))^2+P_1(z)(\Omega'(z))^1+P_2(z)(\Omega'(z))^0$ *autour de z=0 à l'ordre 0 permet de fixer la valeur du paramètres β qui suit une équation polynomiale du second degré :* $(\Omega'(z))^2+P_1(z)(\Omega'(z))^1+P_0(z)(\Omega'(z))^0=\frac{a_0^{\;2}+\beta^2}{z^4}+O\left(\frac{1}{z^3}\right)\Rightarrow a_0^{\;2}+\beta^2=0$ *. En insérant le terme exponentiel* $y(z)=e^{\frac{\beta}{z}}u(z) \quad avec \quad a_0^{\;2}+\beta^2=0$ *l'on obtient une équation différentielle du second degré qui possède une solution régulière :* $u''(z)+\frac{2(z-\beta)}{z^2}u'(z)+\frac{a_1+a_2z+\ldots}{z^3}u(z)=0$ *dont l'équation indicielle est la suivante :* $\sigma=\frac{a_1}{2\beta}$ *.*

L'injection d'un développement de la forme $u(z)=z^{\sigma}\sum_{l=0}^{l=+\infty}c_l z^l$ *conduit à une récurrence à nombre de termes variable de la forme :*

$$\begin{cases} c_0=1 \quad c_1=\dfrac{(l-\sigma)(l-\sigma-1)\,c_0+a_2\,c_0}{2l\beta} \quad c_2=\dfrac{(l-\sigma)(l-\sigma-1)\,c_1+a_2\,c_1+a_3\,c_0}{2l\beta} \\ c_3=\dfrac{(l-\sigma)(l-\sigma-1)\,c_2+a_2\,c_2+a_3\,c_1+a_4\,c_0}{2l\beta} \Rightarrow c_l=\dfrac{(l-\sigma)(l-\sigma-1)\,c_{l-1}+\sum_{j=2}^{j=l+1}a_j c_{l+1-j}}{2l\beta}=\dfrac{(l-\sigma)(l-\sigma-1)\,c_{l-1}+\sum_{j=1}^{j=l}a_{j+1}c_{l-j}}{2l\beta} \end{cases}$$

Dans l'hypothèse où un tel développement converge (ce n'est en général pas le cas pour les valeurs réelles de z), alors la forme normale s'écrit :

$$y(z)=e^{\beta z}\,z^{-\frac{a_1}{2\beta}}\times\sum_{l=0}^{l=+\infty}\frac{c_l}{z^l} \quad avec \quad \beta^2=-a_0{}^2 \Rightarrow \beta=\varepsilon\, i\, a_0 \quad \varepsilon^2=1$$

Ce qui peut s'écrire sous cette forme :

$$y(\varepsilon,z)=e^{\varepsilon\, i\left(a_0 z+\frac{a_1}{2a_0}Log(z)\right)}\times\sum_{l=0}^{l=+\infty}\frac{c_l(\varepsilon)}{z^l} \quad avec \quad \varepsilon^2=0 \quad avec \quad c_l(\varepsilon)=-i\,\varepsilon\,\frac{(l-\sigma)(l-\sigma-1)\,c_{l-1}(\varepsilon)+\sum_{j=1}^{j=l}a_{j+1}c_{l-j}(\varepsilon)}{2l\,a_0}$$

De plus $e^{\varepsilon\, i\left(a_0 z+\frac{a_1}{2a_0}Log(z)\right)}=Cos\left(a_0 z+\frac{a_1}{2a_0}Log(z)\right)+i\,\varepsilon\,Sin\left(a_0 z+\frac{a_1}{2a_0}Log(z)\right)$.

Décomposons les deux récurrences en chacune des parties réelles et imaginaires :

$$c_l^+=c_l(1)=-i\,\frac{(l-\sigma)(l-\sigma-1)\,c_{l-1}^+ +\sum_{j=1}^{j=l}a_{j+1}c_{l-j}^+}{2l\,a_0} \quad et \quad c_l^-=c_l(-1)=i\,\frac{(l-\sigma)(l-\sigma-1)\,c_{l-1}^- +\sum_{j=1}^{j=l}a_{j+1}c_{l-j}^-}{2l\,a_0}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} c_l^+ + c_l^- = -\dfrac{(l-\sigma)(l-\sigma-1)\,i\left(c_{l-1}^+ - c_{l-1}^-\right)+\sum_{j=1}^{j=l}a_{j+1}\,i\left(c_{l-j}^+ - c_{l-j}^-\right)}{2l\,a_0} \\ c_l^+ - c_l^- = -\dfrac{(l-\sigma)(l-\sigma-1)\,i\left(c_{l-1}^+ + c_{l-1}^-\right)+\sum_{j=1}^{j=l}a_{j+1}\,i\left(c_{l-j}^+ + c_{l-j}^-\right)}{2l\,a_0} \end{cases}$$

Par un raisonnement par récurrence il est donc aisé d'obtenir les résultats suivants :

$c_l^+ + c_l^-$ *récurrence purement réel*

$c_l^+ - c_l^-$ *récurrence purement imaginaire*

Posons donc les deux les deux récurrences modifiées :

$$\begin{cases} b_l = c_l^+ + c_l^- \\ d_l = \dfrac{c_l^+ - c_l^-}{i} \end{cases}$$

Ces récurrences croisées s'expriment comme suit :

$$\begin{cases} b_0 = 1 \quad b_l = \dfrac{-2a_0a_1(2l-1)b_{l-1} + \left(4l(l-1)a_0^{\ 2} - a_1^{\ 2}\right)d_{l-1}}{8l\ a_0^{\ 3}} + \dfrac{1}{2\,l\,a_0} \times \displaystyle\sum_{j=1}^{j=l} a_{j+1}\ d_{s-l} \\ d_0 = 1 \quad d_l = \dfrac{\left(a_1^{\ 2} - 4l(l-1)a_0^{\ 2}\right)b_{l-1} - 2a_0a_1(2l-1)d_{l-1}}{8l\ a_0^{\ 3}} - \dfrac{1}{2\,l\,a_0} \times \displaystyle\sum_{j=1}^{j=l} a_{j+1}\ b_{s-l} \end{cases}$$

Et les deux solutions sont :

$$\begin{cases} y^+(z) = \left(Cos\left(a_0z + \dfrac{a_1}{2a_0}Log(z)\right) + i\ Sin\left(a_0z + \dfrac{a_1}{2a_0}Log(z)\right)\right) \times \left(f(z) + i\ g(z)\right) \\ y^-(z) = \left(Cos\left(a_0z + \dfrac{a_1}{2a_0}Log(z)\right) - i\ Sin\left(a_0z + \dfrac{a_1}{2a_0}Log(z)\right)\right) \times \left(f(z) - i\ g(z)\right) \\ f(z) = 1 + \displaystyle\sum_{l=1}^{l=+\infty} \dfrac{b_l}{2z^l} \qquad et \qquad g(z) = \displaystyle\sum_{l=1}^{l=+\infty} \dfrac{d_l}{2z^l} \end{cases}$$

En introduisant les deux combinaisons linéaires suivantes :

$$\left.\begin{aligned} y_1(z) &= Cos\left(a_0z + \frac{a_1}{2a_0}Log(z)\right) \times f(z) - Sin\left(a_0z + \frac{a_1}{2a_0}Log(z)\right) \times g(z) \\ y_2(z) &= Sin\left(a_0z + \frac{a_1}{2a_0}Log(z)\right) \times f(z) + Cos\left(a_0z + \frac{a_1}{2a_0}Log(z)\right) \times g(z) \end{aligned}\right\} \qquad f(z) = 1 + \sum_{l=1}^{l=+\infty} \frac{b_l}{2z^l} \qquad et \qquad g(z) = \sum_{l=1}^{l=+\infty} \frac{d_l}{2z^l}$$

Toute combinaison linéaire s'écrit

$$y(z) = A_0y_1(z) + B_0y_2(z) = Cos\left(a_0z + \frac{a_1}{2a_0}Log(z)\right) \times \left(A_0f(z) + B_0g(z)\right) + Sin\left(a_0z + \frac{a_1}{2a_0}Log(z)\right) \times \left(B_0f(z) - A_0g(z)\right)$$

$$A_0f(z) + B_0g(z) = A_0 + \sum_{l=1}^{l=+\infty} \frac{A_0b_l + B_0d_l}{2z^l} \qquad B_0f(z) - A_0g(z) = B_0 + \sum_{l=1}^{l=+\infty} \frac{B_0b_l - A_0d_l}{2z^l}$$

$$\Rightarrow y(z) = A_0y_1(z) + B_0y_2(z) = Cos\left(a_0z + \frac{a_1}{2a_0}Log(z)\right) \times \left(A_0 + \sum_{l=1}^{l=+\infty} \frac{A_0b_l + B_0d_l}{2} \times z^{-l}\right) + Sin\left(a_0z + \frac{a_1}{2a_0}Log(z)\right) \times \left(B_0 + \sum_{l=1}^{l=+\infty} \frac{B_0b_l - A_0d_l}{2} \times z^{-l}\right)$$

Exemple : équation différentielle du produit de deux solutions d'une équation différentielle du second degré : formule de quadrature

Voici une méthode de quadrature développée en 1872 par Charles Hermite dans un feuillet publié de son cours à Polytechnique, dénommé « Sur l'équation de Lamé », et développé plus précisément dans un extrait d'une lettre au mathématicien italien F.Brioschi portant le même nom et publié en 1877. Le problème posé est de trouver l'équation différentielle du produit de deux solutions d'une équation différentielle du second degré de la forme :

$$y''(z)+p(z)\,y'(z)+q(z)\,y(z)=0$$

Formons le carré de la fonction et dérivons son équation différentielle du troisième degré :

$$\begin{cases} w(z)=(y(z))^2 \Rightarrow w'(z)=2y(z)y'(z)\Rightarrow w''(z)=2y(z)y''(z)+2(y'(z))^2 \\ y''(z)=-p(z)\,y'(z)-q(z)\,y(z) \end{cases}$$

$$\Rightarrow w''(z)=2(y'(z))^2-2p(z)w'(z)-2q(z)\,w(z)\Rightarrow w''(z)+2p(z)w'(z)+2q(z)\,w(z)=2(y'(z))^2$$

$$\Rightarrow (w''(z)+2p(z)w'(z)+2q(z)\,w(z))'=4y'(z)y''(z)=-4p(z)(y'(z))^2-4\,q(z)\,y(z)y'(z)=-4p(z)(y'(z))^2-2\,q(z)\,w'(z)$$

$$\Rightarrow w^{(3)}(z)+3p(z)w''(z)+\left(p'(z)+2(p(z))^2+4q(z)\right)w'(z)+2\,(q'(z)+2p(z)q(z))\,w(z)=0$$

Pour finir, seul l'utilisation du carré de la fonction est suffisante pour déduire l'équation différentielle du produit de deux solutions quelconques de l'équation du second degré. Car en prenant une combinaison linéaire quelconque solution de l'équation du second degré :

$$w(z)=(a\,y_0(z)+b\,y_1(z))^2=a^2(y_0(z))^2+b^2(y_1(z))^2+2ab\,y_0(z)y_1(z)$$

$$\left.\begin{array}{l} (y_0(z))^2 \quad \text{respecte l'équation du troisième degré} \\ (y_1(z))^2 \quad \text{respecte l'équation du troisième degré} \\ w(z)=(a\,y_0(z)+b\,y_1(z))^2 \quad \text{respecte l'équation du troisième degré} \end{array}\right\} \Rightarrow y_0(z)y_1(z) \quad \text{respecte l'équation du troisième degré}$$

Il existe un invariant général à cette équation différentielle du troisième, trouvons le par intégration directe :

$$E(z)=w^{(3)}(z)+3p(z)\,w''(z)+\left(p'(z)+2p^2(z)+4q(z)\right)w'(z)+2(2p(z)\,q(z)+q'(z))\,w(z)=0$$

$$\text{Posons} \quad I(z)=2w(z)\,w''(z)-(w'(z))^2+2p(z)\,w(z)\,w'(z)+4\,q(z)\,(w(z))^2 \qquad \text{il vient} \rightarrow \frac{1}{2w(z)}\left(\frac{d}{dz}(I(z))+2I(z)p(z)\right)=E(z)$$

$$\text{D'où} \quad E(z)=0 \Leftrightarrow \frac{d}{dz}(I(z))+2I(z)p(z)=0$$

On peut toujours exprimer p(z) comme dérivant d'une forme exponentielle, et dans le cas par exemples des équations de Lamé, Heun, Legendre et d'autre encore la fonction f(z) est explicite :

$$\text{Soit} \quad f(z) \quad \text{la fonction telle que} \quad p(z)=\frac{f'(z)}{f(z)}\Rightarrow (Log(f(z)))'=p(z)\Rightarrow f(z)=e^{\int_c^z d\zeta\,p(\zeta)}$$

$$\Rightarrow f(z)\frac{d}{dz}(I(z))+2I(z)f'(z)=0\Leftrightarrow \frac{1}{f(z)}\frac{d}{dz}\left(f(z)^2 I(z)\right)=0\Leftrightarrow \frac{d}{dz}\left(f(z)^2 I(z)\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \nu^2=f(z)^2 I(z)=e^{2\times\int_c^z d\zeta\,p(\zeta)}\left(2w(z)\,w''(z)-(w'(z))^2+2p(z)\,w(z)\,w'(z)+4\,q(z)\,(w(z))^2\right)=\text{un invariant (constante)}$$

On a donc trouvé un invariant, noté ν^2 par convention

Supposons maintenant que l'équation différentielle a la forme suivante :

$$\begin{cases} y''(z)+\dfrac{f'(z)}{f(z)}\,y'(z)+\dfrac{g(z)}{f(z)}\,y(z)=0 \\ p(z)=\dfrac{f'(z)}{f(z)} \quad q(z)=\dfrac{g(z)}{f(z)} \end{cases}$$

Or le Wronskien de deux solutions indépendantes de cette équation différentielle est toujours de la forme :

$$\frac{d}{dz}Log\left(y_2(z)y'_1(z)-y'_2(z)y_1(z)\right)=-\frac{d}{dz}Log\left(f(z)\right)\Rightarrow y_2(z)y'_1(z)-y'_2(z)y_1(z)=\frac{C}{f(z)}$$

Supposons maintenant que la solution w(z) du produit de ces deux solutions indépendantes soit parfaitement connue, alors :

$$\begin{aligned} & w(z)=y_1(z)y_2(z)\Rightarrow y_2(z)y'_1(z)+y'_2(z)y_1(z)=w'(z) \\ & \Rightarrow y_2(z)y'_1(z)=\frac{1}{2}\left(w'(z)+\frac{C}{f(z)}\right) \qquad y'_2(z)y_1(z)=\frac{1}{2}\left(w'(z)-\frac{C}{f(z)}\right) \\ & \Rightarrow \frac{y'_1(z)}{y_1(z)}=\frac{1}{2}\left(\frac{w'(z)}{w(z)}+\frac{C}{w(z)f(z)}\right) \qquad \frac{y'_2(z)}{y_2(z)}=\frac{1}{2}\left(\frac{w'(z)}{w(z)}-\frac{C}{w(z)f(z)}\right) \\ & \Rightarrow y_{1,2}(z)=G\,e^{\frac{1}{2}\left(Log(w(z))\pm C\int_z\frac{dt}{w(t)f(z)}\right)}=G\sqrt{w(z)}\,e^{\pm\frac{C}{2}\int_z\frac{dt}{w(t)f(z)}} \end{aligned}$$

La constante d'intégration C peut être trouvée grâce à la valeur de l'invariant v^2 qui a été calculé précédemment. En effet tout invariant est constant quelque soit les valeurs de z. Choisissons une valeur z_0 telle que la fonction $y_1(z_0)$ s'annule et donc dans le même temps le produit suivant s'annule $w(z_0)=y_1(z_0)y_2(z_0)=0$. Alors la valeur de la constante v^2 devient :

$$z_0 \quad tel\ que \quad y_1(z_0)=0 \quad y_2(z_0)\neq 0\rightarrow w(z_0)=0 \quad w'(z_0)=y_1'(z_0)y_2(z_0)\Rightarrow v^2=-f(z_0)^2\left(y_1'(z_0)y_2(z_0)\right)^2$$

Ainsi la constante d'intégration se calcule maintenant plus facilement puisque :

$$y_2(z)y'_1(z)-y'_2(z)y_1(z)=\frac{C}{f(z)}\Rightarrow y_2(z_0)y'_1(z_0)=\frac{C}{f(z_0)}\Rightarrow C=f(z_0)y_2(z_0)y'_1(z_0)\Rightarrow v^2=-C^2\Rightarrow C=\pm\,i\,v$$

D'où la forme des deux solutions indépendantes :

$$\begin{cases} y_{1,2}(z) \quad solution\ de \quad y''(z)+p(z)\,y'(z)+q(z)\,y(z)=0 \quad avec \quad p(z)=\dfrac{f'(z)}{f(z)} \quad q(z)=\dfrac{g(z)}{f(z)} \\ y_{1,2}(z)=G\sqrt{w(z)}\,e^{\pm\frac{i v}{2}\int_z\frac{dt}{w(t)f(t)}} \\ v^2=f(z)^2\left(2w(z)\,w''(z)-\left(w'(z)\right)^2+2\,p(z)\,w(z)\,w'(z)+4\,q(z)\left(w(z)\right)^2\right) \\ w(z) \quad solution\ de \quad w^{(3)}(z)+3\,p(z)w''(z)+\left(p'(z)+2\left(p(z)\right)^2+4q(z)\right)w'(z)+2\left(q'(z)+2\,p(z)q(z)\right)w(z)=0 \end{cases}$$

Or dans certains cas la solution de l'équation du troisième degré peut être déterminée sous la forme d'un polynôme, ou sous une forme algébrique et dans ce cas la formule de quadrature ci-dessus prend tout son sens pour explorer de nouvelles solutions de l'équation différentielle de départ du second degré.

Que se passe-t-il lorsque la forme de l'équation différentielle est la suivante :

$$p(z) \equiv 0 \rightarrow y''(z) + q(z)\, y(z) = 0$$

Dans ce cas le Wronskien de deux solutions est égal à une constante, considérons donc la fonction f(z) constante, en l'occurrence prenons l'unité : f(z)=1. Il vient donc :

$$\frac{d}{dz} Log\left(y_2(z) y'_1(z) - y'_2(z) y_1(z)\right) = 0 \Rightarrow y_2(z) y'_1(z) - y'_2(z) y_1(z) = C$$

Et dans ce cas :

$$y_2(z) y'_1(z) = \frac{1}{2}\left(w'(z) + C\right) \qquad y'_2(z) y_1(z) = \frac{1}{2}\left(w'(z) - C\right)$$

$$\Rightarrow \frac{y'_1(z)}{y_1(z)} = \frac{1}{2}\left(\frac{w'(z)}{w(z)} + \frac{C}{w(z)}\right) \qquad \frac{y'_2(z)}{y_2(z)} = \frac{1}{2}\left(\frac{w'(z)}{w(z)} - \frac{C}{w(z)}\right) \Rightarrow y_{1,2}(z) = G\sqrt{w(z)}\, e^{\pm \frac{C}{2}\int^{z} \frac{dt}{w(t)}}$$

L'équation différentielle du troisième degré et l'invariant sont les suivants :

$$\begin{cases} w(z) \quad solution\ de \quad w^{(3)}(z) + 4\, q(z)\, w'(z) + 2\, q'(z)\, w(z) = 0 \\ \nu^2 = 2 w(z)\, w''(z) - \left(w'(z)\right)^2 + 4\, q(z) \left(w(z)\right)^2 \\ y_{1,2}(z) = G\sqrt{w(z)}\, e^{\pm \frac{i\nu}{2}\int^{z} \frac{dt}{w(t)}} \end{cases}$$

Exemple : équation différentielle du produit de deux solutions de deux équations différentielles du second degré de « parité opposée » : A.R.Forsythe, Chapitre 108, exercice n°1, page 346

Soit l'équation différentielle du second degré : $y''(z)+A_0(z)\,y'(z)+A_1(z)\,y(z)=0$ *dont la solution s'écrit :* $y(z)=\Phi(z)$ *et prenons également que la fonction* $\tilde{y}(z)=\Phi(-z)$ *qui est solution de l'équation différentielle* $\tilde{y}''(z)-A_0(-z)\,\tilde{y}'(z)+A_1(-z)\,\tilde{y}(z)=\tilde{y}''(z)+B_0(z)\,\tilde{y}'(z)+B_1(z)\,\tilde{y}(z)=0$, *avec* $\begin{cases}B_0(z)=-A_0(-z)\\B_1(z)=A_1(-z)\end{cases}$ *alors construisons l'équation différentielle de la fonction g(z) construite à partir du produit d'une solution de la première équation et de la deuxième équation :* $g(z)=y(z)\,\tilde{y}(z)$.

Nous allons voir que :
- en général l'équation différentielle de la fonction g(z) est du quatrième ordre ,
- si l'égalité suivante est vérifiée : $B_1(z)-\frac{1}{2}B_0'(z)-\frac{1}{4}(B_0(z))^2=A_1(z)-\frac{1}{2}A_0'(z)-\frac{1}{4}(A_0(z))^2$ *alors l'équation différentielle est du troisième ordre ;*
- la fonction $\frac{y'(z)}{y(z)}$ *est la racine d'une équation quadratique dont les coefficients sont fonctions de g(z). Il en est de même de la fonction* $\frac{\tilde{y}'(z)}{\tilde{y}(z)}$

Voici donc notre problème : $\begin{cases}y''(z)+A_0(z)\,y'(z)+A_1(z)\,y(z)=0\\\tilde{y}''(z)+B_0(z)\,\tilde{y}'(z)+B_1(z)\,\tilde{y}(z)=0\end{cases}$

Démontrons d'abord que les fonctions $\frac{y'(z)}{y(z)}$ *et* $\frac{\tilde{y}'(z)}{\tilde{y}(z)}$ *sont les racines d'une équation quadratique dont les coefficients sont fonctions de y(z) par les relations suivantes :*

$$y''(z)+A_0(z)\,y'(z)+A_1(z)\,y(z)=0 \qquad \tilde{y}''(z)+B_0(z)\,\tilde{y}'(z)+B_1(z)\,\tilde{y}(z)=0$$

$$g(z)=y(z)\tilde{y}(z) \quad Notons \quad X_0(z)=\frac{y'(z)}{y(z)}=(Log(y(z)))' \quad X_1(z)=\frac{\tilde{y}'(z)}{\tilde{y}(z)}=(Log(\tilde{y}(z)))'\Rightarrow\frac{g'(z)}{g(z)}=X_0(z)+X_1(z)$$

$$g''(z)=y''(z)\tilde{y}(z)+2y'(z)\tilde{y}'(z)+y(z)\tilde{y}''(z)\Rightarrow\frac{g''(z)}{g(z)}=\frac{-\tilde{y}(z)(A_0(z)\,y'(z)+A_1(z)\,y(z))+2y'(z)\tilde{y}'(z)-y(z)((B_0(z)\,\tilde{y}'(z)+B_1(z)\,\tilde{y}(z)))}{y(z)\tilde{y}(z)}=$$

$$\Rightarrow\frac{g''(z)}{g(z)}=-A_0(z)\,X_0(z)-A_1(z)+2X_0(z)X_1(z)-B_0(z)\,X_1(z)-B_1(z)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{g''(z)}{g(z)}=-A_0(z)\,X_0(z)-A_1(z)+2X_0(z)\left(\frac{g'(z)}{g(z)}-X_0(z)\right)-B_0(z)\left(\frac{g'(z)}{g(z)}-X_0(z)\right)-B_1(z)\\\frac{g''(z)}{g(z)}=-A_0(z)\left(\frac{g'(z)}{g(z)}-X_1(z)\right)-A_1(z)+2\left(\frac{g'(z)}{g(z)}-X_1(z)\right)X_1(z)-B_0(z)\,X_1(z)-B_1(z)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2(X_0(z))^2+X_0(z)\left(A_0(z)-B_0(z)-2\,\frac{g'(z)}{g(z)}\right)+A_1(z)+B_1(z)+B_0(z)\,\frac{g'(z)}{g(z)}+\frac{g''(z)}{g(z)}=0\\2(X_1(z))^2+X_1(z)\left(B_0(z)-A_0(z)-2\,\frac{g'(z)}{g(z)}\right)+A_1(z)+B_1(z)+A_0(z)\,\frac{g'(z)}{g(z)}+\frac{g''(z)}{g(z)}=0\end{cases}$$

Ce sont des équations de quadrature permettant par intégration de trouver y(z) en fonction du produit w(z).

Trouvons maintenant l'équation différentielle du quatrième degré du produit : $g(z)=y(z)\,\tilde{y}(z)$. *Dans la progression on trouve d'abord une équation du troisième degré, puis du 4ème qui en découle . Pour simplifier omettons l'argument z, nous avons :*

$$\begin{cases} y''+A_0y'+A_1\,y=0 \\ \tilde{y}''+B_0\,\tilde{y}'+B_1\,\tilde{y}=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} g'=y'\tilde{y}+y\,\tilde{y}' \\ g''=y''\tilde{y}+2y'\tilde{y}'+y\,\tilde{y}''=-(A_0y'+A_1\,y)\,\tilde{y}+2y'\tilde{y}'-y\,(B_0\tilde{y}'+B_1\tilde{y}) \end{cases}$$

$$\rightarrow g''+(A_1+B_1)\,g+A_0g'=(A_0-B_0)\,y\,\tilde{y}'+2y'\tilde{y}'\rightarrow (A_0-B_0)\,y\,\tilde{y}'=g''+(A_1+B_1)\,g+A_0g'-2y'\tilde{y}'$$

$$\textit{Dérivation}\rightarrow (g''+(A_1+B_1)\,g+A_0g')'=(A_0'-B_0')\,y\,\tilde{y}'+(A_0-B_0)(y\,\tilde{y}''+y'\,\tilde{y}')+2y''\tilde{y}'+2y'\tilde{y}''$$

$$\rightarrow (g''+(A_1+B_1)\,g+A_0g')'=((A_0'-B_0')-B_0(A_0-B_0)-2A_1)\,y\,\tilde{y}'+(A_0-B_0-2A_0-2B_0)\,y'\,\tilde{y}'-B_1(A_0-B_0)\,g-2B_1y'\tilde{y}$$

$$\rightarrow (g''+(A_1+B_1)\,g+A_0g')'=(A_0'-B_0'-2A_1+2B_1-B_0(A_0-B_0))\,y\,\tilde{y}'-(A_0+3B_0)\,y'\,\tilde{y}'-B_1(A_0-B_0)\,g-2B_1g'$$

$$\rightarrow (g''+(A_1+B_1)\,g+A_0g')'=(A_0'-B_0'-2A_1+2B_1)\,y\,\tilde{y}'-(A_0+B_0)\,y'\,\tilde{y}'-B_1(A_0-B_0)\,g-2B_1g'-B_0(g''+(A_1+B_1)\,g+A_0g')$$

$$\textit{Comme}\quad y'\tilde{y}'=\frac{g''+(A_1+B_1)\,g+A_0g'}{2}-\frac{(A_0-B_0)\,y\,\tilde{y}'}{2}$$

$$\rightarrow (g''+(A_1+B_1)\,g+A_0g')'=\left(A_0'-B_0'-2A_1+2B_1+\frac{A_0^{\,2}-B_0^{\,2}}{2}\right)y\,\tilde{y}'-(A_0+B_0)\frac{g''+(A_1+B_1)\,g+A_0g'}{2}-B_1(A_0-B_0)\,g-2B_1g'-B_0(g''+(A_1+B_1)\,g+A_0g')$$

$$\rightarrow (g''+(A_1+B_1)\,g+A_0g')'=\left(A_0'+\frac{A_0^{\,2}}{2}-2A_1-\left(B_0'+\frac{B_0^{\,2}}{2}-2B_1\right)\right)y\,\tilde{y}'-B_1(A_0-B_0)\,g-2B_1g'-\frac{A_0+3B_0}{2}(g''+(A_1+B_1)\,g+A_0g')$$

Si maintenant la condition : $A_0'+\frac{A_0^{\,2}}{2}-2A_1=B_0'+\frac{B_0^{\,2}}{2}-2B_1$ *est remplie alors l'expression devient :*

$$(g''+(A_1+B_1)\,g+A_0g')'=-B_1(A_0-B_0)\,g-2B_1g'-\frac{A_0+3B_0}{2}(g''+(A_1+B_1)\,g+A_0g')$$

qui est exactement une équation différentielle du 3ème degré portant uniquement sur la fonction g(z).

L'équation générale du quatrième degré s'obtient en dérivant une nouvelle fois l'expression générale :

$$(g''+(A_1+B_1)\,g+A_0g')'=\left(A_0'+\frac{A_0^{\,2}}{2}-2A_1-\left(B_0'+\frac{B_0^{\,2}}{2}-2B_1\right)\right)y\,\tilde{y}'-B_1(A_0-B_0)\,g-2B_1g'-\frac{A_0+3B_0}{2}(g''+(A_1+B_1)\,g+A_0g')$$

Cela permet d'exprimer une expression différentielle du quatrième degré en fonction des sous expressions : $y'\,\tilde{y}'$ *et* $y\,\tilde{y}'$ *. Puis en lui substituant la valeur de* $y\,\tilde{y}'$ *:*

$$y\,\tilde{y}'=\frac{(g''+(A_1+B_1)\,g+A_0g')'+B_1(A_0-B_0)\,g+2B_1g'+\frac{A_0+3B_0}{2}(g''+(A_1+B_1)\,g+A_0g')}{\left(A_0'+\frac{A_0^{\,2}}{2}-2A_1-\left(B_0'+\frac{B_0^{\,2}}{2}-2B_1\right)\right)}$$

on élimine directement toutes ces expressions $y'\,\tilde{y}'$ *et* $y\,\tilde{y}'$ *au profit des seules valeurs de g,g' et g'' .*

L'équation du troisième degré si la condition précédente est remplie est donc :

$$\text{Si}\quad A_0'+\frac{A_0^2}{2}-2A_1=B_0'+\frac{B_0^2}{2}-2B_1\quad \text{alors}$$

$$g^{(3)}+\left(A_1'+B_1'\right)g+\left(A_1+B_1\right)g'+A_0'g'+A_0g''+B_1\left(A_0-B_0\right)g+2B_1g'+\frac{A_0+3B_0}{2}\left(g''+\left(A_1+B_1\right)g+A_0g'\right)=0$$

$$\Leftrightarrow g^{(3)}+3\,\frac{A_0+B_0}{2}\,g''+\left(A_1+3B_1+A_0'+A_0\,\frac{A_0+3B_0}{2}\right)g'+\left(A_1'+B_1'+A_0B_1+A_1B_0+\frac{\left(A_0+B_0\right)\left(A_1+B_1\right)}{2}\right)g=0$$

Ainsi lorsque la condition $A_0'+\frac{A_0^2}{2}-2A_1=B_0'+\frac{B_0^2}{2}-2B_1$ *est remplie alors il n'est pas possible d'obtenir une valeur de* $y\,\tilde{y}'$ *et donc de* $y'\,\tilde{y}=g'-y\,\tilde{y}'$ *comme unique fonction de g,g',g'' (en l'occurrence puisque l'équation différentielle de g est du troisième degré).*

S'il n'est pas possible d'exprimer ce produit sous cette forme $y'\,\tilde{y}=\Phi\left(g,g',g''\right)$*, on ne peut trouver une quadrature par intégration directe sous la forme :* $y(z)=Exp\left(\int_{z_0}^{z}d\zeta\,\frac{\Phi\left(g(\zeta),g'(\zeta),g''(\zeta)\right)}{g(\zeta)}\right)$*. Il faut donc se servir de la formule de quadrature sous la forme d'une équation polynomiale du second degré en* $X_0(z)=\frac{y'(z)}{y(z)}$ *:* $2\left(X_0(z)\right)^2+X_0(z)\left(A_0(z)-B_0(z)-2\,\frac{g'(z)}{g(z)}\right)+A_1(z)+B_1(z)+B_0(z)\,\frac{g'(z)}{g(z)}+\frac{g''(z)}{g(z)}=0$

<u>Cas particulier :</u> $A_0=B_0\quad et\quad A_1=B_1$

Cas particulier si $A_0=B_0\quad et\quad A_1=B_1$ *: l'équation devient :* $\left(g''+2A_1g+A_0g'\right)'=-2A_1g'-2A_0\left(g''+2A_1g+A_0g'\right)$*, qui s'écrit encore :*

$$g^{(3)}(z)+2A_1'g+2A_1g'+A_0g''+A_0'g'+2A_1g'+2A_0\left(g''+2A_1g+A_0g'\right)=0\Leftrightarrow g^{(3)}(z)+3A_0g''+\left(A_0'+4A_1+2A_0^2\right)g'+2\left(A_1'+2A_0A_1\right)g=0$$

Et l'on retrouve l'équation différentielle du troisième degré de l'exemple précédent.

Il s'agit donc de respecter les deux conditions : $A_0(z)=-A_0(-z)\quad et\quad A_1(z)=A_1(-z)$ *, soit que la fonction* A_0 *soit impaire et la fonction* A_1 *soit paire. Cela correspond entre autre à ce que la fonction y(z) soit en définitive paire .*

Les deux équations de quadrature s'expriment sous une forme unique :

$$X_0(z)=X_1(z)\rightarrow 2\left(X_0(z)\right)^2-2\,\frac{g'(z)}{g(z)}X_0(z)+2A_1(z)+A_0(z)\,\frac{g'(z)}{g(z)}+\frac{g''(z)}{g(z)}=0$$

$$\Rightarrow\left(X_0(z)\right)^2-\frac{g'(z)}{g(z)}X_0(z)+A_1(z)+\frac{A_0(z)}{2}\,\frac{g'(z)}{g(z)}+\frac{g''(z)}{2g(z)}=0$$

<u>Intégration de l'équation de quadrature</u>

L'une des équations s'écrit :

$$\left(X_0(z)\right)^2 + X_0(z)\left(\frac{A_0(z)-B_0(z)}{2} - \frac{g'(z)}{g(z)}\right) + \frac{A_1(z)+B_1(z)}{2} + \frac{B_0(z)}{2}\frac{g'(z)}{g(z)} + \frac{g''(z)}{2g(z)} = 0$$

$$\Delta(z) = \left(A_0(z)-B_0(z)-2\frac{g'(z)}{g(z)}\right)^2 - 8\left(A_1(z)+B_1(z)+B_0(z)\frac{g'(z)}{g(z)}+\frac{g''(z)}{g(z)}\right)$$

$$\Rightarrow X_0(z) = \frac{1}{4}\left(B_0(z)-A_0(z)+2\frac{g'(z)}{g(z)} \pm \sqrt{\Delta(z)}\right) \Rightarrow y(z) = \sqrt{g(z)} \times Exp\left(\int_{z_0}^{z} d\zeta \, \frac{B_0(\zeta)-A_0(\zeta) \pm \sqrt{\Delta(\zeta)}}{4}\right)$$

Et par intégration formelle la solution s'écrit :

$$\begin{cases} y(z) = \sqrt{g(z)} \times Exp\left(\int_{z_0}^{z} d\zeta \, \frac{B_0(\zeta)-A_0(\zeta) \pm \sqrt{\Delta(\zeta)}}{4}\right) \\ \Delta(z) = \left(A_0(z)-B_0(z)-2\frac{g'(z)}{g(z)}\right)^2 - 8\left(A_1(z)+B_1(z)+B_0(z)\frac{g'(z)}{g(z)}+\frac{g''(z)}{g(z)}\right) \end{cases}$$

Lorsque A_0=B_0 et A_1=B_1, il vient :

$$\begin{cases} y(z) = \sqrt{g(z)} \times Exp\left(\pm\frac{1}{4}\int_{z_0}^{z} d\zeta \, \sqrt{\Delta(\zeta)}\right) \\ \Delta(z) = 4\left(\frac{g'(z)}{g(z)}\right)^2 - 8\left(2A_1(z)+A_0(z)\frac{g'(z)}{g(z)}+\frac{g''(z)}{g(z)}\right) \end{cases}$$

On peut trouver une autre quadrature, en utilisant le Wronskien de ces deux solutions, écrivons les fonctions solutions des équations de départ différemment :

$$y_1''(z) + A_0(z)\,y_1'(z) + A_1(z)\,y_1(z) = 0 \qquad y_2''(z) + B_0(z)\,y_2'(z) + B_1(z)\,y_2(z) = 0 \quad g(z) = y_1(z)y_2(z)$$

$$W = Wronskien(y_1, y_2) = y_1'y_2 - y_2'y_1 \rightarrow W' = y_1''y_2 - y_2''y_1$$

$$\Rightarrow W' + \frac{A_0+B_0}{2}\left(y_1'y_2 - y_2'y_1\right) + \frac{A_0-B_0}{2}\left(y_2'y_1 + y_1'y_2\right) + \left(A_1 - B_1\right)y_1y_2 = 0$$

$$\Rightarrow W' + \frac{A_0+B_0}{2}W + \frac{A_0-B_0}{2}g' + \left(A_1 - B_1\right)g = 0$$

Supposons que : $\frac{A_0+B_0}{2}=\frac{f'(z)}{f(z)}$ *, alors l'équation différentielle du Wronskien des deux solutions des deux équations différentielles s'écrit :*

$$W'+\frac{f'}{f}W+\frac{A_0-B_0}{2}g'+(A_1-B_1)g=0\Rightarrow (W\,f)'=-f\left(\frac{A_0-B_0}{2}g'+(A_1-B_1)g\right)$$

Par intégration, il vient :

$$G(z)=\frac{A_0(z)-B_0(z)}{2}g'(z)+(A_1(z)-B_1(z))g(z)\Rightarrow W(z)=-\frac{1}{f(z)}\int_C^z d\zeta\; f(\zeta)G(\zeta)$$

$$\begin{cases}W=y_1'y_2-y_2'y_1\\ g'=y_1'y_2+y_2'y_1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y_1'(z)y_2(z)=\frac{g'(z)}{2}-\frac{1}{2f(z)}\times\int_C^z d\zeta\; f(\zeta)G(\zeta)\\ y_1(z)y_2'(z)=\frac{g'(z)}{2}-\frac{1}{2f(z)}\times\int_C^z d\zeta\; f(\zeta)G(\zeta)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{y_1'(z)}{y_1(z)}=\frac{g'(z)}{2g(z)}-\frac{1}{2g(z)f(z)}\times\int_C^z d\zeta\; f(\zeta)G(\zeta)\\ \frac{y_2'(z)}{y_2(z)}=\frac{g'}{2g(z)}+\frac{1}{2g(z)f(z)}\times\int_C^z d\zeta\; f(\zeta)G(\zeta)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}y_1(z)=\sqrt{g(z)}\times Exp\left(-\frac{1}{2}\int_D^z d\xi\;\frac{1}{g(\xi)f(\xi)}\times\int_C^\xi d\zeta\; f(\zeta)G(\zeta)\right)\\ y_2(z)=\sqrt{g(z)}\times Exp\left(+\frac{1}{2}\int_D^z d\xi\;\frac{1}{g(\xi)f(\xi)}\times\int_C^\xi d\zeta\; f(\zeta)G(\zeta)\right)\end{cases}$$

Lorsque $A_0=B_0$ *et* $A_1=B_1$*, il vient la quadrature déjà rencontrée dans l'exemple précédent :*

$$G(z)=0\Rightarrow W(z)=\frac{C}{f(z)}\quad\begin{cases}W=y_1'y_2-y_2'y_1\\ g'=y_1'y_2+y_2'y_1\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{y_1'(z)}{y_1(z)}=\frac{g'(z)}{2g(z)}-\frac{C}{2g(z)f(z)}\\ \frac{y_2'(z)}{y_2(z)}=\frac{g'}{2g(z)}+\frac{C}{2g(z)f(z)}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y_1(z)=\sqrt{g(z)}\times Exp\left(-\frac{C}{2}\int_{z_0}^z d\xi\;\frac{1}{g(\xi)f(\xi)}\right)\\ y_2(z)=\sqrt{g(z)}\times Exp\left(+\frac{C}{2}\int_{z_0}^z d\xi\;\frac{1}{g(\xi)f(\xi)}\right)\end{cases}$$

Un résultat général sur l'équation différentielle du produit de deux solutions d'équations du n-ième degré

Soit y_1 solution de l'équation du n-ième degré : $y_1^{(n)}(z)+p_{1,0}(z)\,y_1^{(n-1)}(z)+\ldots+p_{1,n}(z)\;y_1(z)=0$

et soit y_2 *solution de l'équation du n-ième degré :* $y_2^{(n)}(z)+p_{2,0}(z)\,y_2^{(n-1)}(z)+\ldots+p_{2,n}(z)\;y_2(z)=0$

Soit g le produit de ces deux solutions indépendantes : $g(z)=y_1(z)\,y_2(z)$ *. La méthode pour trouver l'équation différentielle de ce produit est la suivante : (décrit par H.Poincaré, 1886 «SUR LES INTEGRALES IRREGIJLIERES DES EQUATIONS LINEAIRES.»).*

Les inconnus du système linéaire qui va être obtenu sont tous les produits de toutes les dérivées jusqu'à l'ordre n-1 des fonctions y_1 *et* y_2 *:* $y_1^{(\alpha)}\times y_2^{(\beta)}\quad \alpha,\beta\in\{0,1,\ldots,n-1\}$ *hormis le produit original* $g(z)=y_1(z)\,y_2(z)$*, soit donc un nombre de* n^2*-1 inconnus en tout :*

Formons les dérivées de g successivement jusqu'à l'ordre n^2*-1, en substituant à chaque fois qu'est rencontrée la dérivée n-ième de* y_1 *ou* y_2 *en sa valeur donnée par l'équation différentielle, puis en substituant l'un des dérivées de g d'ordre inférieur par sa valeur selon les* n^2 *inconnus, on peut alors écrire formellement ce système d'équations comme un système linéaire sur les inconnus* $y_1^{(\alpha)}\times y_2^{(\beta)}$ *:*

$$\begin{cases} g^{(0)}=y_1y_2 \\ y_1^{(n)}(z)=-p_{1,0}(z)\,y_1^{(n-1)}(z)-\ldots-p_{1,n}(z)\;y_1(z) \\ y_2^{(n)}(z)=-p_{2,0}(z)\,y_2^{(n-1)}(z)-\ldots-p_{2,n}(z)\;y_2(z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g=y_1^{(0)}y_2^{(0)}=y_1y_2 \quad et \quad g^{(1)}=y_1'y_2+y_1y_2' \\ g^{(2)}=y_1''y_2+2y_1'y_2'+y_1y_2'' \\ \ldots \\ g^{(n)}=\displaystyle\sum_{\alpha=0}^{l=n-1}\sum_{\beta=0}^{l=n-1} f_{\alpha,\beta}^{n}\times y_1^{(\alpha)}y_2^{(\beta)} \\ \ldots \\ g^{(n^2-1)}=\displaystyle\sum_{\alpha=0}^{l=n^2-1}\sum_{\beta=0}^{l=n^2-1} f_{\alpha,\beta}^{n^2-1}\times y_1^{(\alpha)}y_2^{(\beta)} \end{cases}$$

Avec $f_{\alpha,\beta}^{l}$ *fonctions de z et* f_l *fonctions de z*

Ces n^2*-1 équations permettent de déterminer par inversion du système linéaire les* n^2*-1 inconnus* $y_1^{(\alpha)}\times y_2^{(\beta)}$ *. En reportant ces valeurs, sur une dérivation supplémentaire de* $g^{(n^2-1)}$ *nous avons formellement :* $g^{(n^2)}=\sum_{\alpha=0}^{l=n^2}\sum_{\beta=0}^{l=n^2} f_{\alpha,\beta}^{n^2}\times y_1^{(\alpha)}y_2^{(\beta)}$ *qui se transforme ainsi en une équation différentielle de degré* n^2 *linéaire en g.*

Lorsque le déterminant du système linéaire précédent n'est pas nul, soit que toutes les valeurs $y_1^{(\alpha)} \times y_2^{(\beta)}$ *peuvent être déterminées, il suffit de prendre parmi ces deux produits les valeurs respectives de* $g = y_1^{(0)} \times y_2^{(0)}$ *et* $y_1^{(1)} \times y_2^{(0)}$ *, on écrit alors formellement par simple quadrature :*

$$\begin{cases} g = y_1^{(0)} \times y_2^{(0)} \\ y_1^{(1)} \times y_2^{(0)} = \sum_{l=0}^{l=n^2} \Phi_l g^{(l)} \end{cases} \Rightarrow \frac{y_1^{(1)}}{y_1} = \frac{\sum_{l=0}^{l=n^2} \Phi_l g^{(l)}}{g} \Rightarrow \frac{y_1^{(1)}(z)}{y_1(z)} = \frac{\sum_{l=0}^{l=n^2} \Phi_l(z) g^{(l)}(z)}{g(z)} \Rightarrow y_1(z) = Exp\left(\int_{z_0}^{z} d\zeta \left(\frac{\sum_{l=0}^{l=n^2} \Phi_l(z) g^{(l)}(z)}{g(z)} \right) \right)$$

Mais il se peut que le déterminant du système linéaire soit nul, c'est d'ailleurs le cas pour notre exemple où la condition $A_0' + \frac{A_0^2}{2} - 2A_1 = B_0' + \frac{B_0^2}{2} - 2B_1$ *remplie pour les deux équations différentielles du second degré équivaut à cette annulation du déterminant (voir plus loin). Dans ce cas pour des équations différentielle du second degré on aboutit à une équation algébrique quadratique sur la détermination de* $\frac{y_1^{(1)}}{y_1}$ *.*

Dans un article de 1900 de J.Horn, « Über die irregulären Integrale der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit rationalen Coefficienten » l'auteur décrit formellement les conditions pour lesquelles l'équation du produit est du troisième degré. Il se réfère à la notation décrite par H.Poincaré, pour le produit des solutions de deux équations différentielles du second degré, notation que je reprend en partie mais indicée :

$$\begin{cases} g = y_1 y_2 \\ g^{(1)} = y_1' y_2 + y_1 y_2' \leftarrow f_{1,0}^1 = f_{0,1}^1 = 1 \\ g^{(2)} = f_{0,0}^2 g + f_{1,0}^2 y_1' y_2 + f_{0,1}^2 y_1 y_2' + 2 y_1' y_2' \leftarrow f_{1,1}^2 = 2 \\ g^{(3)} = f_{0,0}^3 g + f_{1,0}^3 y_1' y_2 + f_{0,1}^3 y_1 y_2' + f_{1,1}^3 y_1' y_2' \\ g^{(4)} = f_{0,0}^4 g + f_{1,0}^4 y_1' y_2 + f_{0,1}^4 y_1 y_2' + f_{1,1}^4 y_1' y_2' \end{cases}$$

L'équation différentielle du 4ème degré va s'écrire sous la forme de l'annulation du déterminant (5,5) avec les inconnus du système $y_1 y_2, y_1' y_2, y_1 y_2', y_1' y_2'$ *:* $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -g \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -g^{(1)} \\ f_{0,0}^2 g & f_{1,0}^2 & f_{0,1}^2 & 2 & -g^{(2)} \\ f_{0,0}^3 g & f_{1,0}^3 & f_{0,1}^3 & f_{1,1}^3 & -g^{(3)} \\ f_{0,0}^4 g & f_{1,0}^4 & f_{0,1}^4 & f_{1,1}^4 & -g^{(4)} \end{vmatrix} = 0$ *où si l'on considère les seuls inconnus* $y_1' y_2, y_1 y_2', y_1' y_2'$ *comme l'annulation du déterminant (4,4) :*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -g^{(1)} \\ f_{1,0}^2 & f_{0,1}^2 & 2 & f_{0,0}^2 g - g^{(2)} \\ f_{1,0}^3 & f_{0,1}^3 & f_{1,1}^3 & f_{0,0}^3 g - g^{(3)} \\ f_{1,0}^4 & f_{0,1}^4 & f_{1,1}^4 & f_{0,0}^4 g - g^{(4)} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} g^{(1)} & 1 & 1 & 0 \\ g^{(2)} - f_{0,0}^2 g & f_{1,0}^2 & f_{0,1}^2 & 2 \\ g^{(3)} - f_{0,0}^3 g & f_{1,0}^3 & f_{0,1}^3 & f_{1,1}^3 \\ g^{(4)} - f_{0,0}^4 g & f_{1,0}^4 & f_{0,1}^4 & f_{1,1}^4 \end{vmatrix} = 0$$

Si maintenant avec les seuls inconnus $y_1'y_2, y_1y_2', y_1'y_2'$ *, le déterminant du système des 3 premières équations linéaire est nul, soit lorsque :* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ f_{1,0}^2 & f_{0,1}^2 & 2 \\ f_{1,0}^3 & f_{0,1}^3 & f_{0,1}^3 \end{vmatrix} = 0$ *, cela signifie que les trois inconnus* $y_1'y_2, y_1y_2', y_1'y_2'$ *sont reliés par une combinaison linéaire, et l'un quelconque de ces trois déterminants donne donc l'équation différentielle du 3-ième degré :*

$$\begin{vmatrix} g^{(1)} & 1 & 1 \\ g^{(2)} - f_{0,0}^2 g & f_{1,0}^2 & f_{0,1}^2 \\ g^{(3)} - f_{0,0}^3 g & f_{1,0}^3 & f_{0,1}^3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} g^{(1)} & 1 & 0 \\ g^{(2)} - f_{0,0}^2 g & f_{1,0}^2 & 2 \\ g^{(3)} - f_{0,0}^3 g & f_{1,0}^3 & f_{0,1}^3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} g^{(1)} & 1 & 0 \\ g^{(2)} - f_{0,0}^2 g & f_{0,1}^2 & 2 \\ g^{(3)} - f_{0,0}^3 g & f_{0,1}^3 & f_{0,1}^3 \end{vmatrix} = 0$$

Au cas d'espèce nous avons effectivement les équations linéaires suivantes :

$$\begin{cases} y_1''+A_0y_1'+A_1y_1 = 0 \\ y_2''+B_0y_2'+B_1y_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} g' = y_1'y_2 + y_1y_2' \\ g'' = -(A_1+B_1)g - A_0y_1'y_2 - B_0y_1y_2' + 2y_1'y_2' \\ g^{(3)} = -((A_1+B_1)g)' + (A_0A_1+B_0B_1)g + (A_0^2+A_0'-2B_1)y_1'y_2 + (B_0^2+B_0'-2A_1)y_1y_2' - 3(A_0+B_0)y_1'y_2' \\ = (A_0A_1+B_0B_1-A_1'-B_1')g + (A_0^2+A_0'-A_1-3B_1)y_1'y_2 + (B_0^2+B_0'-3A_1-B_1)y_1y_2' - 3(A_0+B_0)y_1'y_2' \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ f_{1,0}^2 & f_{0,1}^2 & 2 \\ f_{1,0}^3 & f_{0,1}^3 & f_{0,1}^3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -A_0 & -B_0 & 2 \\ A_0^2+A_0'-2B_1 & B_0^2+B_0'-2A_1 & -3(A_0+B_0) \end{vmatrix} \Leftrightarrow A_0^2 - 4A_1 + 2A_0' = B_0^2 - 4B_1 + 2B_0'$$

Et dans ce cas l'équation du troisième degré donne :

$$f_{0,0}^2(g) = -(A_1+B_1) \quad f_{0,0}^3 = A_0A_1 + B_0B_1 - A_1' - B_1'$$

$$= (A_0A_1+B_0B_1-A_1'-B_1')g + (A_0^2+A_0'-A_1-3B_1)y_1'y_2 + (B_0^2+B_0'-3A_1-B_1)y_1y_2' - 3(A_0+B_0)y_1'y_2'$$

$$\frac{1}{A_0-B_0} \times \begin{vmatrix} g^{(1)} & 1 & 1 \\ g^{(2)} + (A_1+B_1)g & -A_0 & -B_0 \\ g^{(3)} - (A_0A_1+B_0B_1-A_1'-B_1') & A_0^2+A_0'-A_1-3B_1 & B_0^2+B_0'-3A_1-B_{11} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \times \begin{vmatrix} g^{(1)} & 1 & 0 \\ g^{(2)} + (A_1+B_1)g & -A_0 & 2 \\ g^{(3)} - (A_0A_1+B_0B_1-A_1'-B_1') & A_0^2+A_0'-A_1-3B_1 & -3(A_0+B_0) \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \times \begin{vmatrix} g^{(1)} & 1 & 0 \\ g^{(2)} + (A_1+B_1)g & -B_0 & 2 \\ g^{(3)} - (A_0A_1+B_0B_1-A_1'-B_1')g & B_0^2+B_0'-3A_1-B_1 & -3(A_0+B_0) \end{vmatrix} = 0$$

Et en l'occurrence :

$$\frac{1}{2} \times \begin{vmatrix} g^{(1)} & 1 & 0 \\ g^{(2)} + (A_1+B_1)g & -A_0 & 2 \\ g^{(3)} - (A_0A_1+B_0B_1-A_1'-B_1') & A_0^2+A_0'-A_1-3B_1 & -3(A_0+B_0) \end{vmatrix} = g^{(3)} + 3\frac{A_0+B_0}{2}g'' + \left(A_1+3B_1+A_0'+A_0\frac{A_0+3B_0}{2}\right)g' + \left(A_1'+B_1'+A_0B_1+A_1B_0+\frac{(A_0+B_0)(A_1+B_1)}{2}\right)g = 0$$

On note également que les trois premières équations linéaires peuvent aussi s'écrire sous la forme d'un système d'équations algébriques :

$$\begin{cases} \dfrac{g^{(1)}}{g} = \dfrac{y_1'}{y_1} + \dfrac{y_2'}{y_2} \\ \dfrac{g^{(2)}}{g} = f_{0,0}^2 + f_{1,0}^2 \dfrac{y_1'}{y_1} + f_{0,1}^2 \dfrac{y_2'}{y_2} + 2 \dfrac{y_1'}{y_1} \dfrac{y_2'}{y_2} \\ \dfrac{g^{(3)}}{g} = f_{0,0}^3 + f_{1,0}^3 \dfrac{y_1'}{y_1} + f_{0,1}^3 \dfrac{y_2'}{y_2} + f_{1,1}^3 \dfrac{y_1'}{y_1} \dfrac{y_2'}{y_2} \end{cases}$$